Droites d'émission ou droites d'absorption (Denise Vella-Chemla, 18.7.2024)

On cherche à démontrer que tout nombre pair n supérieur à 4 admet un décomposant de Goldbach, i.e. un nombre premier x dont le complémentaire à n, $n-x$, est premier également.

Pour comprendre la raison qui fait, pour le dire simplement, "qu'on a toujours un non nul en face d'un non nul", on va ici décomposer le problème en un ensemble de problèmes plus simples [1]., selon chacun des dénominateurs intervenant dans la formule de la fonction h_n (n désignant un nombre pair dont on cherche s'il admet une décomposition de Goldbach) :

$$\begin{array}{rccl} h_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\prod_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0\leq x\leq n \\ k\in\mathbb{N} \\ 2\leq k\leq\lfloor\sqrt{n}\rfloor}} \left(\cos\left(\frac{n\,\pi}{k}\right)-\cos\left(\frac{(n-2x)\pi}{k}\right)\right) \end{array}$$

On utilise le programme python ci-dessous :

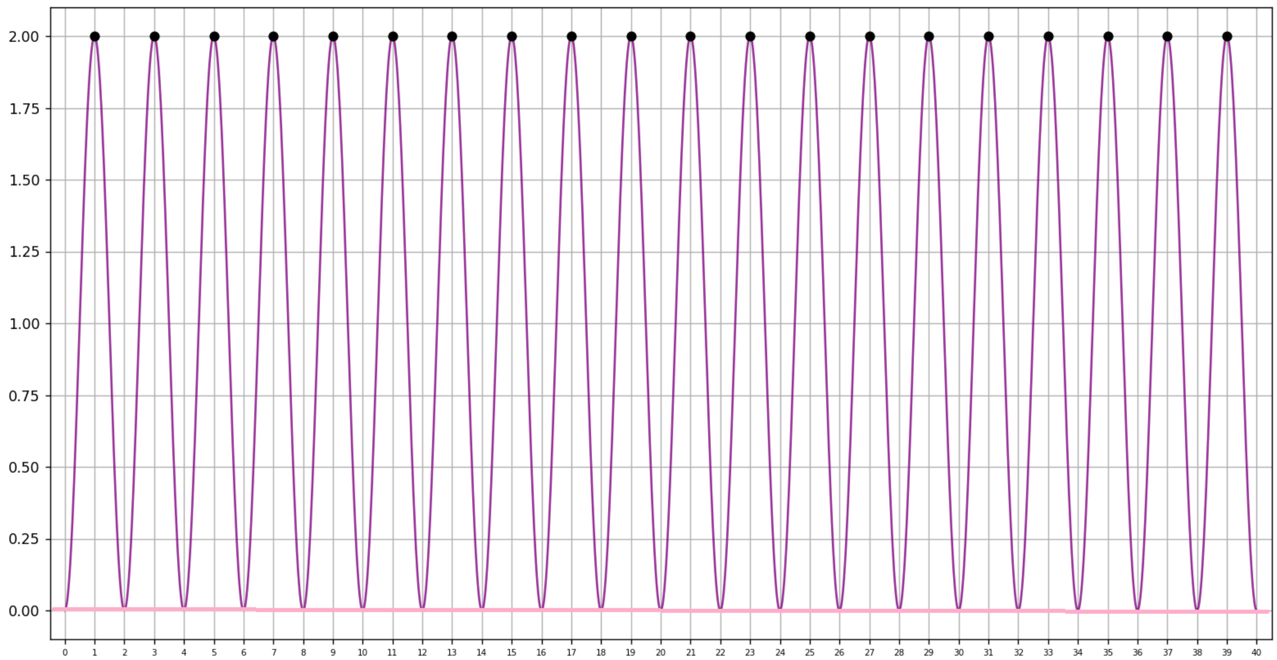
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from math import floor, sqrt, sin, cos

pi, i, exp = np.pi, 1j, np.exp
epsilon = 1e-6
for n in range(40, 42, 2):
      print(n,' ---->')
      d = 2
