Motifs rythmiques (Denise Vella-Chemla, 14/11/2017)

On cherche une caractérisation des nombres premiers par des motifs rythmiques, après avoir assisté, le 10 novembre 2017, à une conférence grand public d'Alain Connes à Gif-sur-Yvette, dans le cadre du programme de conférences UniverCité.

On dispose de la table de la relation *"est un résidu quadratique de"*, obtenue par programme, que Gauss "invente" dans les Recherches arithmétiques section 4 et dont il fournit un extrait (en annexe des Recherches). Dans l'extrait en question, seuls apparaissent, en tête des lignes et des colonnes, les nombres premiers. Notre programme fournit la relation t est un résidu quadratique de y pour t (entête de colonne) entier, compris entre 1 (première croix) et $y-1$, et y (entête de ligne), entier impair. t est un résidu quadratique de y signifie "il existe x compris entre 1 et $y-1$, il existe z compris entre 0 et $y-1$, tels que $x^2 - zy - t = 0$".

On voit clairement, et c'est un résultat connu de Gauss, qu'aux nombres premiers correspondent des lignes à forte densité de croix : en effet, les nombres premiers, qu'ils soient de la forme $4k+1$ ou $4k+3$, maximisent localement le nombre de résidus quadratiques puisque, pour eux, ce nombre est égal à $\dfrac{p-1}{2}$, alors qu'il est moindre pour les nombres composés.

De plus, les lignes, qu'on lit comme des mots booléens, des nombres premiers de la forme $4k+1$ sont des palindromes (elles se lisent identiquement de gauche à droite et de droite à gauche car x et $n-x$ sont soit tous deux résidus quadratiques soit tous deux non-résidus quadratiques).

Pour les nombres premiers de la forme $4k+3$, il y a une "anti-palindromie" des mots (x et $n-x$ sont l'un résidu quadratique et l'autre non-résidu quadratique).

On souhaiterait réduire la taille de l'information nécessitée pour caractériser les nombres premiers : au lieu de chercher les lignes "denses", on va chercher les lignes qui contiennent un motif de 5 croix successives.

On réalise avec grande surprise que cela suffit à caractériser presque tous les nombres premiers de 101 à 200, on n'en rate que 2 qui sont 149 et 193.

Ce qu'il est important d'avoir à l'esprit, c'est que le motif "5 croix consécutives" relie des équations qui semblent plutôt éloignées les unes des autres. Voyons un exemple pour illustrer cela : quand on voit 7 croix successives dans la ligne de 101, associées aux nombres 19, 20, 21, ... 25, les nombres en question sont respectivement les carrés des nombres $25, 11, 18, 27, 15, 23$ et 5 $(mod\ 101)$.

En effet, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$
\begin{array}{l}
25^2 - 6 \times 101 - 19 = 0 \\
11^2 - 1 \times 101 - 20 = 0 \\
18^2 - 3 \times 101 - 21 = 0 \\
27^2 - 7 \times 101 - 22 = 0 \\
15^2 - 2 \times 101 - 23 = 0 \\
23^2 - 5 \times 101 - 24 = 0 \\
5^2 - 0 \times 101 - 25 = 0
\end{array}
$$

En ordonnant ces équations selon les carrés, on peut considérer que p est presque toujours premier s'il existe une succession de 4 carrés $(x_0)^2,\ (x_1)^2,\ (x_2)^2,\ (x_3)^2$, accompagnés de 4 coefficients $k_0,\ k_1,\ k_2,\ k_3$ et une variable x tels que

$$
\begin{array}{l}
(x_0)^2 = k_0 \times p + x + 0, \\
(x_1)^2 = k_1 \times p + x + 1, \\
(x_2)^2 = k_2 \times p + x + 2, \\
(x_3)^2 = k_3 \times p + x + 3.
\end{array}
$$

Dommage que 149 et 193 gâchent tout, c'était joli.
En programmant davantage, on infirme aussi la conjecture "il n'y a jamais plus de 3 nombres entiers consécutifs résidus quadratiques d'un nombre composé" par le contre-exemple 391, qui est un nombre composé, et dont 185, 186, 187 et 188 sont résidus quadratiques tous les 4.