

Programme qui trouverait les zéros de la fonction zeta comme valeurs propres d'un spectre (Denise Vella-Chemla, juin 2023)

On cherche à toucher du doigt ce “miracle”¹ qui consisterait à retrouver, comme indiqué dans les derniers articles d’Alain Connes et Henri Moscovici d’une part, et d’Alain Connes et Caterina Consani d’autre part, les zéros de la fonction zeta comme valeurs propres d’un opérateur en lien avec l’opérateur des fonctions prolates sphéroïdales. Ce que l’on a retenu de l’opérateur sphéroïdal prolata, c’est qu’il semblerait qu’il permette de contraindre le nombre de zéros d’une fonction sur un intervalle à être égal à une certaine valeur, cet opérateur procède à des sortes de confinements des nombres de zéros dans des intervalles emboîtés de plus en plus grands².

On ne comprend pas du tout la théorie développée dans les articles [1] et [2], il s’agit plutôt ici de tests de programmation. On souhaite d’abord réussir à obtenir par programme les mêmes valeurs numériques que celles fournies dans ces deux articles ou bien dans les diapositives des conférences de présentation de ces travaux, puis essayer de voir si on pourrait approcher davantage de zéros de la fonction zeta, en exécutant le programme pour des paramètres plus grands.

Cette démarche teste l’idée de Knuth, qui dit dans une interview des histoires contées de l’Université de Stanford³ :

“J’ai toujours pensé que la meilleure manière de comprendre quelque-chose était d’essayer de l’expliquer à un ordinateur. Vous ne réalisez à quel point vous en connaissez très peu sur un sujet que lorsque vous essayez de l’expliquer à quelqu’un qui ne connaît pas ce sujet et spécialement, lorsque vous essayez de l’expliquer à un ordinateur. Les ordinateurs ne font pas que hocher la tête et dire qu’ils ont compris. Les ordinateurs doivent comprendre...”

On utilise le programme suivant pour les fonctions sphéroïdales prolates, écrit par J. Chemla, en janvier 2021⁴ :

¹Cf *Serendipity strikes again*, de F. Alberto Grünbaum, <https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.2207652119>.

²Mais peut-être qu’on a mal compris.

³Voir la traduction de cette interview de Donald E. Knuth, *Histoire orale*, Université de Stanford, interview menée par Susan W. Schofield le 8 mai 2018 <https://purl.stanford.edu/jq248bz8097> et traduction ici : <http://denise.vella.chemla.free.fr/transc-Knuth-2018.pdf>, cf. p. 42.

