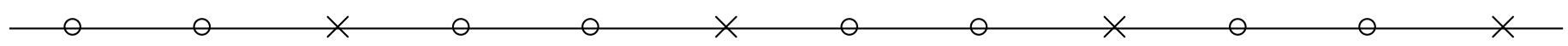
1 Introduction

Dans cette note, on étudie un problème particulier consistant à plier des mots binaires en leur milieu.

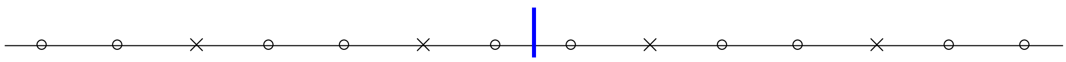
2 Pliage d'un mot de périodicité 3

Considérons un mot binaire de périodicité 3 (les croix représentent des 1).

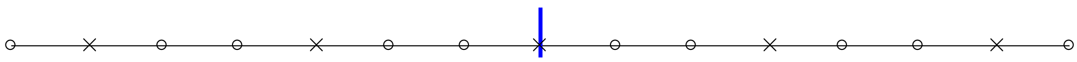


Etudions le résultat d'une opération particulière appelée *symétrise* appliquée au mot binaire : cette opération consiste à remplacer chaque lettre du mot par un "ou booléen" entre cette lettre elle-même et la lettre qui lui est symétrique par rapport à la ligne centrale du mot ($\circ \vee \circ = \circ$, $\times \vee \circ = \circ \vee \times = \times \vee \times = \times$). Selon la position de la ligne centrale du mot, il y a 6 façons différentes d'appliquer l'opération *symétrise*.

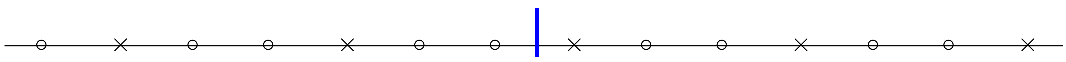
- position 1 (avant et après application de *symétrise*) :



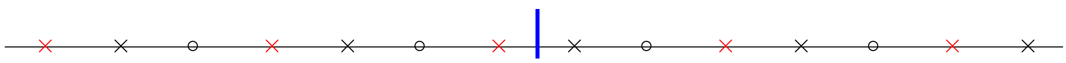
- position 2 (avant et après application de *symétrise*) :



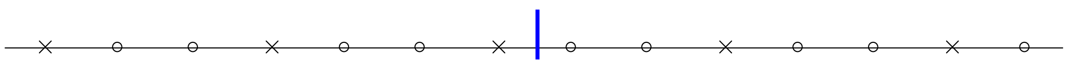
- position 3 (avant application de *symétrise*):



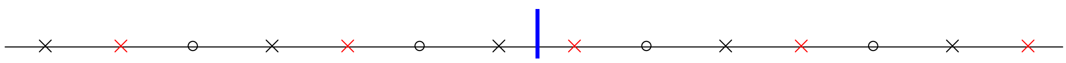
position 3 (après application de *symétrise*):



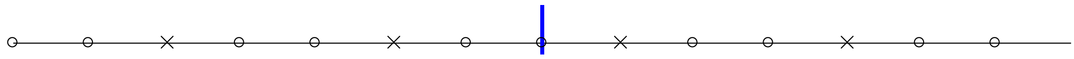
- position 4 (avant application de *symétrise*):



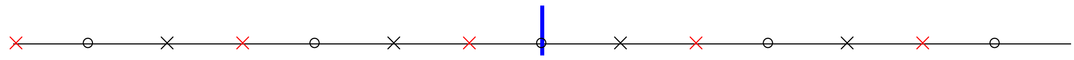
position 4 (après application de *symétrise*):



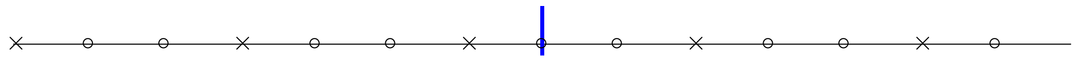
- position 5 (avant application de *symétrise*):



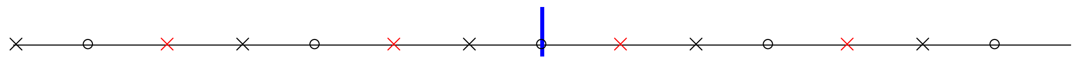
position 5 (après application de *symétrise*):



- position 6 (avant application de *symétrise*) :



position 6 (après application de *symétrise*) :



Les positions 3 et 4 aboutissent au même résultat par symétrisation. Les positions 5 et 6 également. Les 6 positions du pli possibles aboutissent donc à 4 résultats différents. On notera ces 4 résultats de la façon suivante :

- cas 3.1 : 10010|01001 ;
- cas 3.2 : 00100100100 ;
- cas 3.3 : 01101|10110 ;
- cas 3.4 : 11011011011.

On constate que la distance maximum qui sépare deux 0 symétriques par rapport à la ligne de pli est égale à 2.
L'application de la fonction *symétrise* étant simple, on se contentera de représenter les 4 cas ci-dessus par leur mot binaire de longueur 3 situé à droite du pli puisque la symétrie permet de déduire le reste du mot quand on connaît sa longueur :

- cas 3.1 : 010 ;
- cas 3.2 : 100 ;
- cas 3.3 : 101 ;
- cas 3.4 : 011.