      x = np.linspace(0, n, num=n*10**d+1, endpoint=True)
      xl, xr = -0.5, n+0.5
      w = []
      for k in range(len(x)):
            produit = 1
            #for p in range(2, int(floor(sqrt(n))) + 1):    *****
            for p in [13]:
                  produit = produit*(cos(n*pi/p)-cos(pi*(n-2*x[k])/p))
            w += [produit]
      plt.figure(figsize=(20, 8))
      plt.plot(x, w, alpha=0.8, color='purple')
      for k in range(len(x)):
            if (abs(x[k]%2 - 1) < epsilon) and (abs(w[k]) > epsilon):
                  plt.plot(x[k], w[k], color='black', marker='o')
                  print(x[k],' ', w[k])
      plt.xlim(xl, xr)
      plt.xticks(range(0,n+1), fontsize=6)
      plt.grid(True)
plt.show()
```

Ce qui nous intéresse, c'est d'étudier le comportement de chacune des courbes qui intervient dans le produit global. On va modifier la ligne du programme marquée de cinq étoiles de façon à ce

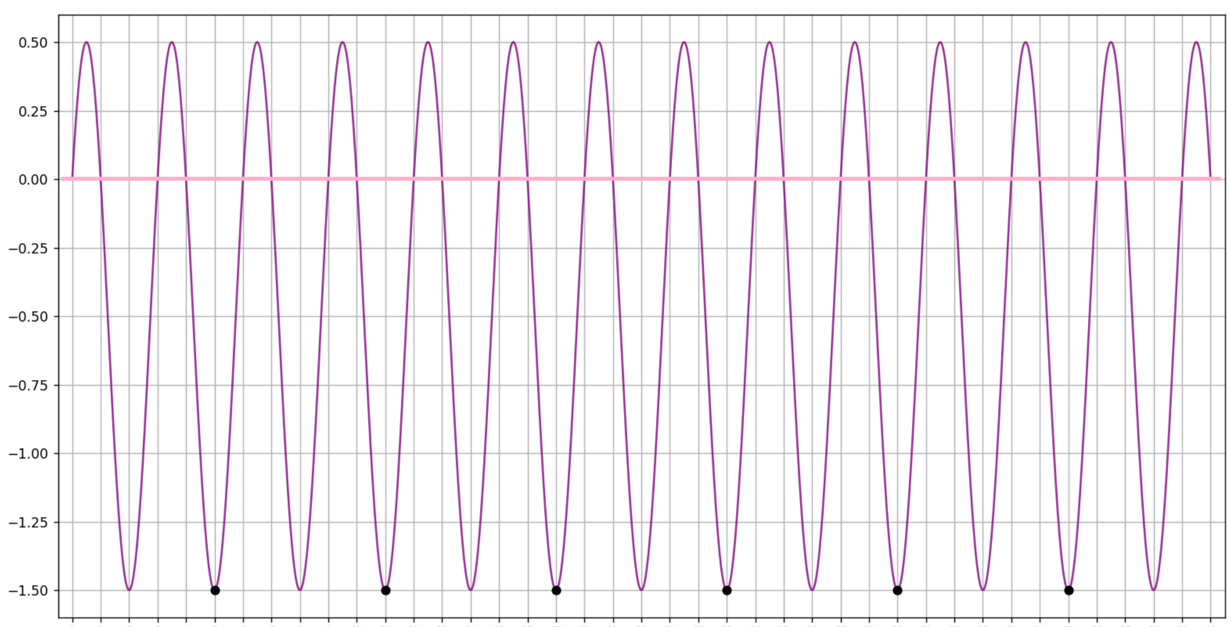
[1] selon la méthode préconisée par Pólya.

qu'elle dessine les courbes une par une [2]. Voici la courbe obtenue si on ne considère que le cas où $p = 2$.



La valeur en 2 étant nulle, d'autres valeurs nulles vont advenir pour tous les nombres impairs sur la ligne de couleur rose.

