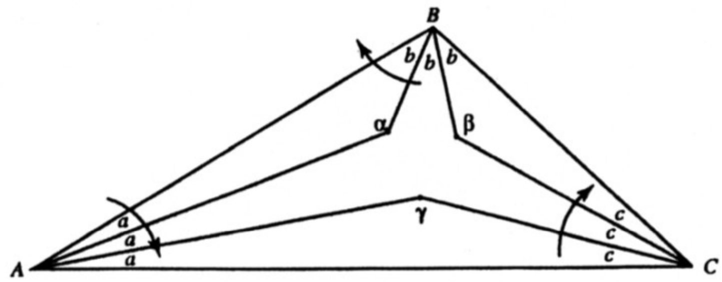
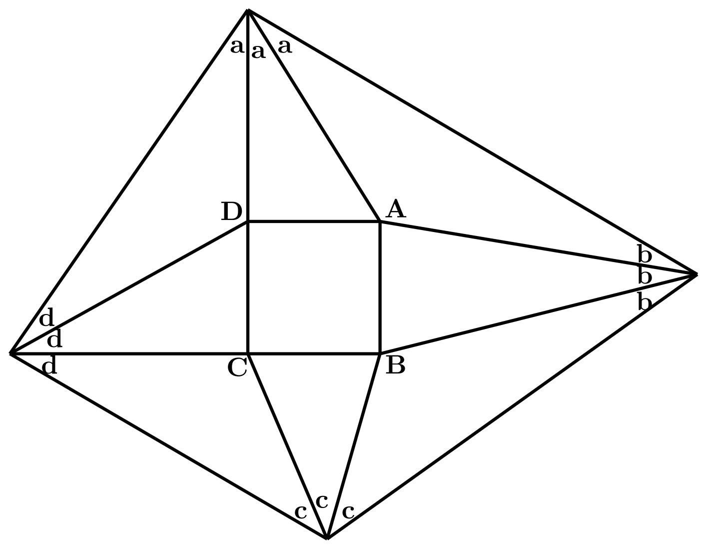
Quadrilatère quelconque, carré *(Denise Vella-Chemla, 23.6.2016)*

On aimerait considérer la droite du plan complexe contenant les points de partie réelle 1/2 comme l'axe vertical de symétrie du carré unité (de sommets $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$). Le carré est attirant car il peut être considéré comme support du groupe diédral D_4. Le groupe D_4 quant à lui semble intéressant parce qu'il contient des opérations telles que l'échange de coordonnées ou bien le changement d'orientation et que ces opérations nous ont été très utiles dans un autre contexte. D'autre part, un théorème surprenant énonce que tout entier naturel peut être décomposé en somme de 4 carrés. Enfin, on a vu l'utilisation du beau théorème de Morley pour "symétriser" le triangle et on se demande si un théorème similaire ne permettrait pas de symétriser un quadrilatère quelconque.

On emprunte ce dessin au texte de la $181^{ème}$ conférence donnée par Alain Connes le 29 juin 2000 dans le cadre de l'Université de tous les savoirs et intitulée *Géométrie non commutative.* Il illustre le théorème de Morley selon lequel certains points d'intersection des droites qui trisectent les angles d'un triangle quelconque sont les sommets d'un triangle équilatéral.



Imaginons un dessin similaire liant un quadrilatère quelconque et sa symétrisation en un petit carré.



La symétrisation d'un quadrilatère quelconque, dont les longueurs des côtés seraient les 4 carrés α^2, β^2, γ^2 et λ^2 de la décomposition de $n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \lambda^2$ en somme de 4 carrés permettrait peut-être de mettre au jour un morphisme qui associerait à chaque entier les 4 rotations utilisées aux 4 coins du quadrilatère quelconque.

On peut rêver.

En fait, deux petites animations gif trouvées sur la toile montre que les trissectrices des angles à l'oeuvre dans le théorème de Morley peuvent être vues comme provenant du dédoublement-éloignement des bissectrices desdits angles. A la recherche de la symétrisation du quadrilatère quelconque en utilisant les bissectrices, on trouve sur le site de Patrice Debart ici

$$http://debart.pagesperso-orange.fr/college/quadrilatere\_college.htmlch8$$

que les intersections des bissectrices intérieures d'un quadrilatère forment un quadrilatère inscriptible. On peut alors par exemple considérer un carré inscrit dans le cercle d'inscription du petit quadrilatère et qui partage un sommet avec lui comme carré symétrisant possible.