Nombres de résidus cubiques, biquadratiques, quintiques et sixtiques des nombres premiers ou composés

Denise Vella-Chemla

3.9.2016

On souhaite fournir ici les constats résultant de l'étude du nombre de résidus cubiques, biquadratiques (pour puissances $4^{ème}$), quintiques (pour puissances $5^{ème}$) et sixtiques (pour puissances $6^{ème}$) non nuls des entiers inférieurs à 100. On rappelle qu'on ne compte que les résidus non-nuls des puissances des nombres de 1 à $n-1$ modulo n, i.e. le reste obtenu lorsqu'on divise ces puissances par n.

On note $R_3(n)$ le nombre de résidus cubiques non nuls de n, $R_4(n)$ le nombre de résidus biquadratiques non nuls de n, $R_5(n)$ le nombre de résidus quintiques non nuls de n et $R_6(n)$ le nombre de résidus sixtiques non nuls de n.

Concernant les résidus cubiques, il semblerait que :

- Si n est un nombre de la forme $3k+1$:
  - si $R_3(n)$ est égal à $(n-1)/3$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_3(n)$ est supérieur à $(n-1)/3$ alors n est un nombre composé ;
- Si n est un nombre de la forme $3k+2$ (avec une exception pour 17) :
  - si $R_3(n)$ est égal à $n-1$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_3(n)$ est inférieur à $n-1$ alors n est un nombre composé.

Cette hypothèse est infirmée par programme : 935 est un nombre composé et son nombre de résidus cubiques est 934. Les hypothèses ci-dessous seraient vraisemblablement infirmées également, on ne les teste pas.

On essaie cependant d'obtenir un tout petit élément de compréhension en cherchant une régularité derrière ces nombres composés n qui ont pile $n-1$ résidus cubiques : on factorise les 8 plus grands nombres pour lesquels ceci s'est produit pour "voir la tête de leur factorisation" et on est surpris de constater la chose suivante :

$9095 = 5.17.107$, $9185 = 5.11.167$, $9515 = 5.11.173$, $9545 = 5.23.83$, $9605 = 5.17.113$, $9635 = 5.41.47$, $9845 = 5.11.179$, $9911 = 11.17.53$ et il y avait le cas auquel on s'est intéressé le premier $935 = 5.11.17$.

Tous ces nombres sont produits de 3 nombres premiers tout trois de la forme $6k-1$.

Concernant les résidus biquadratiques (résidus des puissances $4^{èmes}$), il semblerait que :

- Si n est un nombre de la forme $4k+3$:
  - si $R_4(n)$ est égal à $(n-1)/2$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_4(n)$ est inférieur à $(n-1)/2$ alors n est un nombre composé ;
- Si n est un nombre de la forme $4k+1$:
  - si $R_4(n)$ est égal à $(n-1)/4$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_4(n)$ est supérieur à $(n-1)/4$ alors n est un nombre composé.

63% des nombres de 1 à 100 ont un résidu biquadratique qui est un nombre premier, ça semble une proportion extraordinaire.

Concernant les résidus quintiques (résidus des puissances $5^{\text{è}mes}$), il semblerait que :

- Si n est un nombre de la forme $5k+1$:
  - si $R_5(n)$ est égal à $(n-1)/5$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_5(n)$ est supérieur à $(n-1)/5$ alors n est un nombre composé ;
- Si n est un nombre de la forme $5k+2$:
  - si $R_5(n)$ est égal à $n-1$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_5(n)$ est inférieur à $n-1$ alors n est un nombre composé ;
- Si n est un nombre de la forme $5k+3$:
  - si $R_5(n)$ est égal à $n-1$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_5(n)$ est inférieur à $n-1$ alors n est un nombre composé ;
- Si n est un nombre de la forme $5k+4$:
  - si $R_5(n)$ est égal à $n-1$ alors n est un nombre premier ;
  - si $R_5(n)$ est inférieur à $n-1$ alors n est un nombre composé.