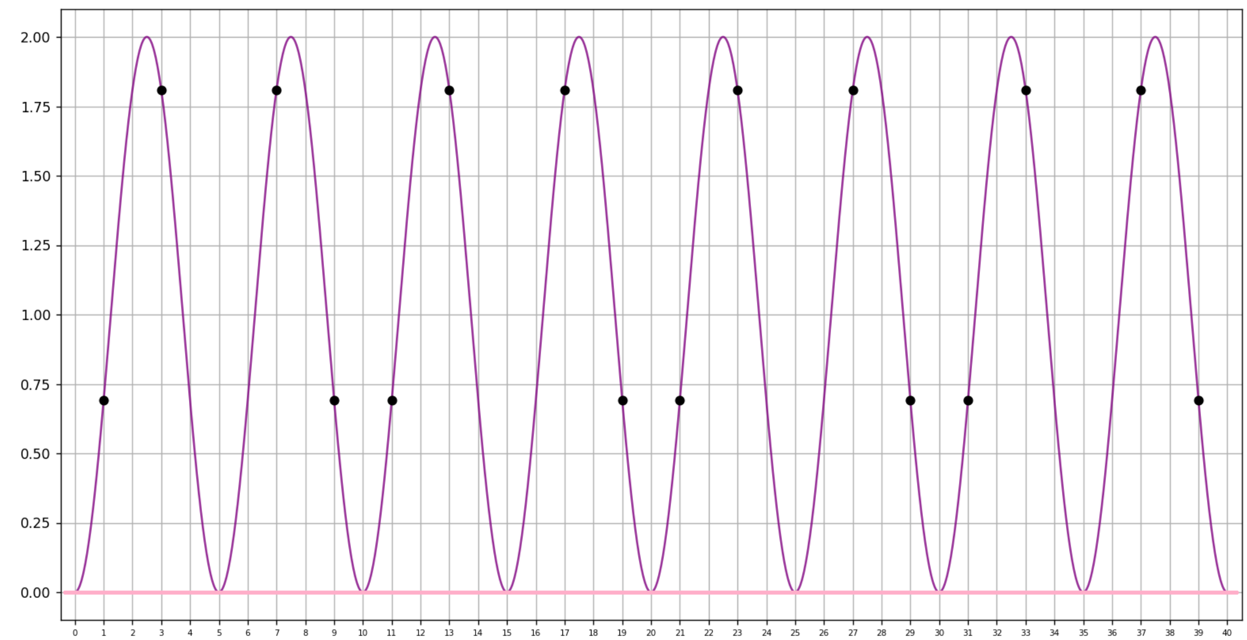
Voyons la courbe pour le cas où $p = 3$.



[2] La ligne `for p in [13]:` du programme permet d'obtenir le dessin de la courbe de la fonction calculant la différence de cosinus avec le nombre 13 utilisé comme dénominateur dans les arguments des cosinus.

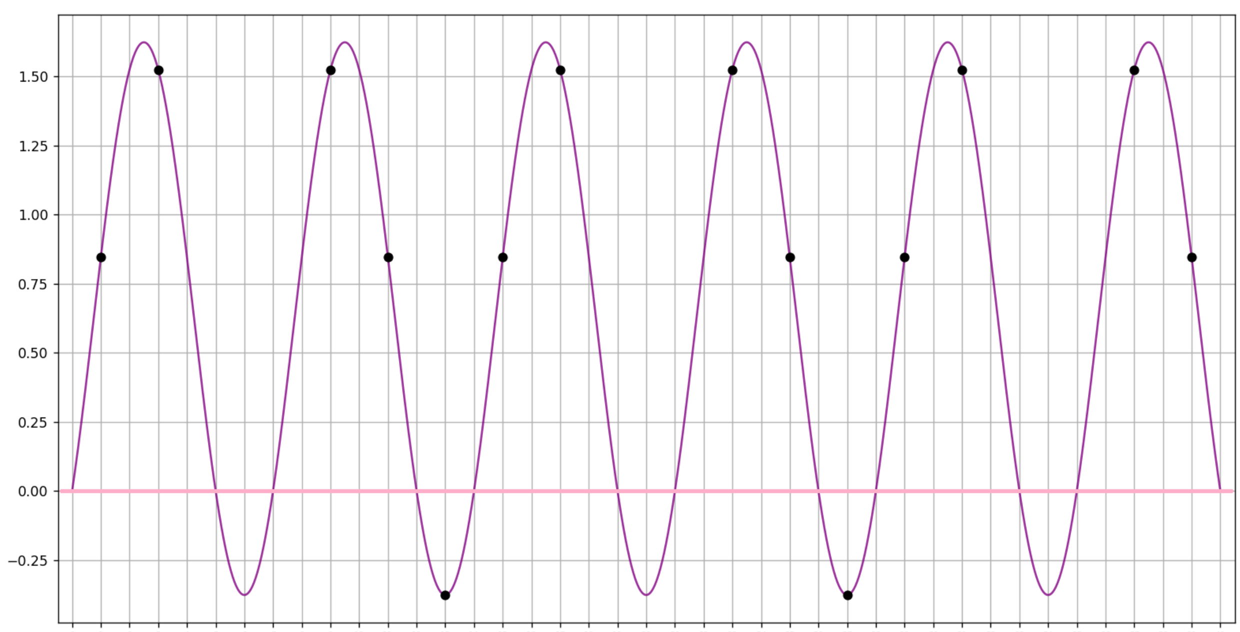
La valeur en 3 étant nulle, d'autres valeurs nulles vont advenir pour tous les nombres impairs sur la ligne de couleur rose.

