Courbes et points entiers (Denise Vella-Chemla, 18.1.2017)

On avait proposé la définition suivante pour les nombres premiers : un nombre p est premier si et seulement si toute fraction rationnelle de la forme $\dfrac{p-x}{x}$ avec x entier compris strictement entre 1 et p n'est pas égale à un nombre entier.

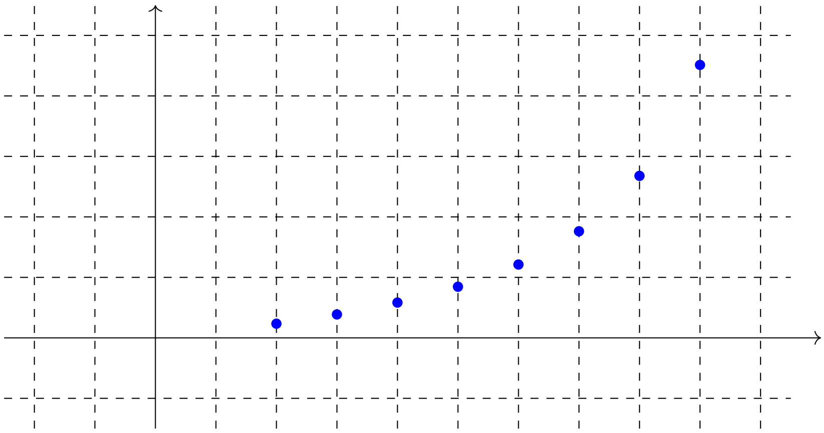
En mettant les nombres en regard à la manière dont Gauss l'a fait pour trouver, enfant, à la demande de son professeur, que la somme des 100 premiers entiers vaut 5050, on comprend aisément la raison d'une telle possibilité de définition.

7 est premier car aucune des fractions de l'ensemble $\left\{\dfrac{5}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{5}\right\}$ n'est entière.

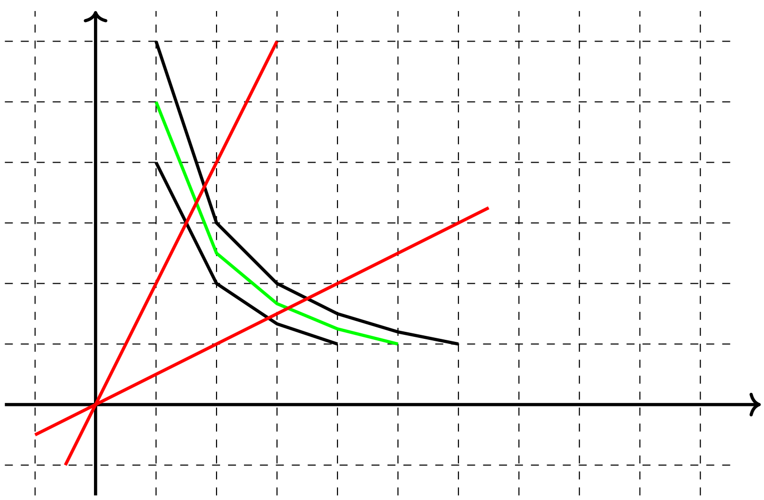
De même, 11, à qui est associé l'ensemble de fractions $\left\{\dfrac{9}{2}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{2}{9}\right\}$, est premier.

Par contre, 6 est composé car l'ensemble qui lui est associé, $\left\{\dfrac{4}{2}, \dfrac{3}{3}, \dfrac{2}{4}\right\}$, contient une fraction entière au moins, $\dfrac{4}{2}$ par exemple.