Concernant les résidus sixtiques (résidus des puissances $6^{\text{è}mes}$), on ne constate rien de bien probant, vraisemblablement parce que 6 est composé :

- Si n est un nombre de la forme $6k+1$:
  - on souhaiterait que si $R_6(n)$ est égal à $(n-1)/6$ alors n soit un nombre premier mais ce souhait est mis en défaut par 43, 61 ou 67.
- Si n est un nombre de la forme $6k-1$:
  - on souhaiterait que si $R_6(n)$ est égal à $(n-1)/2$ alors n soit un nombre premier mais ce souhait est mis en défaut par 47.

Annexe 1 : Nombre de résidus cubiques non nuls des nombres de 1 à 100

Ici, ce qui est surprenant, c'est le fait que les images soient quasiment la suite des entiers décalée de 1 par rapport à la suite des antécédents (on met des étoiles entre parenthèses pour le montrer et les nombres premiers apparaissent en bleu).

1 → 0 (∗)	21 → 8	41 → 40 (∗)	61 → 20	81 → 20
2 → 1 (∗)	22 → 21 (∗)	42 → 17	62 → 21	82 → 81 (∗)
3 → 2 (∗)	23 → 22 (∗)	43 → 14	63 → 8	83 → 82 (∗)
4 → 2	24 → 14	44 → 32	64 → 36	84 → 26
5 → 4 (∗)	25 → 20	45 → 14	65 → 24	85 → 84 (∗)
6 → 5 (∗)	26 → 9	46 → 45 (∗)	66 → 65 (∗)	86 → 29
7 → 2	27 → 6	47 → 46 (∗)	67 → 22	87 → 86 (∗)
8 → 4	28 → 8	48 → 29	68 → 50	88 → 54
9 → 2	29 → 28 (∗)	49 → 14	69 → 68 (∗)	89 → 88 (∗)
10 → 9 (∗)	30 → 29 (∗)	50 → 41	70 → 29	90 → 29
11 → 10 (∗)	31 → 10	51 → 50 (∗)	71 → 70 (∗)	91 → 14
12 → 8	32 → 18	52 → 14	72 → 14	92 → 68
13 → 4	33 → 32 (∗)	53 → 52 (∗)	73 → 24	93 → 32
14 → 5	34 → 33 (∗)	54 → 13	74 → 25	94 → 93 (∗)
15 → 14 (∗)	35 → 14	55 → 54 (∗)	75 → 62	95 → 34
16 → 9	36 → 8	56 → 14	76 → 20	96 → 56
17 → 16	37 → 12	57 → 20	77 → 32	97 → 32
18 → 5	38 → 13	58 → 57 (∗)	78 → 29	98 → 29
19 → 6	39 → 14	59 → 58 (∗)	79 → 26	99 → 32
20 → 14	40 → 24	60 → 44	80 → 49	100 → 62

Annexe 2 : Nombre de résidus biquadratiques non nuls des nombres de 1 à 100

On met entre parenthèses le nombre de résidus quadratiques quand il est différent du résidu biquadratique pour montrer les ressemblances, les puissances quatrièmes étant des carrés particuliers.

