Essayer de comprendre la formule de Riemann (Denise Vella-Chemla, 22.12.2018)

Ci-dessous la transcription de mes posts sur le forum *les-mathematiques.net* cette semaine [1].

On s'intéresse à la formule :

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\alpha} \left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right] + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0),$$

de l'article de Riemann dans lequel il émet son illustre hypothèse.

Quand on calcule par programme la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{ln\ k}$ [2], on trouve "quasiment" $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n, et cela semble signifier que dans la formule fournie par Riemann, les éléments que l'on soustrait et ceux que l'on ajoute à $Li(x)$ s'annulent.

Intéressons-nous à $S(x) = \displaystyle\sum_{\rho} \left[Li\left(x^{\rho}\right) + Li\left(x^{\overline{\rho}}\right) \right]$ et au fait que Riemann insiste sur le fait qu'il faille calculer cette somme selon chaque "zéro et son conjugué" un par un, en écrivant : "Mais, si l'on changeait cet ordre des termes de la série, on pourrait obtenir pour résultat n'importe quelle valeur réelle.".

On a

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{\rho} 2cos\ arg(Li(x^{\rho})) \\ &= \sum_{\rho} 2cos\ arctan \frac{Li(x^{\rho}) - \overline{Li(x^{\rho})}}{i(Li(x^{\rho}) + \overline{Li(x^{\rho})})} \\ &= \sum_{\rho} \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{Li(x^{\rho}) - \overline{Li(x^{\rho})}}{i(Li(x^{\rho}) + \overline{Li(x^{\rho})})} \right)^2}} \end{aligned}$$

Si maintenant on note $z = a + bi$ l'un des $Li(x^{\rho})$ avec ρ un zéro de zêta non trivial de partie imaginaire positive, on a : $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$ et $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ et la somme $S(x)$ égale (les 2 et les i s'éliminant dans la fraction sous le signe $\sqrt{}$) :

$$S(x) = \sum_{\rho} \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Im(Li(x^{\rho}))}{\Re(Li(x^{\rho}))} \right)^2}}$$

avec ρ tel que $\zeta(\rho) = 0$ et $\Im(\rho) > 0$.

Il faudrait alors peut-être démontrer que cette somme et l'intégrale $T(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1} \frac{dx}{x\ ln\ x}$ sont asymptotiquement égales pour ne conserver que $Li(x)$ dans la formule de $f(x)$.

Pour x entier inférieur à 1000, on fournit le programme python qui calcule l'intégrale $T(x)$ ainsi que son résultat ici :

— http://denise.vella.chemla.free.fr/pgmintegBR1000.pdf

— http://denise.vella.chemla.free.fr/resintegBR1000.pdf

Pour tenter de comparer $S(x)$ et $T(x)$, on fournit le programme python qui calcule la somme $S(x)$ pour les nombres entiers x inférieurs à 100, en utilisant les 1000 premiers zéros de zêta ou bien en utilisant les 100000 premiers zéros de zêta :

— http://denise.vella.chemla.free.fr/pgmcalcS.pdf

1. ici http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,1747818.

2. On nous a expliqué qu'il est normal que cette somme calculée sur des entiers soit équivalente au fait de calculer l'intégrale qui définit $li(x)$ car la différence entre la somme et l'intégrale est contrôlée puisque la dérivée de $\frac{1}{ln\ x}$, qui est $\frac{-1}{(x\ (ln\ x)^2)}$, est intégrable.

— http://denise.vella.chemla.free.fr/respgmcalcS1.pdf
— http://denise.vella.chemla.free.fr/respgmcalcS2.pdf

On n'a pas l'impression que $S(x)$ et $T(x)$ puissent jamais s'annuler.