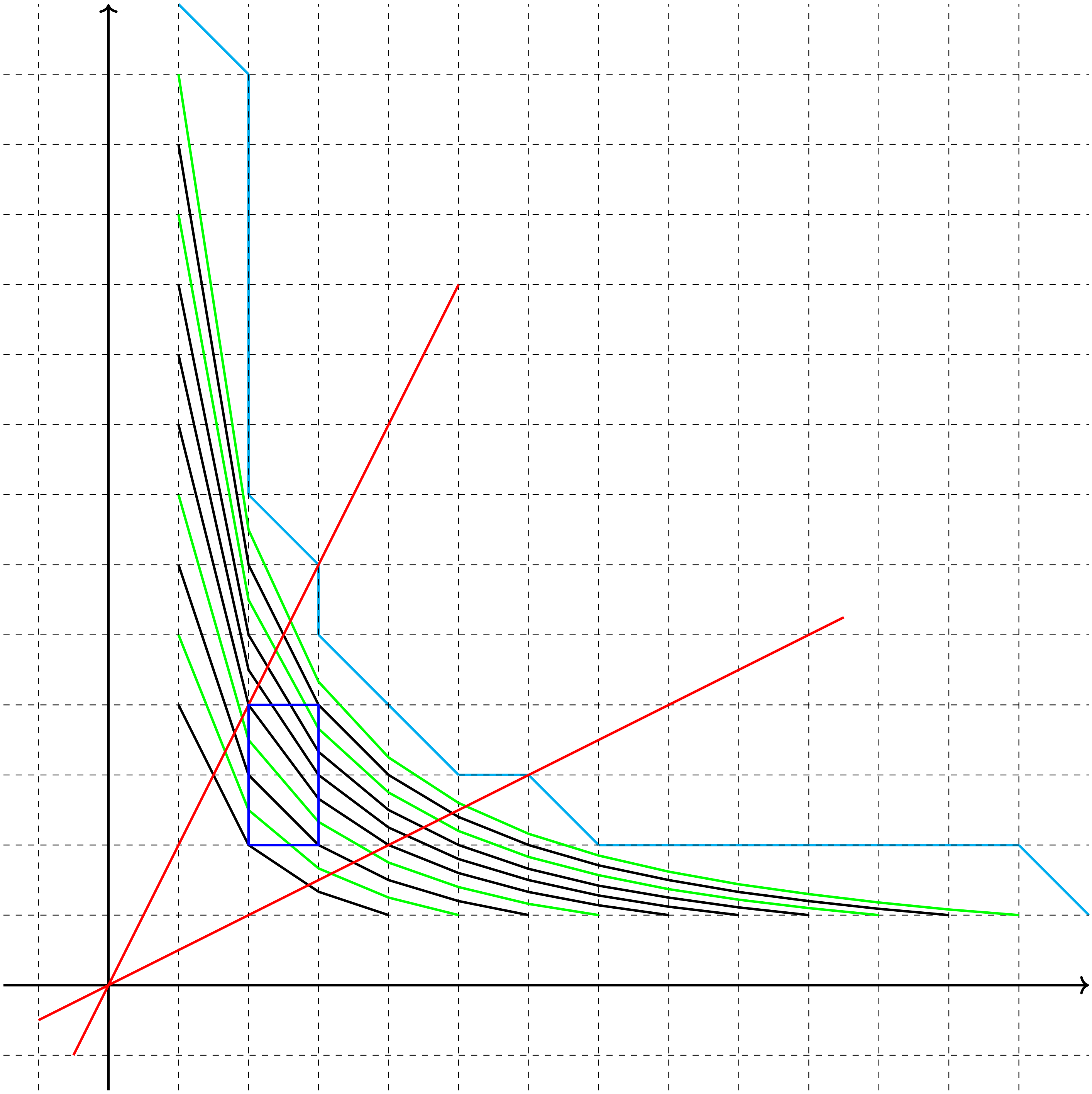
Si l'on représente chaque fraction de la forme $\dfrac{a}{b}$ par le point du plan de coordonnées $\left(a, \dfrac{a}{b}\right)$, voyons ci-dessous, les points d'ordonnées non entières, appartenant à une hyperbole, associés au nombre pemier 11.



Il est plus judicieux de représenter les hyperboles de la forme $xy = n$ et de considérer la définition littérale de la primalité qui définit un nombre premier comme étant le seul produit d'1 et de lui-même. L' hyperbole verte apparaissant sur le graphique ci-dessous correspond au nombre premier 5 entre celles des nombres composés 4 et 6. Elle ne contient aucun point entier entre les droites $y = 2x$ et $y = x/2$.