$1 \to 0$	$21 \to 7$	$41 \to 10\ (20)$	$61 \to 15\ (30)$	$81 \to 27\ (30)$
$2 \to 1$	$22 \to 11$	$42 \to 15$	$62 \to 31$	$82 \to 21\ (41)$
$3 \to 1$	$23 \to 11$	$43 \to 21$	$63 \to 15$	$83 \to 41$
$4 \to 1$	$24 \to 3\ (5)$	$44 \to 11$	$64 \to 5\ (11)$	$84 \to 15$
$5 \to 1\ (2)$	$25 \to 5\ (10)$	$45 \to 7\ (11)$	$65 \to 7\ (20)$	$85 \to 9\ (26)$
$6 \to 3$	$26 \to 7\ (13)$	$46 \to 23$	$66 \to 23$	$86 \to 43$
$7 \to 3$	$27 \to 9\ (10)$	$47 \to 23$	$67 \to 33$	$87 \to 15\ (29)$
$8 \to 1\ (2)$	$28 \to 7$	$48 \to 3\ (7)$	$68 \to 9\ (17)$	$88 \to 11\ (17)$
$9 \to 3$	$29 \to 7\ (14)$	$49 \to 21$	$69 \to 23$	$89 \to 22\ (44)$
$10 \to 3\ (5)$	$30 \to 7\ (11)$	$50 \to 11\ (21)$	$70 \to 15\ (23)$	$90 \to 15\ (23)$
$11 \to 5$	$31 \to 15$	$51 \to 9\ (17)$	$71 \to 35$	$91 \to 15\ (27)$
$12 \to 3$	$32 \to 3\ (6)$	$52 \to 7\ (13)$	$72 \to 7\ (11)$	$92 \to 23$
$13 \to 3\ (6)$	$33 \to 11$	$53 \to 13\ (26)$	$73 \to 18\ (36)$	$93 \to 31$
$14 \to 7$	$34 \to 9\ (17)$	$54 \to 19\ (21)$	$74 \to 19\ (37)$	$94 \to 47$
$15 \to 3\ (5)$	$35 \to 7\ (11)$	$55 \to 11\ (17)$	$75 \to 11\ (21)$	$95 \to 19\ (29)$
$16 \to 1\ (3)$	$36 \to 7$	$56 \to 7\ (11)$	$76 \to 19$	$96 \to 7\ (13)$
$17 \to 4\ (8)$	$37 \to 9\ (18)$	$57 \to 19$	$77 \to 23$	$97 \to 24\ (48)$
$18 \to 7$	$38 \to 19$	$58 \to 15\ (29)$	$78 \to 15\ (27)$	$98 \to 43$
$19 \to 9$	$39 \to 7\ (13)$	$59 \to 29$	$79 \to 39$	$99 \to 23$
$20 \to 3\ (5)$	$40 \to 3\ (8)$	$60 \to 7\ (11)$	$80 \to 3\ (11)$	$100 \to 11\ (21)$

Annexe 3 : Nombre de résidus quintiques non nuls des nombres de 1 à 100

Ici, ce qui est surprenant, c'est à nouveau le fait que les images soient, au début tout du moins, quasiment la suite des entiers décalée de 1 par rapport à la suite des antécédents (on met des étoiles entre parenthèses pour le montrer) mais ça cesse rapidement.

$1 \to 0\ (*)$	$21 \to 20\ (*)$	$41 \to 8$	$61 \to 12$	$81 \to 50$
$2 \to 1\ (*)$	$22 \to 5$	$42 \to 41\ (*)$	$62 \to 13$	$82 \to 18$
$3 \to 2\ (*)$	$23 \to 22\ (*)$	$43 \to 42\ (*)$	$63 \to 48$	$83 \to 73$
$4 \to 2$	$24 \to 14$	$44 \to 8$	$64 \to 33$	$84 \to 58$
$5 \to 4\ (*)$	$25 \to 4$	$45 \to 34$	$65 \to 64\ (*)$	$85 \to 73$
$6 \to 5\ (*)$	$26 \to 25\ (*)$	$46 \to 45\ (*)$	$66 \to 17$	$86 \to 74$
$7 \to 6\ (*)$	$27 \to 18$	$47 \to 46\ (*)$	$67 \to 66\ (*)$	$87 \to 74$
$8 \to 4$	$28 \to 20$	$48 \to 26$	$68 \to 50$	$88 \to 16$
$9 \to 6$	$29 \to 28\ (*)$	$49 \to 42$	$69 \to 68\ (*)$	$89 \to 77$
$10 \to 9\ (*)$	$30 \to 29\ (*)$	$50 \to 9$	$70 \to 69\ (*)$	$90 \to 59$
$11 \to 2$	$31 \to 6$	$51 \to 50\ (*)$	$71 \to 14$	$91 \to 76$
$12 \to 8$	$32 \to 16$	$52 \to 38$	$72 \to 34$	$92 \to 60$
$13 \to 12\ (*)$	$33 \to 8$	$53 \to 52\ (*)$	$73 \to 72\ (*)$	$93 \to 22$
$14 \to 13\ (*)$	$34 \to 33\ (*)$	$54 \to 37$	$74 \to 73\ (*)$	$94 \to 75$
$15 \to 14\ (*)$	$35 \to 34\ (*)$	$55 \to 14$	$75 \to 14$	$95 \to 78$
$16 \to 8$	$36 \to 20$	$56 \to 34$	$76 \to 55$	$96 \to 40$
$17 \to 16\ (*)$	$37 \to 36\ (*)$	$57 \to 56\ (*)$	$77 \to 21$	$97 \to 74$
$18 \to 13$	$38 \to 37\ (*)$	$58 \to 57\ (*)$	$78 \to 74$	$98 \to 68$
$19 \to 18\ (*)$	$39 \to 38\ (*)$	$59 \to 58\ (*)$	$79 \to 73$	$99 \to 25$
$20 \to 14$	$40 \to 24$	$60 \to 44$	$80 \to 42$	$100 \to 21$