Voyons la courbe pour le cas où $p = 5$.



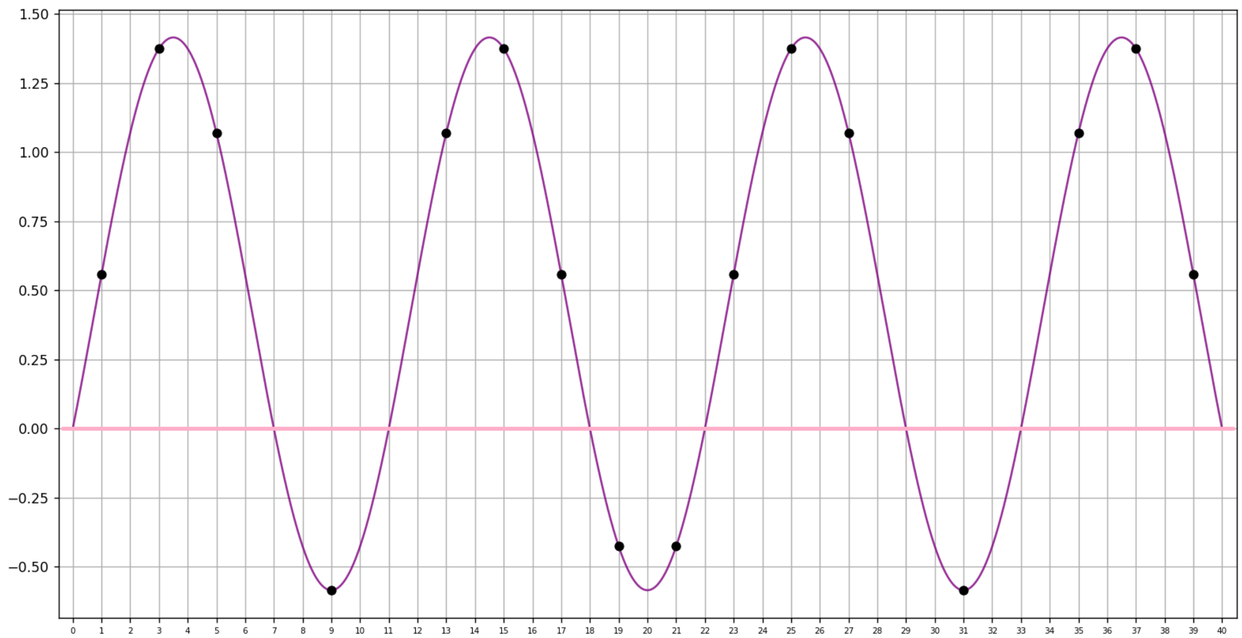
La valeur en 5 étant nulle, d'autres valeurs nulles vont advenir pour tous les nombres impairs sur la ligne de couleur rose.

Voyons la courbe pour le cas où $p = 7$.



