Tester autrement la primalité

Denise Vella-Chemla

12 Mai 2009

1 Introduction

Est présentée dans cette note une nouvelle façon de tester la primalité d'un nombre entier, qui a découlé de recherches autour de la Conjecture de Goldbach ([6]). Cette conjecture reformulée par Euler énonce que *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

2 Utiliser la valeur absolue du résidu minimum absolu défini par Gauss

En annexe, est fourni un extrait des Recherches Arithmétiques de Gauss qui donne la définition de ce que Gauss appelle le *résidu minimum absolu* d'un nombre entier relatif selon un certain module.

Nous utilisons ici la valeur absolue de ce résidu minimum absolu selon les modules successifs 6, 10, 14,..., i.e. selon les modules de la forme $4k+2$ pour $0 < k < \sqrt{x}$.

Associons dans un tableau à chaque nombre entier x variant de 3 à 50 son image par la fonction $f(x,k) = 2k+1-varma(x,4k+2)$, pour k prenant les valeurs successives de 1 à $\sqrt{x}$, et où $varma(x,m)$ est la valeur absolue du *résidu minimum absolu* de x selon le module m (pour $k=0$, $f(x,k) = varma(x,4k+2)$). Les entêtes de colonnes fournissent les modules $4k+2$ selon lesquels sont calculées les valeurs de $f(x,k)$.

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
3 :	1	0									
4 :	0	1	1								
5 :	1	2	0								
6 :	0	3	1								
7 :	1	2	2								
8 :	0	1	3								
9 :	1	0	4	2							
10 :	0	1	5	3							
11 :	1	2	4	4							
12 :	0	3	3	5							
13 :	1	2	2	6							
14 :	0	1	1	7							
15 :	1	0	0	6							
16 :	0	1	1	5	7						
17 :	1	2	2	4	8						
18 :	0	3	3	3	9						
19 :	1	2	4	2	8						
20 :	0	1	5	1	7						
21 :	1	0	4	0	6						
22 :	0	1	3	1	5						
23 :	1	2	2	2	4						
24 :	0	3	1	3	3						
25 :	1	2	0	4	2	8					
26 :	0	1	1	5	1	7					
27 :	1	0	2	6	0	6					
28 :	0	1	3	7	1	5					
29 :	1	2	4	6	2	4					
30 :	0	3	5	5	3	3					
31 :	1	2	4	4	4	2					
32 :	0	1	3	3	5	1					
33 :	1	0	2	2	6	0					
34 :	0	1	1	1	7	1					
35 :	1	2	0	0	8	2					
36 :	0	3	1	1	9	3	3				
37 :	1	2	2	2	8	4	2				
38 :	0	1	3	3	7	5	1				
39 :	1	0	4	4	6	6	0				
40 :	0	1	5	5	5	7	1				
41 :	1	2	4	6	4	8	2				
42 :	0	3	3	7	3	9	3				
43 :	1	2	2	6	2	10	4				
44 :	0	1	1	5	1	11	5				
45 :	1	0	0	4	0	10	6				
46 :	0	1	1	3	1	9	7				
47 :	1	2	2	2	2	8	8				
48 :	0	3	3	1	3	7	9				
49 :	1	2	4	0	4	6	10	4			
50 :	0	1	5	1	5	5	11	5			

Etudions maintenant pour chaque x le produit des valeurs $f(x,k)$ ainsi calculées.

Trivialement, ce produit va être non nul pour les nombres premiers impairs (sauf 3 et 5), ce que l'on peut écrire :

$$x \text{ est un nombre premier impair} \iff \prod_{0\,<\,k\,<\,\sqrt{x}} f(x,k) \;>\; 0$$

Fournissons une autre façon de calculer $varma(x,k)$:

$$varma(x,k) = \mid \frac{k}{\pi} arcsin(sin(\frac{x\pi}{k})) \mid$$

Cette fonction est une fonction continue en dents de scie.
On imagine qu'en multipliant entre elles deux fonctions en dents de scie de périodicité p et q, on obtiendra une fonction continue de périodicité $ppcm(p,q)$.