⁴Voir <http://denise.vella.chemla.free.fr/pdf-Jacques.pdf>. Les formules pour le calcul des fonctions d’onde sphéroïdales prolata sont à trouver à la page 111 dans la référence bibliographique *A review of prolate spheroidal wave functions from the perspective of spectral methods* de Li-Lian Wang, J. Math. Study, vol. 50, n° 2, p. 101-143, doi:10.4208/jms.v50n2.17.01. On obtient d’ailleurs des résultats similaires avec les formules similaires des articles tels que *Algorithm 840 : Computation of Grid Points, Quadrature Weights and Derivatives for spectral Element Methods Using Prolate Spheroidal Wave Functions—Prolate Elements*, J. P. Boyd, à la page 152 de ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 31, No. 1, March 2005, Pages 149–165 ou encore *A numerical study of the Legendre-Galerkin method for the evaluation of the prolate spheroidal wave functions*, S. Schmutzhard, T. Hrycak, H. G. Feichtinger, <https://doi.org/10.1007/s11075-014-9867-3>.

```

import math
from math import pi, sqrt
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def solve_SturmLiouville(c, n):
    N = int (1.1*c + n + 100)
    A = np.zeros((N, N))
    for k in range(N):
        A[k,k] = k*(k+1)+(2*k*(k+1)-1)/((2*k+3)*(2*k-1))*c**2
        if k+2 in range(N):
            A[k,k+2] = A[k+2,k] = (k+1)*(k+2)/((2*k+3)*np.sqrt((2*k+1)*(2*k+5)))*c**2
    chi, beta = np.linalg.eigh(A)
    return chi, beta, A

def prolate(c, n):
    _, beta, _ = solve_SturmLiouville(c, n)
    coef = np.diag([np.sqrt(k + 1/2) for k in range(len(beta))]) @ beta
    psi = [np.polynomial.Legendre(coef[:, k]) for k in range(n+1)]
    lmb = [(-1)**(k//2) * np.sqrt(2) * (
        beta[0, k] / psi[k](0) if k % 2 == 0 else
        beta[1, k] / psi[k].deriv()(0) * c / np.sqrt(3)
    ) for k in range(n+1)]
    return lmb, psi

def test_SturmLiouville(c, n):
    chi, beta, A = solve_SturmLiouville(c, n)
    print(" Sturm-Liouville (c=:2f,n=:d):N=:d".format(c,n,len(chi)).center(80,'-'))
    for k in range(n+1):
        mu, v = chi[k], beta[:, k]
        err = np.linalg.norm(A@v - mu*v)
        nrm = np.linalg.norm(v)
        print(k, ' --> ', chi[k], ' ----> ', 2*sqrt(chi[k]))

def test_Legendre(n):
    x = np.linspace(-1, 1, 500)
    for k in range(n):
        P = np.polynomial.Legendre.basis(k) * np.sqrt(k + 1/2)
        Q = P.convert(kind=np.polynomial.Polynomial)

c = 5.5
n = 11
test_SturmLiouville(2*pi*c, n)
test_Legendre(n)

lmb, psi = prolate(c, n)
print(" prolate (c = :.2f, n = :d) ".format(c, n).center(80, '-'))
for k, l in enumerate(lmb):
    plt.plot(lmb)
    print('lambda(:2d) = :.15f'.format(k, l))

plt.show()

```

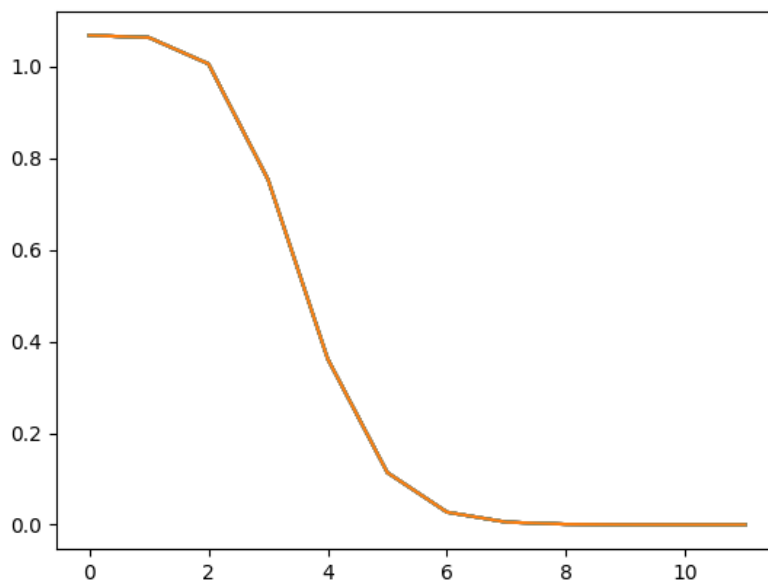
Voici les résultats de ce programme pour certaines valeurs de μ ; ils ne sont pas identiques à ceux qu'on trouve dans l'article [2] et ils sont sûrement problématiques car les valeurs propres initiales dépassent 1. On ne sait pas comment modifier le programme pour qu'il y ait parfaite concordance.