Annexe 4 : Nombre de résidus sixtiques non nuls des nombres de 1 à 100

1 $\rightarrow$ 0	21 $\rightarrow$ 3	41 $\rightarrow$ 20	61 $\rightarrow$ 19	81 $\rightarrow$ 30
2 $\rightarrow$ 1	22 $\rightarrow$ 11	42 $\rightarrow$ 8	62 $\rightarrow$ 16	82 $\rightarrow$ 43
3 $\rightarrow$ 1	23 $\rightarrow$ 11	43 $\rightarrow$ 9	63 $\rightarrow$ 11	83 $\rightarrow$ 44
4 $\rightarrow$ 1	24 $\rightarrow$ 3	44 $\rightarrow$ 15	64 $\rightarrow$ 9	84 $\rightarrow$ 22
5 $\rightarrow$ 2	25 $\rightarrow$ 10	45 $\rightarrow$ 9	65 $\rightarrow$ 17	85 $\rightarrow$ 40
6 $\rightarrow$ 3	26 $\rightarrow$ 5	46 $\rightarrow$ 24	66 $\rightarrow$ 32	86 $\rightarrow$ 34
7 $\rightarrow$ 1	27 $\rightarrow$ 3	47 $\rightarrow$ 26	67 $\rightarrow$ 20	87 $\rightarrow$ 43
8 $\rightarrow$ 1	28 $\rightarrow$ 3	48 $\rightarrow$ 6	68 $\rightarrow$ 25	88 $\rightarrow$ 20
9 $\rightarrow$ 1	29 $\rightarrow$ 14	49 $\rightarrow$ 11	69 $\rightarrow$ 31	89 $\rightarrow$ 52
10 $\rightarrow$ 5	30 $\rightarrow$ 11	50 $\rightarrow$ 26	70 $\rightarrow$ 23	90 $\rightarrow$ 33
11 $\rightarrow$ 5	31 $\rightarrow$ 5	51 $\rightarrow$ 21	71 $\rightarrow$ 44	91 $\rightarrow$ 30
12 $\rightarrow$ 3	32 $\rightarrow$ 4	52 $\rightarrow$ 12	72 $\rightarrow$ 12	92 $\rightarrow$ 32
13 $\rightarrow$ 2	33 $\rightarrow$ 11	53 $\rightarrow$ 28	73 $\rightarrow$ 22	93 $\rightarrow$ 30
14 $\rightarrow$ 3	34 $\rightarrow$ 17	54 $\rightarrow$ 15	74 $\rightarrow$ 27	94 $\rightarrow$ 51
15 $\rightarrow$ 5	35 $\rightarrow$ 5	55 $\rightarrow$ 23	75 $\rightarrow$ 35	95 $\rightarrow$ 32
16 $\rightarrow$ 2	36 $\rightarrow$ 3	56 $\rightarrow$ 9	76 $\rightarrow$ 18	96 $\rightarrow$ 14
17 $\rightarrow$ 8	37 $\rightarrow$ 7	57 $\rightarrow$ 14	77 $\rightarrow$ 26	97 $\rightarrow$ 40
18 $\rightarrow$ 3	38 $\rightarrow$ 8	58 $\rightarrow$ 34	78 $\rightarrow$ 26	98 $\rightarrow$ 39
19 $\rightarrow$ 3	39 $\rightarrow$ 5	59 $\rightarrow$ 35	79 $\rightarrow$ 27	99 $\rightarrow$ 38
20 $\rightarrow$ 5	40 $\rightarrow$ 7	60 $\rightarrow$ 19	80 $\rightarrow$ 15	100 $\rightarrow$ 37