Le fait pour un nombre pair d'admettre une décomposition de Goldbach, tel qu'il est présenté dans [4] peut alors s'écrire :

$$\begin{gathered}
\forall\, x \;\geq\; 3,\; Goldbach(2x,p,q) \\
\\
\iff \\
\text{2x} \;=\; p+q \\
\textit{et } p \textit{ est un nombre premier impair} \\
\textit{et } q \textit{ est un nombre premier impair} \\
\iff \\
\exists\, d \;\leq\; x-3 \textit{ tel que} \\
\prod_{0\,<\,k\,<\,\sqrt{x-d}} f(x-d,k) \;\times\; \prod_{0\,<\,m\,<\,\sqrt{x+d}} f(x+d,m) \;>\; 0
\end{gathered}$$

On pourrait démontrer la conjecture de Goldbach si l'on parvenait à démontrer que les différents produits selon la variable d ne peuvent pas être tous simultanément nuls[1].

3 Explication

Par deux programmes différents (l'un traitant les nombres pairs doubles de nombres pairs et l'autre traitant les nombres pairs doubles de nombres impairs), on essaie de trouver une explication au fait qu'il existe systématiquement un nombre d compris entre 1 et le nombre d'impairs inférieurs ou égaux à x qui est tel que les produits $f(x-d,k) * f(x+d,k)$ selon les modules k de 3 à $\sqrt{x}$ sont tous non nuls (nota : c'est à dire que l'on effectue les produits en prenant les éléments 2 par 2 autour de x par module pris chacun isolément au lieu d'effectuer les produits de la ligne correspondant à $x-d$ et de la ligne correspondant à $x+d$ pour étudier si chacun d'eux est premier).

[1] Peut-être est-il même possible d'obtenir par calcul les valeurs de d qui n'annulent pas le produit des produits.

En annexes 4 et 5 sont fournis les résultats de ces deux programmes ainsi que les sources des programmes eux-mêmes en annexes 6 et 7. On a systématiquement coloré les éléments de la première colonne dont tous les produits sont non nuls. On a fourni la décomposition de Goldbach à laquelle cette colonne correspond. On a mis un petit trait dans chaque ligne qui correspond à un axe de symétrie de la courbe en dents de scie (dont on ne fournit que les résultats pour les abscisses entières). Les axes de symétrie des courbes des différentes lignes sont décalés d'un en un pour les nombres pairs doubles de nombres impairs, et de deux en deux pour les nombres pairs doubles de nombres pairs. C'est à cause de ce "décalage" des axes de symétrie qu'on obtient toujours une colonne de produits tous non nuls (les courbes en dents de scie sont en quelque sorte déphasées). On constate que les fonctions en dents de scie dans le sens des colonnes ont pour conséquence des fonctions en dents de scie dans le sens des lignes pour les produits. Je crois que cette voie est la bonne, mais il faut réussir à la formaliser rigoureusement.

Une analyse plus poussée des résultats des deux programmes amènent aux conclusions suivantes (ceci doit être prouvable en utilisant la définition des produits effectués) :

- Pour les doubles de nombres impairs, les lignes des diviseurs de $2x$ commencent par un 0, et contiennent les carrés des $k+1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne. Ce qui nous intéresse pour assurer l'existence de décomposants de Goldbach, c'est la position des zéros : les positions de 2 zéros successifs sont systématiquement écartées de $2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

- Pour les doubles de nombres pairs, les lignes des diviseurs de $2x$ contiennent également les carrés des $k+1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne mais la ligne commencent par le plus grand des carrés de pairs. Les positions de 2 zéros successifs, comme dans le cas précédent, sont systématiquement écartées de $2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

- Sur les lignes des nombres qui ne divisent pas x, dans le cas d'un nombre pair double d'un nombre impair, on trouve des produits de deux nombres pairs successifs. Ce qui nous intéresse pour la recherche de décomposants, c'est le fait que si l'on prend 3 zéros successifs sur ces lignes, ils sont écartés de $écart_1$ et $écart_2$ tels que $écart_1 + écart_2 = 2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

- Sur les lignes des nombres qui ne divisent pas x, dans le cas d'un nombre pair double d'un nombre pair, lorsque les lignes commencent par un 0, on trouve des produits de deux nombres pairs successifs. Ce qui nous intéresse pour la recherche de décomposants, c'est le fait que si l'on prend 3 zéros successifs sur ces lignes, ils sont écartés de $écart_1$ et $écart_2$ tels que $écart_1 + écart_2 = 2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

Ce sont les contraintes spécifiques présentées ci-dessus sur les écarts entre les positions des zéros des différentes lignes qui ont pour conséquence que l'une des colonnes au moins ne contient aucun zéro.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.
[6] D. Vella-Chemla, Différentes formulations équivalentes de la Conjecture de Goldbach, mai 2009.