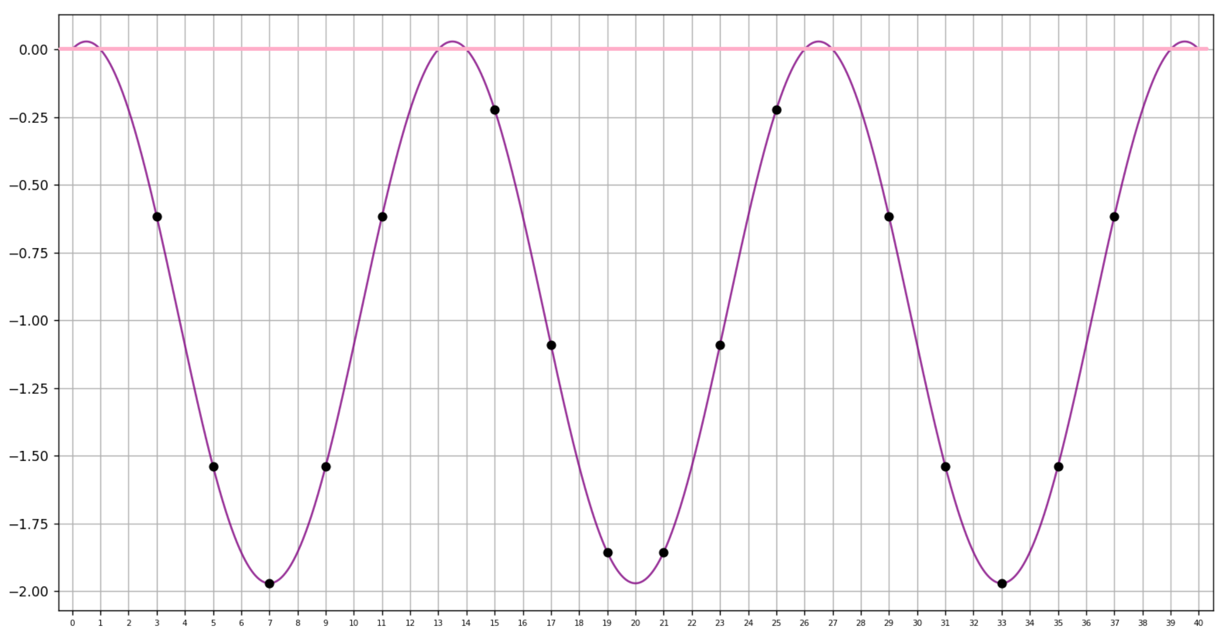
La valeur en 7 étant nulle, d'autres valeurs nulles vont advenir pour tous les nombres impairs sur la ligne de couleur rose.

Voyons la courbe pour le cas où $p = 11$.



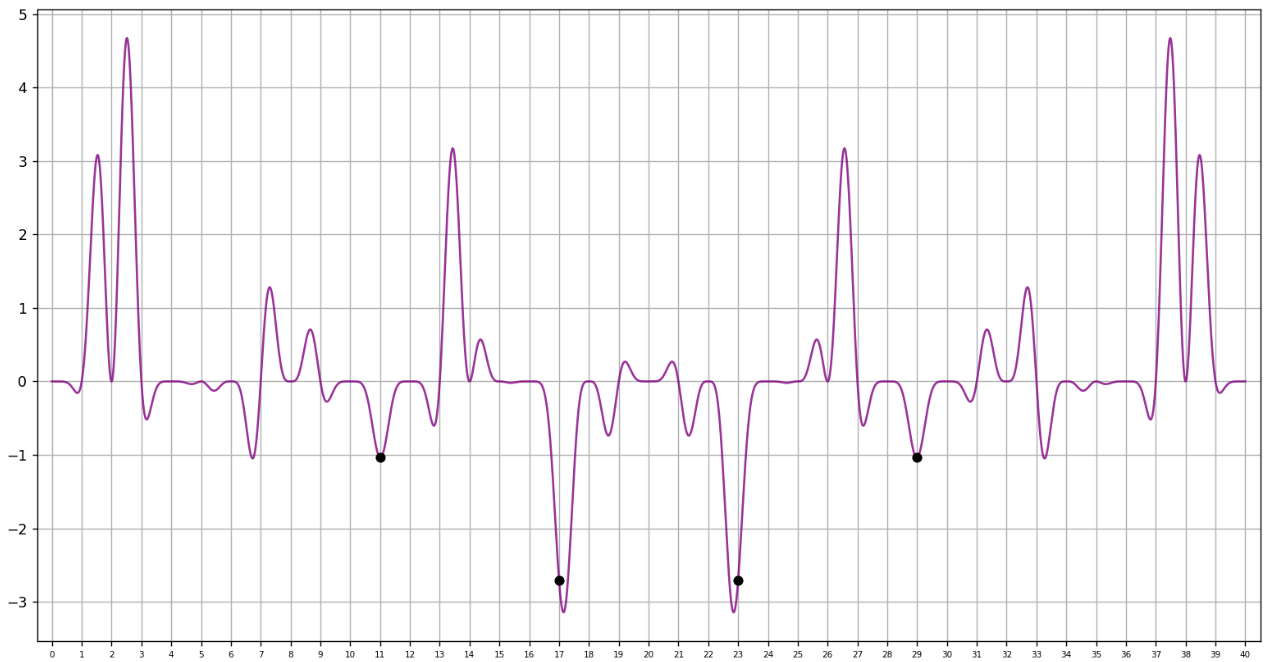
La valeur en 11 étant nulle, d'autres valeurs nulles vont advenir pour tous les nombres impairs sur la ligne de couleur rose.

