1 Représentation des décomposants de Goldbach à l'aide de sinusoïdes (Denise Chemla)

En octobre 2005 :
Au tout début, nous réfléchissions à une manière élégante d'implémenter les horloges modulaires Gaussiennes. On peut voir l'horloge modulaire de n comme un polygone régulier à n côtés sur le cercle unité. Prenons comme convention que tous les polygones ont en commun le sommet correspondant à 3 heures (point $(1,0)$). Deux nombres sont premiers entre eux si leurs polygones réguliers respectifs n'ont aucun sommet commun hormis le sommet correspondant au point $(1,0)$. Cette idée des polygones réguliers nous a fait faire un détour par les fractions à coefficients entiers. 4 n'est pas premier car $2/4 = 1/2$.
Cela nous a amenée naturellement à nous rendre compte qu'un nombre était premier si toutes les fractions de $1/n$ à $(n-1)/n$ étaient non réductibles.
La considération des fractions entières 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, nous a fait dériver vers les sinusoïdes. En effet, les sinusoïdes sont des fonctions qui passent régulièrement par zéro. La sinusoïde $sin(5\pi x)$ s'annule justement pour les 4 fractions qui nous intéressent sur l'intervalle]0, 1[. Un nombre n est ainsi premier si sa sinusoïde s'annule exactement $n-1$ fois dans l'intervalle $]0,1[$ et ce, jamais sur un point pour lequel s'annule la sinusoïde d'un nombre premier inférieur à lui.
Nous avons vite abandonné cette voie de recherche : le fait d'assimiler un nombre premier p à sa sinusoïde $sin(p\pi x)$ semblait ne pas présenter d'intérêt ; en effet, même si cela a l'avantage de restreindre l'étude à l'intervalle $]0,1[$, dans la mesure où il y a une infinité de sinusoïdes qui s'annulent dans cet intervalle, on ne fait que transformer un problème sur des données infiniment grandes en un problème sur des données infiniment petites.
Cette vision "ondulatoire" des nombres premiers est cependant à rapprocher de la méthode du crible d'Eratosthène, et pourrait expliquer la raréfaction des nombres premiers. Un nombre est premier s'il n'existe pas de nombre premier dont il soit le multiple. Le crible d'Eratosthène élimine ainsi successivement les multiples de 2, puis de 3, puis de 5, etc.
Imaginons un nombre (par exemple 17) qui "regarde passer" les filtres des nombres premiers qui vont éliminer peu à peu tous les nombres qui sont leurs composés. Le filtre de 2 passe, 17 le traverse avec succès étant impair, 17 traverse également avec succès le filtre de 3, celui de 5, celui de 7, puis celui de 11, et enfin celui de 13. Du côté des sinusoïdes, de plus en plus de points de l'intervalle $]0,1[$ ont été touchés par les nombres premiers de 3 à 13. 17 a en quelque sorte "de moins en moins de place" pour pouvoir faire passer sa propre sinusoïde. Les zéros de la sinusoïde de 17 réussissent tout de même à s'intercaler entre les zéros des autres sinusoïdes.
Partant de là, plus un nombre est grand, plus il a de filtres à traverser, et moins il semblerait probabilistiquement parlant qu'il ait de chance d'être premier. Dit autrement, moins sa sinusoïde n'a d'espace pour intercaler ses zéros sur l'intervalle $]0,1[$. Cette raréfaction des nombres premiers a été conjecturée par Gauss et démontrée par Hadamard et la Vallée-Poussin, indépendamment.