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9\ (mod\, 5)$, $-7 \equiv 15\ (mod\, 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite $0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

[2] Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : une citation extraite des Recherches Arithmétiques de Gauss (p.416)

Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, [...], est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique ; [...]. En outre, la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

Annexe 3 : Valeurs absolues des résidus minima absolus pour les nombres entiers de 51 à 100

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
51 :	1	0	4	2	6	4	12	6			
52 :	0	1	3	3	7	3	13	7			
53 :	1	2	2	4	8	2	12	8			
54 :	0	3	1	5	9	1	11	9			
55 :	1	2	0	6	8	0	10	10			
56 :	0	1	1	7	7	1	9	11			
57 :	1	0	2	6	6	2	8	12			
58 :	0	1	3	5	5	3	7	13			
59 :	1	2	4	4	4	4	6	14			
60 :	0	3	5	3	3	5	5	15			
61 :	1	2	4	2	2	6	4	14			
62 :	0	1	3	1	1	7	3	13			
63 :	1	0	2	0	0	8	2	12			
64 :	0	1	1	1	1	9	1	11	13		
65 :	1	2	0	2	2	10	0	10	14		
66 :	0	3	1	3	3	11	1	9	15		
67 :	1	2	2	4	4	10	2	8	16		
68 :	0	1	3	5	5	9	3	7	17		
69 :	1	0	4	6	6	8	4	6	16		
70 :	0	1	5	7	7	7	5	5	15		
71 :	1	2	4	6	8	6	6	4	14		
72 :	0	3	3	5	9	5	7	3	13		
73 :	1	2	2	4	8	4	8	2	12		
74 :	0	1	1	3	7	3	9	1	11		
75 :	1	0	0	2	6	2	10	0	10		
76 :	0	1	1	1	5	1	11	1	9		
77 :	1	2	2	0	4	0	12	2	8		
78 :	0	3	3	1	3	1	13	3	7		
79 :	1	2	4	2	2	2	12	4	6		
80 :	0	1	5	3	1	3	11	5	5		
81 :	1	0	4	4	0	4	10	6	4	14	
82 :	0	1	3	5	1	5	9	7	3	13	
83 :	1	2	2	6	2	6	8	8	2	12	
84 :	0	3	1	7	3	7	7	9	1	11	
85 :	1	2	0	6	4	8	6	10	0	10	
86 :	0	1	1	5	5	9	5	11	1	9	
87 :	1	0	2	4	6	10	4	12	2	8	
88 :	0	1	3	3	7	11	3	13	3	7	
89 :	1	2	4	2	8	10	2	14	4	6	
90 :	0	3	5	1	9	9	1	15	5	5	
91 :	1	2	4	0	8	8	0	14	6	4	
92 :	0	1	3	1	7	7	1	13	7	3	
93 :	1	0	2	2	6	6	2	12	8	2	
94 :	0	1	1	3	5	5	3	11	9	1	
95 :	1	2	0	4	4	4	4	10	10	0	
96 :	0	3	1	5	3	3	5	9	11	1	
97 :	1	2	2	6	2	2	6	8	12	2	
98 :	0	1	3	7	1	1	7	7	13	3	
99 :	1	0	4	6	0	0	8	6	14	4	
100 :	0	1	5	5	1	1	9	5	15	5	5

Annexe 4 : Produits f(x-k,i)*f(x+k,i) pour les nombres pairs doubles de nombres impairs (x allant de 13 à 49 de 2 en 2, i allant de 1 à $\sqrt{x}$ de 1 en 1 et k allant de 0 à $\frac{x-1}{2}$ de 2 en 2)

26 est un double de premier

$30 = 13 + 17$

0	4	$\mid$ 4	0
0	4	16	$\mid$ 16
36	24	8	0

34 est un double de premier

38 est un double de premier

$42 = 19 + 23$

0	4	$\mid$ 4	0	4
16	8	0	$\mid$ 0	8
0	4	16	36	$\mid$ 36
36	32	16	0	8

46 est un double de premier

$50 = 19 + 31$

4	0	$\mid$ 0	4	0	0
0	4	16	$\mid$ 16	4	0
16	12	0	8	$\mid$ 8	0
4	0	12	32	48	$\mid$ 48
64	60	40	16	0	8

