Chercher des idées (Denise Vella-Chemla, 31.5.2018)

On propose ici l'ébauche d'une façon de voir les nombres premiers comme annulant certains polynômes sur le disque-unité.

On a proposé la caractérisation suivante des nombres premiers (motivée par le fait que si p est un nombre premier, $\sigma(p) = p + 1$) :

$$n \text{ est premier } \iff \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos\frac{2\pi no}{b} = 0$$

Victor Varin, du Keldysh Institute de Moscou, nous a fourni une démonstration de cette assertion, que l'on peut consulter ici : http://denise.vella.chemla.free.fr/VictorVarinKeldyshSumsumcos.pdf.

On peut utiliser les polynômes de Tchebychev, pour calculer chacun des cosinus.

On trouve les propriétés de ces polynômes dans la page wikipedia *Polynômes de Tchebychev*.

Utiliser le résultat $\forall\theta \in \mathbb{R}, \cos(x\theta) = T_x(\cos\theta)$ (n *entier*) du paragraphe *Définition trigonométrique* permet de remplacer dans la somme de sommes de cosinus chacun des cosinus par un polynôme.

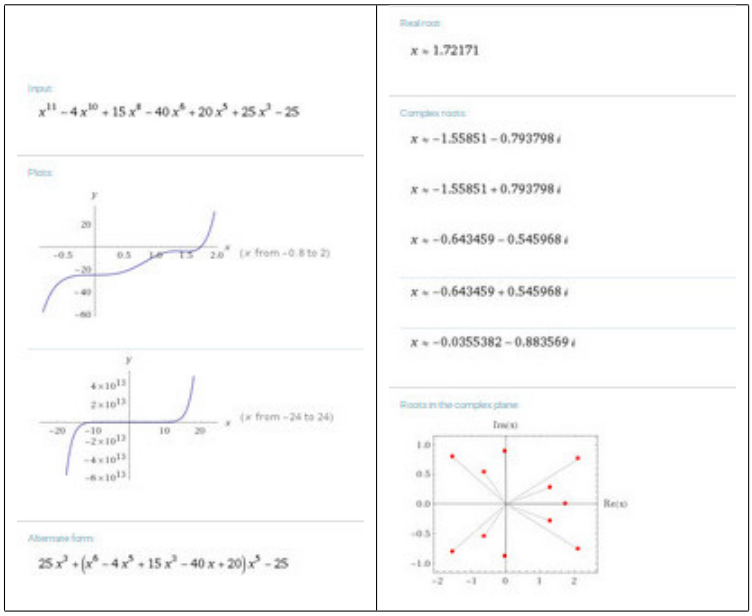
Cependant le remplacement de chaque cosinus en appliquant la formule polynomiale nécessite que celui-ci ait pour argument un multiple entier de θ ; problème : comme les dénominateurs des arguments des cosinus sont les entiers successifs, pour éliminer ces dénominateurs de manière à obtenir des multiples entiers de θ comme arguments des cosinus, il nous faudrait multiplier chaque argument de cosinus par $n!$ pour obtenir le caractère entier de l'argument. Mais alors une autre conséquence de cette multiplication des arguments par $n!$ est de permettre l'obtention d'un polynôme en une seule et même variable $X = cos\ \theta$ avec $\theta = 2\pi n^2$ qui est la partie commune des arguments de tous les cosinus à sommer. Et alors tous les cosinus étant d'argument pair valent 1. Non seulement ce qu'on a fait perd tout intérêt mais en plus, on ne sait pas revenir en arrière pour éliminer les opérations effectuées.

On imagine cependant qu'on aurait ainsi obtenu de manière théorique un polynôme dont les zéros seraient les nombres premiers.

Ce polynôme se serait annulé sur le disque unité, comme le fait par exemple le polynome :

$$P(x) = x^{11} - 4 * x^{10} + 15 * x^8 - 40 * x^6 + 20 * x^5 + 25 * x^3 - 25.$$

Visualisons les racines de l'équation polynomiale $P(x) = 0$ sur le disque-unité complexe en utilisant la version en ligne du logiciel Wolfram-Mathematica.



Certaines solutions sont dans le disque-unité du plan complexe.

On aurait alors peut-être pu utiliser la formule de Jensen qui décrit le comportement d'une fonction analytique f sur un cercle selon les modules des zéros de cette fonction. La formule de Jensen fournit des résultats sur certaines intégrales logarithmiques dans lesquelles interviennent les zéros de f.