Pour $\mu = 5.5$ et $n = 11$, on obtient :

```

C:\Users\DENISE_2022\Desktop\donnees-numeriques>python3 schisme.py
----- Sturm-Liouville (c = 34.56, n = 11) : N = 149 -----
0 --> 33.80188564634639 ---> 11.627877819507116
1 --> 101.89394432055506 ---> 20.188506068607957
2 --> 168.95035825545474 ---> 25.996181123807762
3 --> 234.94566225863076 ---> 30.655874625176217
4 --> 299.8521878027104 ---> 34.6324811587452
5 --> 363.63972821333545 ---> 38.13868000932048
6 --> 426.27512824461667 ---> 41.29286273653677
7 --> 487.72177453282455 ---> 44.16884759795413
8 --> 547.9389537643357 ---> 46.81619180430359
9 --> 606.8810306208757 ---> 49.26991092424973
10 --> 664.4963742088509 ---> 51.555654363371275
11 --> 720.7259232769846 ---> 53.69267820762845
----- prolate (c = 5.50, n = 11) -----
lambda( 0) = 1.068694704193759
lambda( 1) = 1.063992988597412
lambda( 2) = 1.006447812586847
lambda( 3) = 0.753643303365548
lambda( 4) = 0.362179480409258
lambda( 5) = 0.113779929316238
lambda( 6) = 0.027284099109160
lambda( 7) = 0.005470259037268
lambda( 8) = 0.000951448074434
lambda( 9) = 0.000146499345205
lambda(10) = 0.000020254774082
lambda(11) = 0.000002542181772

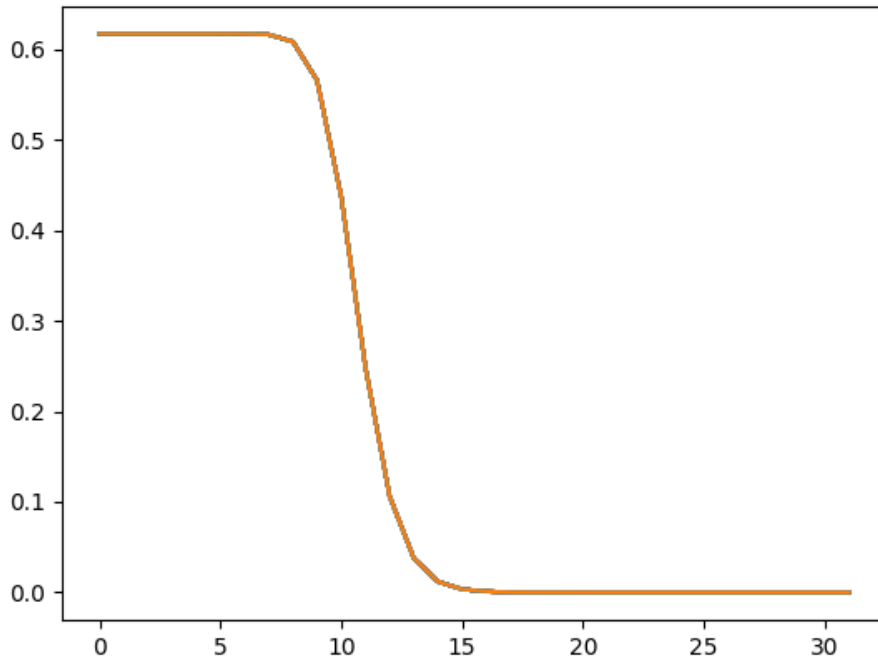
```



Si l'on met en regard les valeurs trouvées et les parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction zeta, comme le font Connes et Consani dans [2], on obtient :

λ_n	ζ_n
11.627877819507116	14.1347
20.188506068607957	21.022
25.996181123807762	25.0109
30.655874625176217	30.4249
34.6324811587452	32.9351
38.13868000932048	37.5862
41.29286273653677	37.5862
44.16884759795413	40.9187
46.81619180430359	43.3271
49.26991092424973	48.0052
51.555654363371275	49.7738
53.69267820762845	52.9703

Pour $\mu = 16.5$ et $n = 31$ (on souhaite aller jusqu'au zéro de la fonction zeta ζ_{31} égal à $0.5 + 103.7255i$), on obtient le graphique suivant :



et les valeurs suivantes pour les valeurs propres, que l'on met comme le font Connes et Consani dans [2] en regard des parties imaginaires des zéros non triviaux de ζ (on reporte le résultat du programme dans le tableau ci-dessous) :

