Décomposants de Goldbach et fonctions paires (Denise Vella-Chemla, 10.7.2024)

On a étudié les graphiques obtenus par programme, qui montrent les parties réelle et imaginaire des produits :

$$A = \prod_{\substack{x \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq n \\ 2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \left(1 - \exp\left(\frac{2i\pi x}{p}\right)\right)$$

et

$$A' = \prod_{\substack{x \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq n \\ 2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \left(1 - \exp\left(\frac{2i\pi(n-x)}{p}\right)\right).$$

On cherche les points d'abscisse entière impaire qui rendent non nul à la fois A et A'. Si le produit AA' est non nul, alors A et A' doivent l'être.

On utilise l'égalité

(1) $$1 \,-\, \exp(i\theta) \,=\, -\,2\,i\,\sin(\theta/2)\exp(i\theta/2)$$

et on agrège systématiquement chaque sinus dans lequel intervient x avec le sinus "correspondant" dans lequel intervient $n-x$, ou bien chaque exponentielle dans laquelle intervient x avec l'exponentielle "correspondante" dans laquelle intervient $n-x$ de la façon suivante :

- pour les produits de sinus :

$$\sin\left(\frac{\pi\, x}{p}\right)\,\sin\left(\frac{\pi(n-x)}{p}\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi\, n}{p}\right) - \cos\left(\frac{\pi(n-2x)}{p}\right)\right)$$

  $-\dfrac{1}{2}$ étant non nul, on peut l'oublier.

- pour les produits d'exponentielles :

$$\exp\left(\frac{i\pi\, x}{p}\right)\,\exp\left(\frac{i\pi(n-x)}{p}\right) = \exp\left(\frac{i\pi\, n}{p}\right)$$

  Le produit global courant pour toutes les valeurs de p comprises entre 2 et $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, il est finalement égal à [1] :

$$\exp\left(\frac{i\pi\, n}{2} + \frac{i\pi\, n}{3} + \frac{i\pi\, n}{4} + ...\right)$$

  Cette exponentielle étant non nulle, on peut l'oublier.

De même, on peut oublier l'élément $(-2i)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1}$, systématiquement non nul, qui apparaît par le produit des différents $-2i$ de l'équation (1).

[1] Puisque le produit de deux exponentielles est l'exponentielle de leur somme : $\exp(a)\exp(b) \;=\; \exp(a+b)$.

Reste que les décomposants de Goldbach de n (s'ils existent) sont les nombres entiers impairs qui n'annulent pas le produit suivant :

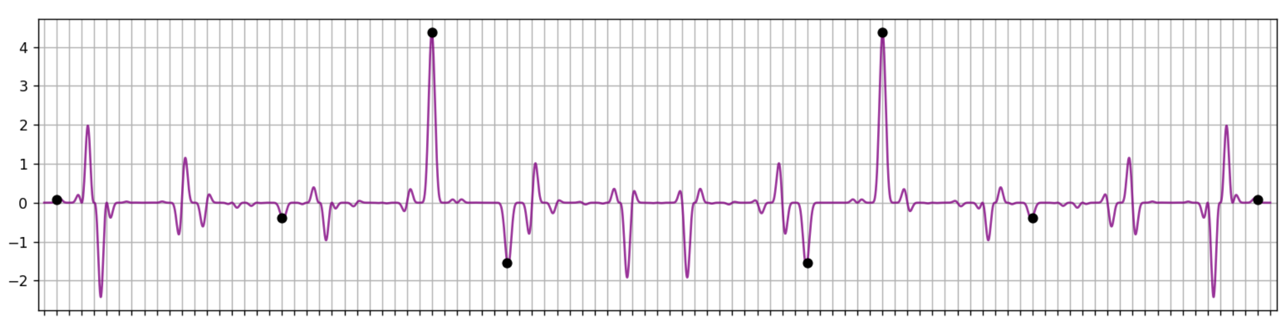
$$\prod_{\substack{3 \leq x \leq n \\ p \in \mathbb{N} \\ 2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{p}\right) - \cos\left(\frac{\pi \times (n-2x)}{p}\right) \right)$$

Cette dernière fonction est une fonction paire. Voici le programme qui permet de la calculer :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from math import floor, sqrt, sin, cos

i, exp = 1j, np.exp
epsilon = 1e-6
for n in range(98, 100, 2):
      a, b = 0, n
      d = 2
      x = np.linspace(a, b, num=(b - a)*10**d + 1, endpoint=True)
      xl, xr = a - 0.5, b + 0.5
      www = []
      for k in range(len(x)):
            produit = 1
            for p in range(2, int(floor(sqrt(n))) + 1):
                  produit = produit*(cos(np.pi*n/p)-cos(np.pi*(n-2*x[k])/p))
            www += [produit]
      plt.figure(figsize=(20, 8))
      plt.subplot(211)
      plt.plot(x, www, alpha=0.8, color='purple')
      for k in range(len(x)):
            if (abs(x[k]%2 - 1) < epsilon) and (abs(www[k]) > epsilon):
                  plt.plot(x[k], www[k].real, color='black', marker='o')
                  print(x[k],' ', www[k].real)
      plt.xlim(xl, xr)
      plt.xticks(range(a, b + 1), fontsize=6)
      plt.grid(True)
plt.show()
```

Et voici le résultat de son exécution pour $n = 98$.



```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop\discret-continu>python3 reecritreprise.py
1.0    0.08131702910576541
19.0    -0.39395726076523135
31.0    4.372594315315881
37.0    -1.5389072110071624
61.0    -1.5389072110071624
67.0    4.372594315315881
79.0    -0.39395726076523135
97.0    0.08131702910576541
```

L'ensemble des résultats pour les nombres compris entre 6 et 102 est à consulter ici :

https://denisevellachemla.eu/dessins-fcts-paires.pdf.