Voyons la courbe pour le cas où $p = 13$.



La valeur en 13 étant nulle, d'autres valeurs nulles vont advenir pour tous les nombres impairs sur la ligne de couleur rose.

Voyons maintenant le produit global de toutes les images par ces différentes fonctions (dans le programme, cela correspond à utiliser la ligne à cinq étoiles) : il permet effectivement, si on cherche les nombres impairs dont l'image est non nulle, de trouver les décomposants de Goldbach de $n = 40$ qui sont supérieurs à $\sqrt{40} \simeq 6$.



Ce sont vraisemblablement les propriétés individuelles des courbes qui vont garantir qu'on aura toujours "un impair non nul en face d'un impair non nul" ; le fait que l'image de cet impair est non nulle garantit qu'il est premier, et il en est de même de son complémentaire à n, par la symétrie autour de $n/2$ de la courbe de la fonction h_n.

On voit qu'on a changé notre façon de regarder le problème : il y a quelques temps, on disait "il faut éliminer deux classes de congruence par module premier pour trouver les décomposants de Goldbach". Ici, on se place plutôt sur la droite réelle (et c'est le passage par le plan complexe qui nous a fait adopter ce nouveau point de vue) et on voit qu'il faut conserver certains intervalles ouverts de la droite réelle, ceux qui contiennent les points d'images non nulles. On décide de considérer des intervalles d'extrémités des nombres demi-entiers, pour qu'ils contiennent en leur intérieur les nombres entiers.

Ci-dessous, on montre sur un graphique les intervalles conservés (si l'on se dit que le crible d'Eratosthène, en éliminant les nombres composés, les "absorbe", on prend ici les nombres dans l'ensemble complémentaire, qui seraient comme des nombres "émis").

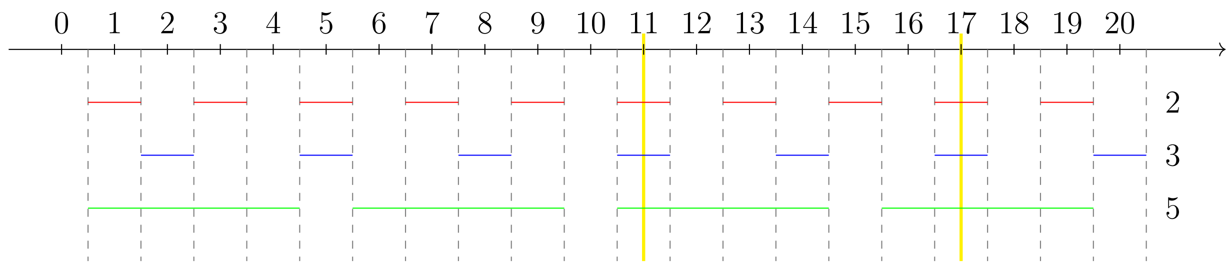


FIGURE 1 : $n = 40$: recouvrement de la droite réelle par des ouverts

L'existence d'une solution (d'un décomposant de Goldbach) correspond alors au fait de trouver un nombre qui appartient à l'intersection des recouvrements par des ouverts.

Remarque : dans le cas qui nous intéressait ici (où il s'agissait de conserver les nombres qui ne sont ni divisibles par 7 ni congrus à 5 modulo 7 dans le premier cas, et ceux qui ne sont ni divisibles par 11 ni congrus à 7 modulo 11 dans le deuxième cas), on ne sait pas s'il faudrait distinguer les sous-recouvrements ; par exemple, ci-dessous, le recouvrement contenant les intervalles de type A et les intervalles de type B (ou bien le recouvrement contenant les intervalles de type C et les intervalles de type D), doit-il être scindé en un recouvrement ne prenant en compte que les intervalles de types A (resp. C) et un autre ne prenant en compte que les intervalles de type B (resp. D) sous prétexte que ces intervalles (A et B, resp. C et D) ne sont pas de la même longueur.