----- Sturm-Liouville (c = 103.67, n = 31) : N = 245 -----

χ_n	$2\sqrt{\chi_n}$	ζ_n
102.92072677653609	20.289970603875805	14.1347
309.2584733282111	35.171492622759764	21.022
514.5850515688494	45.36893437447476	25.0109
718.8928581575877	53.62435484581937	30.4249
922.1740962957962	60.734639088276346	32.9351
1124.4207674701395	67.06476772404835	37.5862
1325.6246626978739	72.81825767478576	40.9187
1525.7773532354743	78.12240019957078	43.3271
1724.8701807078735	83.06311288912482	48.0052
1922.8942466111068	87.70163616743092	49.7738
2119.8404011368652	92.08344913472486	52.9703
2315.69923126167	96.24342536010799	56.4462
2510.461048037919	100.20900255042795	59.347
2704.1158730168577	104.00222830337546	60.8318
2896.653423726532	107.64113384253311	65.1125
3088.063098118746	111.140687385291	67.0798
3278.3339578897003	114.51347445413924	69.5464
3467.454710567861	117.770195050664	72.0672
3655.41369025025	120.92003457244378	75.7047
3842.198836854009	123.9709455776475	77.1448
4027.797673733609	126.92986526004995	79.3374
4212.197283495892	129.80288569205067	82.9104
4395.384281822778	132.5953887859269	84.7355
4577.3447890874295	135.31215450339158	87.4253
4758.064399520176	137.95744850525725	88.8091
4937.528147647454	140.53509380432283	92.4919
5115.720471687653	143.0485298307907	94.6513
5292.625173542325	145.50086148944033	95.8706
5468.225374967145	147.89490018208397	98.8312
5642.503469443964	150.233198321063	101.3179
5815.441069199909	152.51807852448061	103.7255

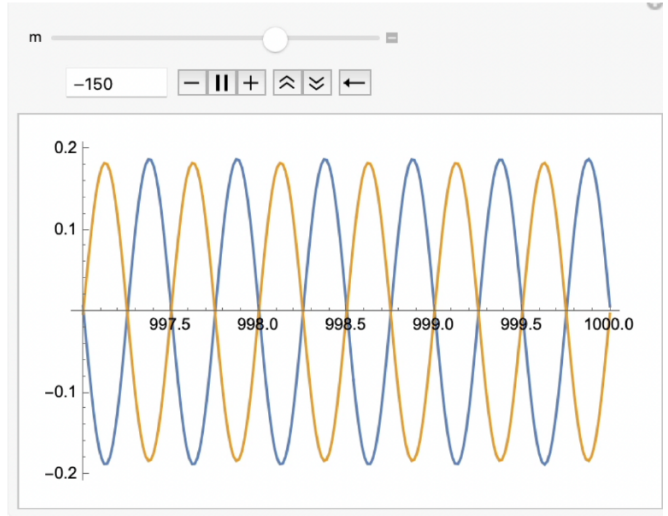
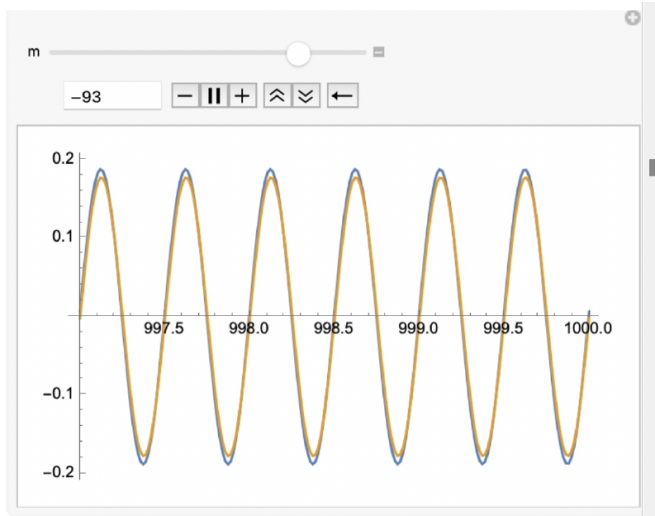
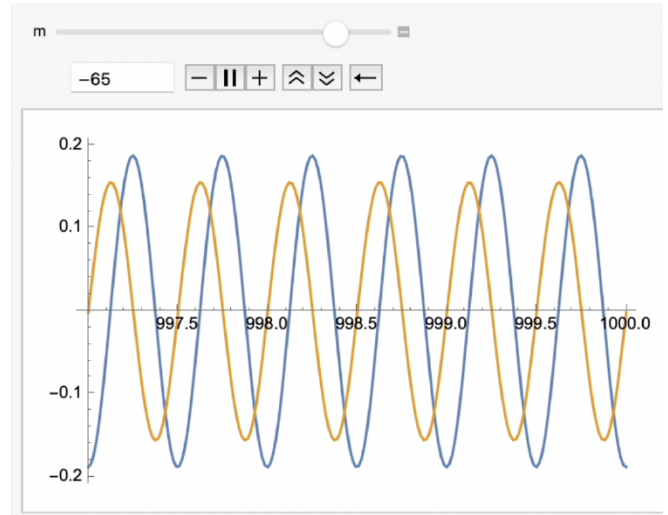
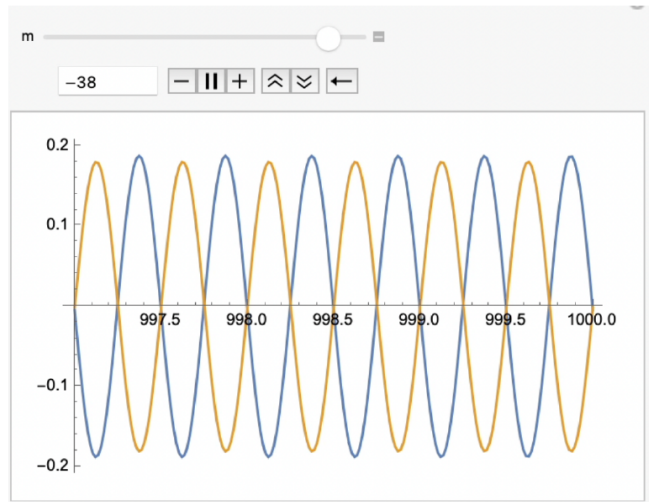
----- prolate (c = 16.50, n = 31) -----

