Le snurpf, reprise (DV, 10.5.2016)

On rappelle que notre but est de trouver un espace dans lequel chaque nombre est représenté par un point qui a une infinité de coordonnées (une coordonnée selon chaque nombre premier). Cette coordonnée, notée $n \ mod \ p$, est le reste de la division euclidienne de n par p.

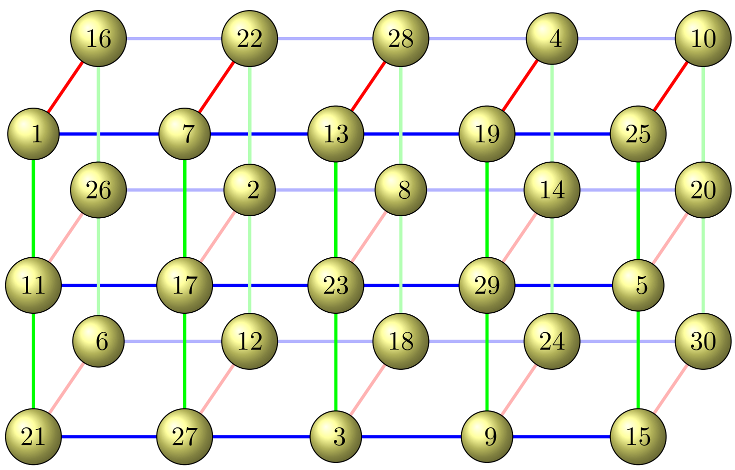
$$n \ mod \ p = n - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor p$$

Observons la table de restes qui fournit pour les entiers de 1 à 10 leur reste dans les divisions euclidiennes par les entiers premiers compris entre 2 et 19.

mod	2	3	5	7	11	13	17	19
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	2	2	2	2
3	1	0	3	3	3	3	3	3
4	0	1	4	4	4	4	4	4
5	1	2	0	5	5	5	5	5
6	0	0	1	6	6	6	6	6
7	1	1	2	0	7	7	7	7
8	0	2	3	1	8	8	8	8
9	1	0	4	2	9	9	9	9
10	0	1	0	3	10	10	10	10

Chaque colonne de la table des restes, trivialement, contient une suite cyclique de nombres “retombant” régulièrement à 0 puisque $p = 0$ dans chaque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Ces points à une infinité de coordonnées n’étant pas vraiment représentables, on propose cependant une illustration qui essaie de saisir la cyclicité des restes dans les corps premiers par des boucles sur le réseau de points ci-dessous. Les directions correspondant au nombre premier 2 (resp. 3, resp. 5) sont la profondeur (resp. la hauteur, resp. la largeur) du maillage.



Même si cela n’est pas flagrant sur le maillage ci-dessus, il faut imaginer chacune des mailles comme étant parcourable en se promenant sur l’un des cercles qui sous-tendraient un tore de dimension infinie, ce tore étant la transposition dans le monde continu du produit cartésien infini de corps premiers $\prod_{p_k \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ du monde discret.

La distance définie ci-dessous positionne les nombres premiers le plus loin qu’il est possible de leurs 2 voisins (*prec* et *succ* au sens de Peano), les “rechutes à zéro” des restes modulo leurs diviseurs pour les nombres premiers faisant “tomber la moyenne” si on saisit l’image évoquée par une telle expression.

$$d(p,q) = \sqrt{\sum_{k \leqslant min(p,q)} ((p \ mod \ k) - (q \ mod \ k))^2}$$

On peut s'amuser à se promener dans le maillage-jouet ci-dessus, en passant d'un nombre entier au suivant selon la séquence numérique habituelle $1, 2, 3, 4, \ldots$. Le passage s'effectue selon des diagonales internes des cubes successifs avec un retour dans le maillage "à la pacman" quand on en sort d'un côté ou de l'autre (vers la droite ou vers la gauche, vers le haut ou vers le bas, vers l'avant ou vers l'arrière). Cela correspond au fait d'incrémenter simultanément les 3 restes de 1 dans le produit cartésien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

On peut observer également l'incrément d'une seule des coordonnées, qui permet de passer d'un des sommets du maillage à un sommet qui lui serait adjacent, selon les fibres du maillage symbolisées (par exemple, le passage du point $29 = (1, 2, 4)$ au point $5 = (1, 2, 0)$ avec une augmentation du seul reste modulaire dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ou bien du point $13 = (1, 1, 3)$ au point $28 = (0, 1, 3)$ (resp. augm. du reste modulo 2, i.e. dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), ou encore du point $23 = (1, 2, 3)$ au point $3 = (1, 0, 3)$ (resp. augm. du reste modulo 3 le $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)).

Les nombres atteints selon ces cheminements sont systématiquement calculables par une application du théorème des restes chinois à la résolution d'un système de congruences modulaires. On ne sait pas comment résoudre un tel système dans le cas où il contiendrait un nombre infini de congruences.