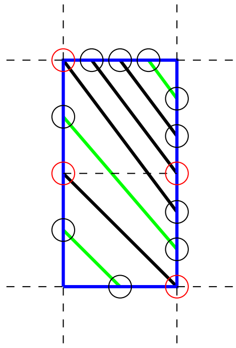


Courbe complétée jusqu'à $n = 13$ (5, 7, 11 et 13, premiers, en vert).



Imaginerait-on une méthode géométrique qui permettrait de dénombrer exactement le nombre de nombres premiers compris entre 2 nombres ?

Focalisons-nous sur la portion du plan encadrée en bleu sur le graphique précédent et agrandissons-la.



Puisque les coins bas-gauche et haut-droit ont pour coordonnées (2,2) et (3,4), on sait que passent dans la portion encadrée $12-4-1=7$ hyperboles, ce qui correspond à 14 points d'entrée/sortie dans la zone. Or il reste 4 “coins” par lesquels peuvent passer des hyperboles (on les a entourés en rouge) qui soustraient 8 entrées ou sorties (un seul point entier suffit à éliminer toute l'hyperbole). Il reste 6 entrées ou sorties ne passant pas par des “coins”, ce qui divisé par 2 amène le nombre de 3 nombres premiers entre 4 et 12 (ces nombres premiers sont 5, 7 et 11).

Les hyperboles successives n'ont aucun point commun. Cette méthode de comptage semble également fonctionner pour une zone avec points entiers intérieurs (ne serait-ce qu'un seul). Prenons la zone carrée de 2×2 entre les points bas-gauche $(3,5)$ et haut-droit $(5,7)$. 19 hyperboles (correspondant à $5\times 7-3\times 5-1$ passent dans la zone (soient 38 entrées/sorties). Les 7 “coins” éliminent 14 entrées ou sorties, ce qui correspondrait à 12 $(=(38-14)/2)$ nombres compris entre 15 et 35 qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.

Ce qui est surprenant, c'est qu'on peut compter de la même manière, sous prétexte qu'il s'agit dans tous les cas d'étudier les divisibilités par 2 et 3 de nombres assez petits, le nombre de nombres premiers compris entre 4 et 12 (zone bleue déjà délimitée) ou bien le nombre de nombres premiers compris entre 8 et 18 (en utilisant la zone de même forme qui a pour coin bas-gauche (2,4) et coin haut-droit (3,6)), ou encore le nombre de nombres premiers compris entre 6 et 16 (zone de coin bas gauche (3,2) et de coin haut-droit (4,4)). Les 3 nombres premiers sont 5, 7 et 11 dans le premier cas, 11, 13 et 17 dans le second et 7, 11 et 13 dans le troisième.

Pistes : en terme d'invariants de comptage, on doit peut-être tenir compte du fait que ce qui sort par le bas d'une maille entre par le haut dans la maille qui est au-dessous ou bien que ce qui sort par la droite d'une maille entre par la gauche dans la maille qui en est à droite, etc. Il faut aussi peut-être avoir trois autres choses à l'esprit :
- le théorème de Pick d'une part (qui permet de relier le nombre de points entiers à l'intérieur d'un polygone, le nombre de points entiers qui sont sur sa bordure et l'aire de ce polygone) ;
- le fait de conserver l'aire mais de jouer sur un principe de “vases communicants” entre ensemble des points intérieurs et ensemble des points de la bordure lorsqu'on effectue des découpages-collages de petits triangles moitiés de mailles en les accolant à leur symétrique (ces petits triangles moitié de mailles sont en miroir de part et d'autre de la diagonale principale) ;
- le fait d”'enrober au plus juste” les hyperboles successives dans des polygones de périmètre minimum (on a dessiné en turquoise un tel polygone) selon des règles simples déterministes et fonction de la manière dont la dernière hyperbole traverse ses mailles.