Sommes de résidus modulaires (Denise Vella-Chemla, 17.8.2017)

a) Somme des résidus quadratiques

On utilise la formule $1^2+2^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

1) $n=24k$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k} x^2 &= \frac{12k(12k+1)(24k+1)}{6}\\ &= \frac{3456k^3+432k^2+12k}{6}\\ &= k(576k^2+72k+2)\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n=24k$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k$, on trouve $24k+3$ reste $2k$ qui est bien égal à $\dfrac{n}{12}$.

2) $n=24k+1$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k} x^2 &= \frac{12k(12k+1)(24k+1)}{6}\\ &= \frac{3456k^3+432k^2+12k}{6}\\ &= k(576k^2+72k+2)\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n=24k+1$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k+1$, on trouve $24k+2$ reste 0.

3) $n=24k+2$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+1} x^2 &= \frac{(12k+1)(12k+2)(24k+3)}{6}\\ &= \frac{3456k^3+1296k^2+156k+6}{6}\\ &= 576k^3+216k^2+26k+1\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n=24k+2$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k+2$, on trouve $24k^2+7k$ reste $12k+1$ qui est bien égal à $\dfrac{n}{2}$.

4) $n=24k+3$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+1} x^2 &= \frac{(12k+1)(12k+2)(24k+3)}{6}\\ &= \frac{3456k^3+1296k^2+156k+6}{6}\\ &= 576k^3+216k^2+26k+1\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n=24k+3$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k+3$, on trouve $24k^2+6k$ reste $8k+1$ qui est bien égal à $\dfrac{n}{3}$.

5) $n=24k+4$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+2} x^2 &= \frac{(12k+2)(12k+3)(24k+5)}{6}\\ &= \frac{3456k^3+2160k^2+444k+30}{6}\\ &= 576k^3+360k^2+74k+5\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n=24k+4$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k+4$, on trouve $24k^2+11k+1$ reste $6k+1$ qui est bien égal à $\dfrac{n}{4}$.

6) $n = 24k + 5$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+2} x^2 &= \frac{(12k+2)(12k+3)(24k+5)}{6} \\ &= \frac{3456k^3 + 2160k^2 + 444k + 30}{6} \\ &= 576k^3 + 360k^2 + 74k + 5\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 5$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 5$, on trouve $24k^2 + 10k + 1$ reste 0.

7) $n = 24k + 6$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+3} x^2 &= \frac{(12k+3)(12k+4)(24k+7)}{6} \\ &= \frac{3456k^3 + 3024k^2 + 876k + 84}{6} \\ &= 576k^3 + 504k^2 + 146k + 14\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 6$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 6$, on trouve $24k^2 + 15k + 2$ reste $8k + 2$ qui est bien égal à $\frac{n}{3}$.

8) $n = 24k + 7$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+3} x^2 &= \frac{(12k+3)(12k+4)(24k+7)}{6} \\ &= \frac{3456k^3 + 3024k^2 + 876k + 84}{6} \\ &= 576k^3 + 504k^2 + 146k + 14\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 7$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 7$, on trouve $24k^2 + 14k$ reste 0.

9) $n = 24k + 8$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+4} x^2 &= \frac{(12k+4)(12k+5)(24k+9)}{6} \\ &= \frac{3456k^3 + 3888k^2 + 1452k + 180}{6} \\ &= 576k^3 + 648k^2 + 242k + 30\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 8$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 8$, on trouve $24k^2 + 19k + 3$ reste $18k + 6$ qui est bien égal à $\frac{3n}{4}$.

10) $n = 24k + 9$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+4} x^2 &= \frac{(12k+4)(12k+5)(24k+9)}{6} \\ &= \frac{3456k^3 + 3888k^2 + 1452k + 180}{6} \\ &= 576k^3 + 648k^2 + 242k + 30\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 9$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 9$, on trouve $24k^2 + 18k + 3$ reste $8k + 3$ qui est bien égal à $\frac{n}{3}$.

11) $n = 24k + 10$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+5} x^2 &= \frac{(12k+5)(12k+6)(24k+11)}{6} \\ &= 576k^3 + 792k^2 + 362k + 55\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 10$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 10$, on trouve $24k^2 + 23k + 5$ reste $12k + 5$ qui est bien égal à $\frac{n}{2}$.