λ_n	valeur	λ_n	valeur	λ_n	valeur	λ_n	valeur
λ_0	0.617089223310524	λ_1	0.617089223305512	λ_2	0.617089223009061	λ_3	0.617089211995113
λ_4	0.617088924550819	λ_5	0.617083356561762	λ_6	0.617001116618567	λ_7	0.616071330346991
λ_8	0.608297170629556	λ_9	0.565443877741659	λ_{10}	0.436665671887785	λ_{11}	0.248499294161039
λ_{12}	0.106015042181635	λ_{13}	0.037510655381883	λ_{14}	0.011792705842498	λ_{15}	0.003390334495125
λ_{16}	0.000903079023335	λ_{17}	0.000224653060628	λ_{18}	0.000052494332871	λ_{19}	0.000011574715711
λ_{20}	0.000002417378221	λ_{21}	0.000000479740690	λ_{22}	0.000000090719657	λ_{23}	0.000000016386606
λ_{24}	0.000000002833430	λ_{25}	0.000000000469915	λ_{26}	0.000000000074882	λ_{27}	0.000000000011484
λ_{28}	0.000000000001697	λ_{29}	0.000000000000242	λ_{30}	0.000000000000034	λ_{31}	0.000000000000005

Les espoirs suscités par l'approximation des valeurs des parties imaginaires des zéros non triviaux de zeta pour le cas $\mu = 5.5$ sont brutalement refroidis par le cas $\mu = 16.5$ pour pouvoir approximer davantage de zéros.

Dans 4 diapositives d'une présentation par Alain Connes des résultats que lui et ses collaborateurs ont obtenus récemment et qui sont reproduites ci-dessous, il semblerait que les valeurs propres

obtenues correspondent au fait que deux ondes soit coïncident, soit sont en opposition totale de phase. Ci-dessous, la valeur -65 n'apparaît pas dans la liste des valeurs propres parce qu'elle ne met pas les ondes en opposition ou coïncidence de phase.