On appellera cette représentation la représentation générique. S'il s'agissait d'établir un lien avec la conjecture de Goldbach, ces 6 sortes de plis correspondent aux 6 classes d'équivalence modulo 6 auxquelles peut appartenir la moitié du nombre pair dont on cherche une décomposition de Goldbach.

3 Généralisation

On ne détaillera pas le cas du pliage d'un mot binaire de périodicité 5 ou tout autre nombre impair supérieur. On comprend aisément que les 10 cas de périodicité 5 se ramèneront à 6 résultats possibles différents qui sont :

- cas 5.1 : 010000100001000010 ;
- cas 5.2 : 0000100001000010000 ;
- cas 5.3 : 000110001100011000 ;
- cas 5.4 : 1001010010100101001 ;
- cas 5.5 : 101001010010100101 ;
- cas 5.6 : 0110001100011000110.

La représentation par mot générique permet d'aboutir aux mots :

- cas 5.1 : 00100 ;
- cas 5.2 : 10000 ;
- cas 5.3 : 10001 ;
- cas 5.4 : 01001 ;
- cas 5.5 : 01010 ;
- cas 5.6 : 00110.

De même, les 14 cas de périodicité 7 se ramèneront à 8 résultats possibles différents.

- cas 7.1 : 0001000 ;
- cas 7.2 : 1000000 ;
- cas 7.3 : 1000001 ;
- cas 7.4 : 0100001 ;
- cas 7.5 : 0100010 ;
- cas 7.6 : 0010010.
- cas 7.7 : 0010100 ;
- cas 7.8 : 0001100.

Plus généralement, dans le cas d'un mot de périodicité $2k+1$, on obtient $2(2k+1)$ positions possibles différentes de la ligne de pli, qui se ramènent par symétrisation à $2k+2$ résultats possibles différents. Les résultats sont des mots de périodicité $2k+1$, représentables par un mot générique de longueur $2k+1$. Ce mot générique contient au maximum 2 fois la lettre 1.

A nouveau, on constate que la distance maximum à la ligne de pli de deux 0 symétriques est égale à 2.

4 Agrégat du pliage de deux mots de périodicité différentes

On s'attendait à ce qu'il y ait 24 possibilités de faire un "ou booléen" entre l'un des 4 cas différents obtenus pour une périodicité 3 (cas 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4) et l'un des 6 cas différents obtenus pour une périodicité 5 (cas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6). Mais on voit que, la ligne de pli "tombant" selon le cas entre deux caractères (dans le cas d'un mot de longueur paire) ou "sur" un caractère (dans le cas des mots de longueur impaire), seuls certains cas peuvent être combinés à d'autres. On a seulement 12 résultats possibles de combinaisons que voici :

- 3.1 $\vee$ 5.1 : 010 $\vee$ 00100 = 011010010010110
- 3.1 $\vee$ 5.3 : 010 $\vee$ 10001 = 110011010110011
- 3.1 $\vee$ 5.5 : 010 $\vee$ 01010 = 010110111011010
- 3.3 $\vee$ 5.1 : 101 $\vee$ 00100 = 101101111101101
- 3.3 $\vee$ 5.3 : 101 $\vee$ 10001 = 101111101111101
- 3.3 $\vee$ 5.5 : 101 $\vee$ 01010 = 111101101101111
- 3.2 $\vee$ 5.2 : 100 $\vee$ 10000 = 100101100110100
- 3.2 $\vee$ 5.4 : 100 $\vee$ 01001 = 110110100101101
- 3.2 $\vee$ 5.6 : 100 $\vee$ 00110 = 101100111100110
- 3.4 $\vee$ 5.2 : 011 $\vee$ 10000 = 111011011011011
- 3.4 $\vee$ 5.4 : 011 $\vee$ 01001 = 011011111111011
- 3.4 $\vee$ 5.6 : 011 $\vee$ 00110 = 011111011011111

La période du mot résultant est le ppcm des périodes des deux mots à agréger. Le mot résultant du "ou booléen" de deux mots de périodicité 3 et 5 aura donc une période de longueur 15. On constate que tous les mots obtenus contiennent au moins un 0, et ce avant la position 5. Si l'on essaie d'agréger en plus les mots de période 7, on aboutit à des mots dont la périodicité est 105, illisibles. Un test des 48 possibilités nous conforte dans l'idée qu'on trouve un 0 avant la position 7.

5 Généralisation à envisager

Le travail présenté semble généralisable : pour un impair donné $2k+1$, il y a $2k+2$ cas. Agréger les différents cas pour tous les impairs va nous amener à considérer $2^{n-1}.n!$ configurations qui sont vraisemblablement telles (puisque la conjecture de Goldbach semble vraie) que la distance à la ligne de pli de deux 0 symétriques est toujours inférieure au plus grand impair considéré.
Ce qu'il faudrait prouver, c'est la chose suivante : quand on fait un "ou booléen" entre deux mots binaires de longueurs impaires m et n, chacun de ces mots contenant au maximum 2 fois la lettre 1 dans son écriture, le mot résultat contient un 0 avant la position $max(m,n)$.