12) $n = 24k + 11$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+5} x^2 &= \frac{(12k+5)(12k+6)(24k+11)}{6} \\ &= 576k^3 + 792k^2 + 362k + 55\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 11$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 11$, on trouve $24k^2 + 22k + 5$ reste 0.

13) $n = 24k + 12$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+6} x^2 &= \frac{(12k+6)(12k+7)(24k+13)}{6} \\ &= 576k^3 + 936k^2 + 506k + 91\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 12$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 12$, on trouve $24k^2 + 27k + 7$ reste $14k + 7$ qui est bien égal à $\frac{7n}{12}$.

14) $n = 24k + 13$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+6} x^2 &= \frac{(12k+6)(12k+7)(24k+13)}{6} \\ &= 576k^3 + 936k^2 + 506k + 91\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 13$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 13$, on trouve $24k^2 + 26k + 7$ reste 0.

15) $n = 24k + 14$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+7} x^2 &= \frac{(12k+7)(12k+8)(24k+15)}{6} \\ &= 576k^3 + 1080k^2 + 674k + 140\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 14$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 14$, on trouve $24k^2 + 31k + 10$ reste 0.

16) $n = 24k + 15$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+7} x^2 &= \frac{(12k+7)(12k+8)(24k+15)}{6} \\ &= 576k^3 + 1080k^2 + 674k + 140\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 15$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 15$, on trouve $24k^2 + 30k + 9$ reste $8k + 5$ qui est bien égal à $\frac{n}{3}$.

17) $n = 24k + 16$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+8} x^2 &= \frac{(12k+8)(12k+9)(24k+17)}{6} \\ &= 576k^3 + 1224k^2 + 866k + 204\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 16$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 16$, on trouve $24k^2 + 35k + 12$ reste $18k + 12$ qui est bien égal à $\frac{3n}{4}$.

18) $n = 24k + 17$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+8} x^2 &= \frac{(12k+8)(12k+9)(24k+17)}{6} \\ &= 576k^3 + 1224k^2 + 866k + 204\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 17$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 17$, on trouve $24k^2 + 34k + 12$ reste 0.

19) $n = 24k + 18$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+9} x^2 &= \frac{(12k+9)(12k+10)(24k+19)}{6} \\ &= 576k^3 + 1368k^2 + 1082k + 285\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 18$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 18$, on trouve $24k^2 + 39k + 15$ reste $20k + 15$ qui est bien égal à $\frac{5n}{6}$.

20) $n = 24k + 19$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+9} x^2 &= \frac{(12k+9)(12k+10)(24k+19)}{6} \\ &= 576k^3 + 1368k^2 + 1082k + 285\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 19$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 19$, on trouve $24k^2 + 38k + 15$ reste 0.

21) $n = 24k + 20$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+10} x^2 &= \frac{(12k+10)(12k+11)(24k+21)}{6} \\ &= 576k^3 + 1512k^2 + 1322k + 385\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 20$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 20$, on trouve $24k^2 + 43k + 19$ reste $6k + 5$ qui est bien égal à $\frac{n}{4}$.

22) $n = 24k + 21$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+10} x^2 &= \frac{(12k+10)(12k+11)(24k+21)}{6} \\ &= 576k^3 + 1512k^2 + 1322k + 385\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 21$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 21$, on trouve $24k^2 + 42k + 18$ reste $8k + 7$ qui est bien égal à $\frac{n}{3}$.

23) $n = 24k + 22$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+11} x^2 &= \frac{(12k+11)(12k+12)(24k+23)}{6} \\ &= 576k^3 + 1656k^2 + 1586k + 506\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 22$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 22$, on trouve $24k^2 + 47k + 23$ reste 0.

24) $n = 24k + 23$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{12k+11} x^2 &= \frac{(12k+11)(12k+12)(24k+23)}{6} \\ &= 576k^3 + 1656k^2 + 1586k + 506\end{aligned}$$

Pour trouver le reste quadratique modulo $n = 24k + 23$, on divise le polynôme ci-dessus par $24k + 23$, on trouve $24k^2 + 46k + 22$ reste 0.