Les valeurs propres obtenues par Alain Connes sont fournies dans les transparents d'une conférence que j'avais pu télécharger au moment de cette conférence mais dont je ne trouve plus trace (!) sur la toile et que j'ai déposés ici <http://denise.vella.chemla.free.fr/transparents-AC-prolate.pdf>, à la page 53/125 :

The first approximate negative eigenvalues of W are

-39, -94, -152, -211, -279, -342, -416, -489, -561, -639, -718, -800, -887, -971,
-1058, -1148, -1242, -1337, -1433, -1528, -1627, -1728, -1834, -1940, -2044, -2155,
-2262, -2375, -2491, -2606, -2723, -2842, -2964, -3084, -3205, -3330, -3461, -3586,
-3716, -3845, -3977, -4112, -4245, -4381, -4523, -4662, -4803, -4943, -5088, -5232,
-5382, -5527, -5677, -5823, -5977, -6129, -6287, -6440, -6600, -6753, -6915, -7075,
-7240, -7402, -7562, -7730, -7902, -8064, -8237, -8408, -8581, -8748, -8924, -9100,
-9278, -9456, -9638, -9816, -10000, -10179, -10363, -10549, -10734, -10923, -11114,
-11299, -11491, -11681, -11876, -12066, -12267, -12459, -12660, -12860, -13059,
-13254, -13464, -13660, -13865, -14069, -14279, -14484, -14694, -14900, -15113,
-15326, -15543, -15753, -15967

The comparison of $2\sqrt{-z}$ with the zeros of zeta then gives

L'obtention des approximations des zéros de la fonction ζ à partir des valeurs propres λ_n consiste à calculer $2\sqrt{\lambda_n}$ pour les λ_n négatives ; on a par exemple :

$$2\sqrt{-39} = 12.49i$$

$$2\sqrt{-94} = 19.39i$$

Si on raisonne inversement⁵, il faudrait que l'opérateur soit capable de trouver les valeurs propres suivantes, pour mieux approcher les parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction ζ (on a calculé $f(x) = (\Re(\zeta_x)/2)^2$ pour les 103 premiers zéros). Ce tableau doit être lu ligne par ligne.

49.94761370809672	110.48153764352064	156.38574922358276	231.41827181847404	271.1795704470434
353.180197146746	418.5853913987703	469.3088197724447	576.1236277809061	619.3585998788465
701.4637393631045	796.5447197695586	880.517907961705	925.1263196167948	1059.9108481033418
1124.9252451682091	1209.175497742996	1298.418803819659	1432.800048460991	1487.8315873130678
1573.6047687759221	1718.5328133423989	1795.0259426628136	1910.7946602950894	1971.7645583724961
2138.6878576687845	2239.719232169215	2297.7946268315004	2441.9012376485803	2566.326733104896
2689.74681044668	2779.747578284837	2871.277805791653	3081.8894407329944	3128.9848414920657
3267.278227539478	3377.160304601704	3527.8125234778768	3682.6768107758035	3778.98070833449
3859.939239311902	4065.1261669122364	4197.660145534928	4295.995521095704	4455.411459580152
4539.829230227787	4769.010268202413	4881.552023077732	4978.975197863942	5120.250102616045
5329.071721775203	5433.367935311849	5629.014747667726	5694.608346330363	5854.1392290027925
6092.810112077736	6209.250236676248	6308.329685515108	6495.4705399378045	6644.753075276554
6850.630318829933	6987.659242703959	7148.23878590651	7217.519937785038	7517.890249521409
7634.756863746298	7782.894934258316	7954.624901230262	8092.485305552848	8299.85486245202
8544.642215556116	8611.727125661113	8763.667362944732	8969.620290000345	9218.559188268915
9319.94520635395	9532.143785103477	9690.087275518297	9802.515716545486	10126.875093740156
10250.913954814292	10423.355517764887	10546.745409692086	10806.253121180875	10980.578356274887
11203.255326592458	11379.333673779616	11507.60860633237	11682.317344718927	11997.652942534442
12178.768849561242	12257.889340612324	12544.784040766575	12654.374094844668	12930.128329563819
13148.91228541734	13369.162443504118	13454.519330103598	13653.15178918165	13985.927804751942
14133.62188288285	14346.70670884627	14526.17411856633		

⁵Il y a notamment des articles bibliographiques de référence pour le problème dit "problème inverse des valeurs propres" de Françoise Chatelin née Laborde, Paul Morel, Ole H. Hald ou Shmuel Friedland.

