Conjecture de Goldbach
et sinusoïdes

Denise Vella-Chemla

24 Mai 2009

1 Introduction

La lectrice intéressée par les recherches qui ont amené aux éléments présentés ici peut se reporter à la note [6] de la bibliographie[1].

2 Présentation d'un exemple qui explicite la méthode des sinusoïdes

Intéressons nous au cas $2a = 60$ (ou bien $a = 30$). On va noter dans un tableau par des 0 le fait que certains nombres soient divisibles par les nombres impairs compris entre 3 et $2 * \lfloor\sqrt{30}\rfloor + 1$.

57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	
0	–	–	0	–	–	0	–	–	0	–	–	0	–	*divisibilité par* 3
	0	–	–	–	–	0	–	–	–	–	0	–	–	*divisibilité par* 5
		0	–	0	–	–	–	–	0	–	0	–	–	*divisibilité par* 7
			0	–	–	0	–	–	–	–	–	0	–	*divisibilité par* 9
				0	–	–	–	–	–	–	–	0	–	*divisibilité par* 11

Sur la première ligne, on constate que 3 divisant 30 (ou 60), les nombres dont la somme vaut 60 (comme 3 et 57, ou bien 9 et 51) sont simultanément divisibles par 3.
Même constat sur la ligne montrant la divisibilité par 5.
Par contre, 7, 9 et 11 ne divisant pas 30, la divisibilité des nombres a été codée en bleu pour les nombres inférieurs à 30 et en vert pour ceux supérieurs à 30.

On comprend aisément que si l'on indice les colonnes par les nombres de 1 à $\left\lfloor \dfrac{a-1}{2} \right\rfloor$ au lieu de les indicer par les nombres impairs comme on l'a fait, on peut "simuler" les caractères de la divisibilité par les nombres impairs successifs par des sinusoïdes. On utilisera la sinusoïde $sin\left(\dfrac{(x-i)\pi}{2j+1}\right)$ quand on aura besoin d'une sinusoïde de période $2j+1$ qui s'annule pour la valeur i. Les nombres

[1] Se reporter à [4] pour une présentation originale de la conjecture.

qui n'annulent aucune des sinusoïdes ainsi définies sont en bijection immédiate avec les décomposants de Goldbach de $2a$.

Pour les lignes des nombres impairs qui divisent $2a$, on a besoin d'une sinusoïde, pour les lignes des nombres impairs qui ne divisent pas $2a$, on a besoin de deux sinusoïdes.

La question de la conjecture de Goldbach devient : "pourquoi existe-t-il obligatoirement un nombre entier x supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à $\lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor$ et tel que :

$$\prod_{\substack{1 \leq k \leq \sqrt{a} \\ 1 \leq k' \leq 2k+1 \\ k' \neq k \\ k \in \mathbb{N} \\ k' \in \mathbb{N}}} sin\Big(\frac{(x-k)\pi}{2k+1}\Big).sin\Big(\frac{(x-k')\pi}{2k+1}\Big) \neq 0$$

?" Ce produit fait intervenir $2\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ sinusoïdes. La condition $k' \neq k$ est une condition non obligatoire : puisque c'est la non-nullité des sinusoïdes qui nous intéresse, on peut bêtement élever la sinusoïde "centrale" au carré, cela ne modifie pas le résultat obtenu.
On calcule k' de la façon suivante :

$$k' = (x \; mod \; (2k+1)) + k.$$

On peut se passer de la fonction *mod* (qui renvoie le reste modulaire) en calculant k' ainsi

$$k' = x - (2k+1) * \lfloor x/(2k+1) \rfloor.$$

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.
[6] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, mai 2009.