$54 = 23 + 31$

0	4	$\mid$ 4	0	4	4	0
4	0	8	$\mid$ 8	0	4	0
36	24	8	0	$\mid$ 0	8	24
0	4	16	36	64	$\mid$ 64	36
36	32	20	0	16	24	$\mid$ 24

58 est un double de premier

62 est un double de premier

$66 = 37 + 29$

0	4	$\mid$ 4	0	4	4	0	4
4	0	8	$\mid$ 8	0	4	0	8
4	0	12	24	$\mid$ 24	12	0	4
36	32	16	0	8	$\mid$ 8	0	16
0	4	16	36	64	100	$\mid$ 100	64

$70 = 41 + 29$

4	0	| 0	4	0	0	4	0	0
0	4	16	| 16	4	0	4	16	16
0	4	16	36	| 36	16	4	0	4
64	48	24	8	0	| 0	8	24	48
4	0	12	32	60	80	| 80	60	32

74 est un double de premier

$78 = 37 + 41$

0	4	| 4	0	4	4	0	4	4	0
16	8	0	| 0	8	16	8	0	0	8
16	12	0	8	| 8	0	12	16	12	0
36	32	16	0	8	| 8	0	16	32	36
36	32	20	0	16	24	| 24	16	0	20
0	4	16	36	64	100	144	| 144	100	64

82 est un double de premier

86 est un double de premier

$90 = 43 + 47$

0	4	| 4	0	4	4	0	4	4	0	4
0	4	16	| 16	4	0	4	16	16	4	0
16	12	0	8	| 8	0	12	16	12	0	8
0	4	16	36	64	| 64	36	16	4	0	4
100	80	48	24	8	0	| 0	8	24	48	80
36	32	20	0	24	40	48	| 48	40	24	0

94 est un double de premier

$98 = 37 + 61$

4	0	| 0	4	0	0	4	0	0	4	0	0
16	8	0	| 0	8	16	8	0	0	8	16	8
0	4	16	36	| 36	16	4	0	4	16	36	36
16	12	0	16	24	| 24	16	0	12	16	12	0
36	32	20	0	16	24	| 24	16	0	20	32	36
100	96	72	40	16	0	8	| 8	0	16	40	72
16	12	0	20	48	84	112	120	| 120	112	84	48

Annexe 5 : Produits f(x-k,i)*f(x+k,i) pour les nombres pairs doubles de nombres pairs (x allant de 14 à 50 de 2 en 2, i allant de 1 à $\sqrt{x}$ de 1 en 1 et k allant de 1 à $x-2$ de 2 en 2)

$2de2en228 = 11 + 17$

0	4	0	| 0	4	0
0	8	16	8	0	| 0
36	16	4	0	4	16

$32 = 13 + 19$

0	4	0	|0	4	0	0
0	8	16	8	0	|0	8
24	12	0	4	0	12	24
48	32	12	0	4	0	12

$36 = 17 + 19$

4	0	4	|4	0	4	4	0
8	0	4	0	8	|8	0	4
8	0	12	16	12	0	8	|8
64	36	16	4	0	4	16	36

$40 = 17 + 23$

0	4	0	|0	4	0	0	4	0
16	4	0	4	16	|16	4	0	4
0	8	24	36	24	8	0	|0	8
48	32	12	0	4	0	12	32	48

$44 = 13 + 31$

0	4	0	|0	4	0	0	4	0	0
8	0	4	0	8	|8	0	4	0	8
0	8	24	36	24	8	0	|0	8	24
24	16	0	12	16	12	0	16	24	|24

$48 = 19 + 29$

4	0	4	|4	0	4	4	0	4	4	0
0	8	16	8	0	|0	8	16	8	0	0
8	0	12	16	12	0	8	|8	0	12	16
8	0	16	32	36	32	16	0	8	|8	0

$52 = 23 + 29$

0	4	0	|0	4	0	0	4	0	0	4	0
0	8	16	8	0	|0	8	16	8	0	0	8
24	12	0	4	0	12	24	|24	12	0	4	0
0	8	24	48	64	48	24	8	0	|0	8	24
48	40	20	0	12	16	12	0	20	40	48	|48