Les résultats numériques de l'article [2] sont les suivants (on rappelle qu'on regarde les valeurs propres inférieures à $2\pi\mu$, i.e. inférieures à 34.44 pour $\mu = 5.5$ par exemple, puis etc).⁶ :

$\mu = 5.5$	$\mu = 6.5$	$\mu = 7.5$			
5	0.9999999999647719857	7	0.99999999998668315975	9	0.99999999996397226733
6	0.99999999894391115741	8	0.99999999731589077585	10	0.99999999453062631606
7	0.99999980631702676769	9	0.99999963978717981581	11	0.99999941709770526957
8	0.99997809227622865324	10	0.99996808936687677767	12	0.99995709581648305854
9	0.99852183576050441685	11	0.99821407841789989100	13	0.99792322303841470726
10	0.95065832620623051607	12	0.94788066237037484836	14	0.94552083061302325507
11	0.57197061534624863399	13	0.57534099083086049406	15	0.57809629788957190907
12	0.139174533954574303539	14	0.14710511279564130503	16	0.15383636015962926720

Les valeurs propres pour les différentes valeurs de μ sont :

pour $\mu = 5.5$, λ_j	pour $\mu = 6.5$, λ_j	pour $\mu = 7.5$, λ_j	ζ_j
14.781	13.936	15.06	14.1347
21.701	20.58	21.683	21.022
25.547	24.69	24.948	25.0109
29.345	30.194	30.979	30.4249
33.168	33.454	33.243	32.9351
	36.826	37.406	37.5862
	40.259	40.514	40.9187
		43.643	43.3271
		46.658	48.0052

Pour des valeurs plus grandes du paramètre μ , à la recherche de toujours plus d'approximations de zéros de la fonction ζ .

$\mu = 8.5$	$\mu = 9.5$	$\mu = 10.5$			
11	0.9999999992101000288	13	0.9999999984990646525	15	0.99999999974270022369
12	0.99999999034148375362	14	0.99999998455736228573	16	0.99999997703659571104
13	0.9999991399089362040	15	0.99999881131048713492	17	0.99999843436641476606
14	0.99994536408530411219	16	0.99993308190344158164	18	0.99992039045021729410
15	0.99764801726717553636	17	0.99738707752987412262	19	0.99713907784499135361
16	0.94347292951033144975	18	0.94166650390462098514	20	0.94005235637340584775
17	0.58041289343441020661	19	0.58240244869697875785	21	0.58413979804862029634
18	0.15967051202562674536	20	0.16480962032526478957	22	0.16939519615152177689

Les valeurs propres pour ces nouvelles valeurs de μ sont :

⁶Voir si on calcule bien $\text{Prolate}(2\pi\mu, \frac{x}{\sqrt{\mu}})$.

pour $\mu = 8.5$, λ_j	pour $\mu = 9.5$, λ_j	pour $\mu = 10.5$, λ_j	ζ_j
14.887	13.998	14.45	14.1347
20.778	21.501	21.455	21.022
25.535	25.121	25.356	25.0109
29.928	30.689	30.345	30.4249
32.473	33.583	32.6	32.9351
37.965	37.813	37.41	37.5862
41.088	41.272	40.387	40.9187
43.741	43.05	42.895	43.3271
46.685	47.319	48.095	48.0052
49.91	50.19	50.346	49.7738
52.845	53.026	53.272	52.9703
	55.731	56.05	56.4462
	58.581	58.737	59.347
		61.386	60.8318
		63.849	65.1125

Bibliographie

- [1] Alain Connes, Henri Moscovici, The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta, PNAS, vol. 119, n° 22, éd. Robion Kirby, Université de Californie, Berkeley, CA, États-Unis, <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.2123174119>.
- [2] Alain Connes, Caterina Consani, Spectral triples and zeta cycles, Fondation L'enseignement mathématique, Vol. 69, n°1/2, *EMSPress*, pp.93–148, 2023 [https : //doi.org/10.4171/LEM/1049](https://ems.press/journals/lem/articles/11033001).