10 mai 2009 :
Pour chaque nombre pair $2a$, calculons la valeur absolue de son reste minimum selon des modules prenant les valeurs successives $8i+4$ pour i strictement positif et inférieur ou égal à m, le nombre de nombres impairs inférieurs ou égaux à la racine de $2a$.
Dans chaque colonne, effectuons maintenant un traitement que l'on souhaiterait appeler "écrêter la sinusoïde" et qui consiste à colorer dans la colonne c les nombres égaux à $2c$ ou $2c-2$.
Après ce traitement, seules certaines lignes ont uniquement leur dernier nombre coloré. Ces lignes sont les lignes de nombres pairs $2a$ tels que soit a est un nombre premier, soit $p+1=a=q-1$ et p et q sont deux nombres premiers jumeaux.
De 24 à 100, les doubles de nombres premiers sont 26 (double de 13), 34 (double de 17), 38 (double de 19), 46 (double de 23), 58 (double de 29), 62 (double de 31), 74 (double de 37), 82 (double de 41), 86 (double de 43) et 94 (double de 47).
De 24 à 100, les doubles d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux sont 24 (12 est entre 11 et 13), 36 (18 est entre 17 et 19), 60 (30 est entre 29 et 31) et enfin 84 (42 est entre 41 et 43).

20 mai 2009 :
Le problème de Goldbach reformulé devient : sur l'intervalle des nombres de 1 à x, considérons $2\sqrt{x}$ sinusoïdes qui ont pour périodes les nombres impairs successifs (3, 5, 7, ...). Si l'on ne considère que les sinusoïdes qui s'annulent les "premières" pour chaque période impaire, toutes ces sinusoïdes sont déphasées de 1 en 1. Pourquoi existe-t-il toujours un nombre inférieur à x qui n'annule aucune des sinusoïdes ?

Connaître les transformées de Fourier ou le traitement du signal nous permettrait peut-être d'entrevoir une réponse à cette question.

Sur le site, à l'adresse : http://denise.vella.chemla.free.fr/sinnp.html
Je n'ai pas de connaissances en mathématiques dans le domaine des transformées de Fourier, pas de connaissances en physique dans le domaine du traitement du signal.
Il faudrait cependant que je trouve la réponse au problème suivant : imaginons que j'ai plusieurs sinusoïdes (en fait plusieurs fonctions en dents de scie mais l'idée est identique).
Dans le pire des cas (pour les puissances de 2), ou bien dans les cas un peu moins pire mais assez graves tout de même des nombres pairs qui ont très peu de diviseurs différents, le nombre de sinusoïdes est plus élevé (2 pour chaque module impair au lieu d'une).
J'ai 2 sinusoïdes de périodes 3 donc, déphasées d'un nombre entier (soit de 1, soit de 2), j'en ai deux autres de périodes 5, déphasées aussi, d'un nombre entier (soit 1, soit 2, soit 3 soit 4), et il se trouve que la première des sinusoïdes de période 5 est déphasée de 1 avec la première des sinusoïdes de période 3, puis j'en rajoute 2 de période 7, la première décalée de 1 avec la première de période 5 et l'autre déphasée d'un nombre entier (de 1 à 6), etc...
J'ai donc, pour résumer, un certain nombre de couples de sinusoïdes (parfois les deux éléments du couple sont confondus) de périodes toutes impaires (de 3 à 2k+1) et déphasées l'une par rapport à l'autre d'un nombre entier et toutes les premières sinusoïdes selon les différents nombres impairs sont décalées de 1.
Et le problème est : Pourquoi est-ce que j'ai toujours un nombre inférieur à la plus grande des périodes pour lequel aucune des sinusoïdes ne s'annule ?
Ci-dessous sont fournis les scans du résultat d'un programme. Il effectue des calculs qu'on précisera à l'occasion. Ces résultats font précisément apparaître les sinusoïdes dont il était question ci-dessus.
Sur la première ligne, vous pouvez voir les sinusoïdes de période 3 (et les zéros qui les annulent), sur la deuxième ligne, celles de période 5, sur la troisième ligne, celles de période 7, etc.
Le pire des cas, c'est 32, une puissance de 2, parce qu'on a effectivement 2 sinusoïdes par ligne. Pour les autres nombres, on a une sinusoïde sur les lignes des diviseurs et deux sinusoïdes sur les lignes des non-diviseurs.
En fait, la propriété que l'on a explicitée, si elle était déjà démontrée, permettrait de démontrer facilement la conjecture de Goldbach.