$56 = 19 + 37$

0	4	0	|0	4	0	0	4	0	0	4	0	0
8	0	4	0	8	|8	0	4	0	8	8	0	4
36	16	4	0	4	16	36	|36	16	4	0	4	16
0	8	24	48	64	48	24	8	0	|0	8	24	48
24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	|24	16

$60 = 29 + 31$

4	0	4	|4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0
16	4	0	4	16	|16	4	0	4	16	16	4	0	4
24	12	0	4	0	12	24	|24	12	0	4	0	12	24
8	0	16	32	36	32	16	0	8	|8	0	16	32	36
8	0	16	40	60	64	60	40	16	0	8	|8	0	16

$64 = 23 + 41$

0	4	0	|0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0
8	0	4	0	8	|8	0	4	0	8	8	0	4	0	8
8	0	12	16	12	0	8	|8	0	12	16	12	0	8	8
24	16	0	12	16	12	0	16	24	|24	16	0	12	16	12
0	8	24	48	80	100	80	48	24	8	0	|0	8	24	48

$68 \;==31+37$

0	4	0	$\mid 0$	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0
0	8	16	8	0	$\mid 0$	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0
0	8	24	36	24	8	0	$\mid 0$	8	24	36	24	8	0	0	8
48	32	12	0	4	0	12	32	48	$\mid 48$	32	12	0	4	0	12
0	8	24	48	80	100	80	48	24	8	0	$\mid 0$	8	24	48	80

72 = 31 + 41

4 0 4 | 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0
0 8 16 8 0 | 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8
0 8 24 36 24 8 0 | 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24
64 36 16 4 0 4 16 36 64 | 64 36 16 4 0 4 16 36
8 0 16 40 60 64 60 40 16 0 8 | 8 0 16 40 60 64
8 0 16 40 72 96 100 96 72 40 16 0 8 | 8 0 16 40

76 = 29 + 47

0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0
8 0 4 0 8 | 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4
8 0 12 16 12 0 8 | 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16
48 32 12 0 4 0 12 32 48 | 48 32 12 0 4 0 12 32 48
24 16 0 20 32 36 32 20 0 16 24 | 24 16 0 20 32 36 32
0 8 24 48 80 120 144 120 80 48 24 8 0 | 0 8 24 48 80

80 = 43 + 37

0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0
16 4 0 4 16 | 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4
24 12 0 4 0 12 24 | 24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 0
24 16 0 12 16 12 0 16 24 | 24 16 0 12 16 12 0 16 24 24
48 40 20 0 12 16 12 0 20 40 48 | 48 40 20 0 12 16 12 0
0 8 24 48 80 120 144 120 80 48 24 8 0 | 0 8 24 48 80 120

84 = 41 + 43

4 0 4 | 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0
8 0 4 0 8 | 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8
36 16 4 0 4 16 36 | 36 16 4 0 4 16 36 36 16 4 0 4 16
8 0 16 32 36 32 16 0 8 | 8 0 16 32 36 32 16 0 8 8 0
80 60 32 12 0 4 0 12 32 60 80 | 80 60 32 12 0 4 0 12 32
8 0 16 40 72 96 100 96 72 40 16 0 8 | 8 0 16 40 72 96 100

88 = 41 + 47

0 4 0 0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4
0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 | 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0
24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 | 24 12 0 4 0 12
0 8 24 48 64 48 24 8 0 | 0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8
100 64 36 16 4 0 4 16 36 64 100 | 100 64 36 16 4 0 4 16 36
24 16 0 24 48 60 64 60 48 24 0 16 24 | 24 16 0 24 48 60 64

92 = 31 + 61

0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0
0 8 16 8 0 | 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0
8 0 12 16 12 0 8 | 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 12 0 8
0 8 24 48 64 48 24 8 0 | 0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8 24
80 60 32 12 0 4 0 12 32 60 80 | 80 60 32 12 0 4 0 12 32 60
48 40 24 0 20 32 36 32 20 0 24 40 48 | 48 40 24 0 20 32 36 32

