La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair sauf 2 est la somme de deux nombres premiers. Dans la suite, on s'intéresse aux décompositions d'un nombre pair n en somme de deux nombres impairs $p + q$ avec $3 \leqslant p \leqslant n/2$ et $n/2 \leqslant q \leqslant n - 3$.

On note :

- $X_a(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *premier* ;
- $X_b(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *premier* ;
- $X_c(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *composé* ;
- $X_d(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *composé*.

Exemples :

- $n = 32$:
  $X_a(32) = \#\{3 + 29, 13 + 19\} = 2$.
  $X_b(32) = \#\{9 + 23, 15 + 17\} = 2$.
  $X_c(32) = \#\{5 + 27, 7 + 25, 11 + 21\} = 3$.
  $X_d(32) = \#\varnothing=0$.
- $n = 34$:
  $X_a(34) = \#\{3 + 31, 5 + 29, 11 + 23, 17 + 17\} = 4$.
  $X_b(34) = \#\{15 + 19\} = 1$.
  $X_c(34) = \#\{7 + 27, 13 + 21\} = 2$
  $X_d(34) = \#\{9 + 25\} = 1$.

D'autre part, on note $T_a(n)$ le nombre de décompositions de la forme 3+*premier* avec $3 \leqslant p \leqslant 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1$.

Exemples : $T_a(32) = T_a(34) = \#\{3 + 3, 3 + 5, 3 + 7, 3 + 11, 3 + 13\} = 5$.

On note $T_c(n)$ le nombre de décompositions de la forme 3 + *composé* avec $3 \leqslant c \leqslant 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1$.

Exemples : $T_c(32) = T_c(34) = \#\{3 + 9, 3 + 15\} = 2$.

On note $Y_a(n)$ le nombre de décompositions de la forme 3 + *premier* avec $2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1 < p \leqslant n - 3$.

Exemples :

- $Y_a(32) = \#\{3 + 17, 3 + 19, 3 + 23, 3 + 29\} = 4$;
- $Y_a(34) = \#\{3 + 17, 3 + 19, 3 + 23, 3 + 29, 3 + 31\} = 5$.

On note Y_c le nombre de décompositions de la forme 3 + *composé* avec $2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1 < c \leqslant n - 3$.

Exemples : $Y_c(32) = Y_c(34) = \#\{3 + 21, 3 + 25, 3 + 27\} = 3$.

Pour tout entier pair n, les contraintes suivantes sont vérifiées :

$$(1) Y_a = X_a + X_b$$
$$(2) Y_c = X_c + X_d$$
$$(3) T_a + T_c + Y_a + Y_c + \epsilon = 2(X_a + X_b + X_c + X_d)$$

ϵ vaut 1 si n est un double d'impair et 0 sinon.

L'égalité $(1) Y_a = X_a + X_b$ découle du fait que l'on a une bijection sur le second sommant des décompositions comptées par Y_a d'une part et comptées par X_a et X_b d'autre part.

Identiquement, $(2) Y_c = X_c + X_d$ découle du fait que l'on a une bijection sur le second sommant des décompositions comptées par Y_c d'une part et comptées par X_c et X_d d'autre part.

$(3) T_a + T_c + Y_a + Y_c + \epsilon = 2(X_a + X_b + X_c + X_d)$ correspond à la manipulation suivante : on prend les décompositions de n et on obtient à partir d'elle deux décompositions pour chacune, en remplaçant soit le premier, soit le second sommant par 3.

Prenons comme hypothèse qu'un nombre n n'admet aucune décomposition de Goldbach. Puisque $X_a(n)$ compte les décompositions de n sous la forme d'une somme de deux nombres premiers, poser cette hypothèse s'écrit $X_a(n) = 0$.

On a alors $T_a + T_c + \epsilon = X_b + Y_c$.

On a $T_a + T_c = \left\lfloor \dfrac{n-4}{4} \right\rfloor$.

On a $X_b < Y_a$: il y a forcément moins de décompositions de n de la forme $compos\acute{e} + premier$ (comptés par X_b) que de nombres premiers compris entre $n/2$ et $n-3$ (comptés par Y_a) (on utilise ici une sorte de "principe des tiroirs inversé" : si l'on met 0 ou 1 objet dans k tiroirs, on ne peut avoir plus d'objets que de tiroirs, i.e. plus de k objets).

On a, pour $k > 25$, moins de premiers que de composés impairs dans l'intervalle $[2k+3, 4k+1]$. Ceci s'écrit avec nos variables $\forall k > 25, Y_a(k) < Y_c(k)$. Pour notre nombre n très grand, censé ne pas vérifier la conjecture de Goldbach, on déduit $Y_a < Y_c$ et $X_b + Y_c < Y_a + Y_c < 2Y_c$.

Or $\left\lfloor \dfrac{n-4}{4} \right\rfloor$ est pour tout entier supérieur à un certain entier assez petit (tel que 100) supérieur à $2Y_c$. Cela assure qu'on a jamais l'égalité $T_a + T_c + \epsilon = X_b + Y_c$ qui découlerait de l'absence de décompositions de Goldbach d'un certain nombre pair.

Il est donc impossible qu'un nombre pair contredise la conjecture de Goldbach. On a utilisé pour le démontrer un simple *"langage à 4 lettres"*.