Concernant les recouvrements par des ouverts, on se reportera aux articles de la bibliographie.

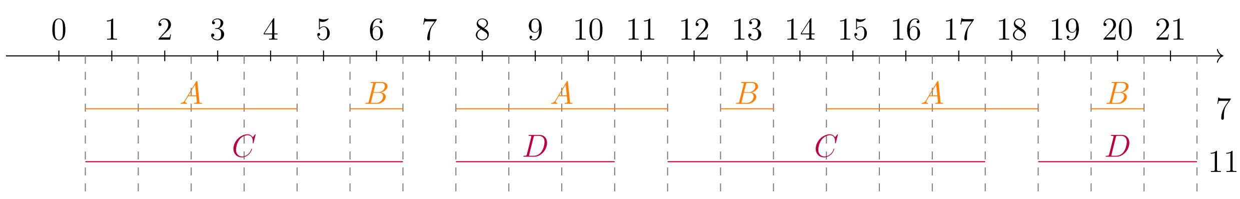


FIGURE 2 : éliminer les divisibles par 7 ou congrus à 5 modulo 7 (intervalles oranges),
éliminer les divisibles par 11 ou congrus à 7 modulo 11 (intervalles pourpres).

Que sait-on, à peut-être utiliser dans une démonstration ?

1) On sait par le théorème de Pafnouti Tchebychev (1850), aussi appelé Postulat de Bertrand, qu'entre un entier et son double, il existe toujours au moins un nombre premier : lorsqu'on applique ce théorème au nombre premier p_k, puisque tout nombre premier p_{k+1} est inférieur à $2\,p_k$, on a dans l'autre sens que $p_k > \dfrac{p_{k+1}}{2}$.

2) Quand on élimine (au maximum) deux classes de congruence modulo chaque module premier, ou bien dans le langage topologique, quand on élimine deux intervalles (deux ouverts) de longueur 1 (d'extrémités demi-entières) sur une ligne, le meilleur des cas (au sens où c'est le cas qui maximise la longueur du segment emboîté obtenu) est quand les deux intervalles de longueur 1 sont contigus ; le pire des cas est quand un intervalle de longueur 1 tombe au milieu de l'intervalle de longueur p_k, ce qui équilibre la taille des deux intervalles séparés par lui. On a facilement comme résultat

que le plus petit des intervalles est toujours tout de même de longueur supérieure à $\dfrac{p_k - 3}{2}$.

3) On dispose du théorème des intervalles emboîtés qui nous permet de trouver un point dans une suite d'intervalles de longueurs décroissantes (Théorème 5.5.10, p. 74, [3]) [3].

Bibliographie

[1] Alexander Grothendieck, A general theory of fiber spaces with structure scheaf (Une théorie générale des espaces fibrés à structure de faisceaux), Cours donné à l'Université du Kansas, à Lawrence, aux Etats-Unis (NSF-G 1126, Projet de recherche sur la géométrie des espaces de fonctions, Rapport no 4, première édition août 1955, seconde édition Mai 1958). lien.
Traduction en français des deux premiers chapitres :
https://denisevellachemla.eu/AG-biblio/transc-AG-fibres-1et2-fr.pdf

[2] Jean Malgoire, Un héritage mathématique fertile, Magazine Pour la Science, n° 467, septembre 2016.
https://denisevellachemla.eu/transc-Malgoire.pdf

[3] Jacques Dixmier, Topologie générale, Puf, 1981.

[3] On rappelle un jeu, auquel on peut jouer avec des élèves d'école élémentaire : ils doivent deviner un nombre décimal, en posant des questions "est-il plus grand (ou plus petit) que tel nombre ?". On peut faire durer le jeu le temps que l'on souhaite en "s'échappant systématiquement de l'autre côté", i.e. en trichant et en modifiant le nombre qu'on a choisi au fur et à mesure, pour le faire appartenir à l'intervalle réduit "emboîté" que les élèves trouvent petit à petit. Ce jeu permet, lentement mais sûrement, de faire appréhender la notion de nombre réel à d'assez jeunes élèves.