$96 = 43 + 53$

4	0	4	| 4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4
8	0	4	0	8	| 8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8
0	8	24	36	24	8	0	| 0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0
8	0	16	32	36	32	16	0	8	| 8	0	16	32	36	32	16	0	8	8	0	16
48	40	20	0	12	16	12	0	20	40	48	| 48	40	20	0	12	16	12	0	20	40
80	72	48	20	0	12	16	12	0	20	48	72	80	| 80	72	48	20	0	12	16	12

$100 = 47 + 53$

0	4	0	| 0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0
16	4	0	4	16	| 16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4
0	8	24	36	24	8	0	| 0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24
24	16	0	12	16	12	0	16	24	| 24	16	0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	12
24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	| 24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	24	16
120	96	60	32	12	0	4	0	12	32	60	96	120	| 120	96	60	32	12	0	4	0	12	32	60
24	16	0	24	56	84	96	100	96	84	56	24	0	16	24	| 24	16	0	24	56	84	96	100	96

Annexe 6 : Source du programme de calcul des produits pour les nombres pairs doubles de nombres impairs

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int prime(int atester)
{
  unsigned long diviseur=2;
  bool pastrouve=true;
  unsigned long k = 2;
  if (atester == 1) return 0;
  if (atester == 2) return 1;
  if (atester == 3) return 1;
  if (atester == 5) return 1;
  if (atester == 7) return 1;
  while (pastrouve)
    {
    if ((k * k) > atester) return 1;
    else
      if ((atester % k) == 0) {
        return 0 ;
      }
        else k++;
    }
}

int main (int argc, char* argv[])
{   int deuxx, x, m, i, j, k, produit, d ;
    bool premier ;
    int tab[200][200] ;

    for (x= 3; x <= 100 ; x++)
    {
        m = sqrt((float) x);
        for (i = 0 ; i <= 10 ; i++)
            for (j=0 ; j <= 2*i+1 ; j++)
                if (((x % (4*i+2)) == j) ||
                    ((x % (4*i+2)) == (4*i+2-j)))
                    tab[x][i] = 2*i+1-j ;
    }
    std::cout << "\n" ;
    for (x = 13 ; x <= 50 ; x=x+2)
    {
        m = (int) sqrt((float) x);
        if (prime(x)) std::cout << "\n" << 2*x << " est un double de premier\n" ;
        else
        {
            std::cout << "\n" << x << ":\n" ;
            for (i = 1 ; i <= m ; i++)
            {
                j = 2*i+1 ;
                for (k = 0 ; k < (x-1)/2 ; k=k+2)
                    printf("%4d",tab[x-k][i] * tab[x+k][i]) ;
                std::cout << "\n" ;}}}}
```

Annexe 7 : Source du programme de calcul des produits pour les nombres pairs doubles de nombres pairs

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int prime(int atester)
{
  unsigned long diviseur=2;
  bool pastrouve=true;
  unsigned long k = 2;
  if (atester == 1) return 0;
  if (atester == 2) return 1;
  if (atester == 3) return 1;
  if (atester == 5) return 1;
  if (atester == 7) return 1;
  while (pastrouve)
    {
    if ((k * k) > atester) return 1;
    else
      if ((atester % k) == 0) {
        return 0 ;
      }
        else k++;
    }
}

int main (int argc, char* argv[])
{   int deuxx, x, m, i, j, k, produit, d ;
    bool premier ;
    int tab[200][200] ;

    for (x= 3; x <= 100 ; x++)
    {
        m = sqrt((float) x);
        for (i = 0 ; i <= 10 ; i++)
            for (j=0 ; j <= 2*i+1 ; j++)
                if (((x % (4*i+2)) == j) ||
                    ((x % (4*i+2)) == (4*i+2-j)))
                    tab[x][i] = 2*i+1-j ;
    }
    std::cout << "\n" ;
    for (x = 14 ; x <= 50 ; x=x+2)
    {
        m = (int) sqrt((float) x);
        if (prime(x)) std::cout << "\n" << 2*x << " est un double de premier\n" ;
        else
        {
            std::cout << "\n" << x << ":\n" ;
            for (i = 1 ; i <= m ; i++)
            {
                j = 2*i+1 ;
                for (k = 1 ; k < 2*((x/2)-1) ; k=k+2)
                    printf("%4d",tab[x-k][i] * tab[x+k][i]) ;
                std::cout << "\n" ;
            }
        }
    }
}
```