Formule du crible de Poincaré par addition disjointe.

Etude autour de la conjecture de Goldbach, mars 2009.

$2x$ vérifie la conjecture de Goldbach $\iff$ ....

suite de mots binaires.

arithmétique des tissus de Lucas.

Etude combinatoire de CG, avril 2009.

Méthode géométrique ratée, crible à droites non parallèles.

mots binaires.

combinatoire des mots.

Piste pour une démonstration de la conjecture de Goldbach, avril 2009.

Différentes formulations équivalentes de la Conjecture de Goldbach, mai 2009.

Valeurs absolues des résidus modulaires minima de Gauss et nombres premiers, mai 2009.

Tester autrement la primalité, mai 2009.

Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, mai 2009.

Conjecture de Goldbach et sinusoïdes, mai 2009.

Conjecture de Goldbach, Conjecture des nombres premiers jumeaux, test de primalité et sinusoïdes, mai 2009.

Grilles, mai 2009.

Conjecture de Goldbach et Formule du Crible de Poincaré, juin 2009.

Etude de la Conjecture de Goldbach, juin 2009.

Etude de la Conjecture de Goldbach, juin 2009.

La Conjecture de Goldbach, juin 2009.

Une fonction de comptage liée la Conjecture de Goldbach, août 2009.

Conjecture de Goldbach, Jacquard et réécriture, mars 2010.

Chercher un lien entre la Conjecture de Goldbach et la Loi de Réciprocité Quadratique, avril 2010.

Une formule qui semble minorer le nombre de décompositions de Goldbach.

Une fonction qui semble minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné, novembre 2010.

Quelques comètes : indicatrice d'Euler, somme des diviseurs, nombre de décompositions de Goldbach..., décembre 2010.

Représentons un nombre pair $2x$ par le n-uplet de ses restes modulaires $(x_1, \ldots, x_i)$ selon les modules premiers impairs $p_1, \ldots, p_i$ inférieurs à sa racine (i est donc compris entre 1 et $\Pi(\sqrt{2x}) - 1$).

Quelle est la probabilité qu'un nombre a, représenté par le n-uplet de ses restes modulaires $(y_1, \ldots, y_i)$ selon les mêmes modules, partage l'une de ses coordonnées avec $2x$?

Pour chaque module premier p_i pris indépendamment, la probabilité que le résidu modulaire de a (modulo p_i) soit égal à celui de $2x$ est $\dfrac{1}{p_i}$.
On applique l'identité de Poincaré lorsqu'on veut calculer la probabilité qu'au moins un événement, parmi plusieurs événements indépendants, se réalise.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \;=\; \mathbb{P}$$

Appliquer l'identité de Poincaré permet de connaître la probabilité $\mathbb{P}$ que le nombre a partage l'une de ses coordonnées au moins avec $2x$.
Les premières valeurs que renvoie l'identité de Poincaré sont :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = 0,4666$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} + \frac{1}{105} = 0,542857$$

Par programme, il semblerait que cette probabilité tende indéfiniment vers 1 sans jamais l'atteindre (dernière valeur trouvée : 0.925046 jusqu'à 10^9).
La probabilité complémentaire de celle-ci, i.e. $1 - \mathbb{P}$, qui représente le fait qu'un nombre ne partage aucune de ses coordonnées avec $2x$ n'est donc jamais nulle.
Pour contraindre également a à être premier, il faut multiplier $\mathbb{P}$ par $x/log(x)$ qui est la probabilité qu'un nombre inférieur à x soit premier.
Et on obtient ainsi pour un nombre pris dans l'intervalle de nombres $[3, x]$ une probabilité jamais nulle qu'il soit un décomposant de Goldbach de $2x$.
Ci-dessous, les résultats d'un programme qui calcule le rapport du "vrai" nombre de décomposants de Goldbach au nombre de décomposants calculé par la méthode ci-dessus, et qui montre clairement qu'un nombre divisible par 3 a en moyenne et de plus en plus quand on augmente les valeurs 2 fois plus de décomposants de Goldbach qu'un nombre qui n'est pas divisible par 3.

10 : 1.64447 / 2 = 0.822237
20 : 2.20718 / 2 = 1.10359
30 : 2.72056 / 3 = 0.906854
40 : 3.0478 / 3 = 1.01593
50 : 3.38641 / 4 = 0.846603
60 : 3.87148 / 6 = 0.645246
70 : 4.13099 / 5 = 0.826197
80 : 4.50019 / 4 = 1.12505
90 : 4.82097 / 9 = 0.535663
100 : 5.1023 / 6 = 0.850383

$100: 5.1023 \ / \ 6 = 0.850383$
$200: 7.81177 \ / \ 8 = 0.976471$
$300: 10.0544 \ / \ 21 = 0.478781$
$400: 12.3504 \ / \ 14 = 0.882172$
$500: 14.395 \ / \ 13 = 1.10731$
$600: 16.366 \ / \ 32 = 0.511436$
$700: 18.0132 \ / \ 24 = 0.750551$
$800: 19.9547 \ / \ 21 = 0.950222$
$900: 21.4741 \ / \ 48 = 0.447377$
$1000: 23.3817 \ / \ 28 = 0.83506$

$1000: 23.3817 \ / \ 28 = 0.83506$
$2000: 38.7531 \ / \ 37 = 1.04738$
$3000: 52.4172 \ / \ 104 = 0.504012$
$4000: 65.0366 \ / \ 65 = 1.00056$
$5000: 77.2606 \ / \ 76 = 1.01659$
$6000: 88.7466 \ / \ 178 = 0.498577$
$7000: 100.071 \ / \ 119 = 0.840931$
$8000: 111.026 \ / \ 106 = 1.04742$
$9000: 121.785 \ / \ 242 = 0.503242$
$10000: 131.892 \ / \ 127 = 1.03852$

$10000: 131.892 \ / \ 127 = 1.03852$
$20000: 228.827 \ / \ 231 = 0.990594$
$30000: 316.763 \ / \ 602 = 0.526184$
$40000: 399.733 \ / \ 389 = 1.02759$
$50000: 479.421 \ / \ 450 = 1.06538$
$60000: 556.319 \ / \ 1084 = 0.513209$
$70000: 631.454 \ / \ 719 = 0.878239$
$80000: 704.599 \ / \ 652 = 1.08067$
$90000: 776.35 \ / \ 1471 = 0.527771$
$100000: 846.858 \ / \ 810 = 1.0455$

$100000: 846.858 \ / \ 810 = 1.0455$
$200000: 1507.13 \ / \ 1417 = 1.06361$
$300000: 2118.2 \ / \ 3915 = 0.541046$
$400000: 2698.77 \ / \ 2487 = 1.08515$
$500000: 3261.01 \ / \ 3052 = 1.06848$
$600000: 3805.26 \ / \ 6993 = 0.544152$
$700000: 4342.27 \ / \ 4878 = 0.890175$
$800000: 4862.08 \ / \ 4433 = 1.09679$
$900000: 5365.44 \ / \ 9853 = 0.544549$
$1000000: 5880.86 \ / \ 5402 = 1.08865$

Etude autour de la conjecture de Goldbach

Denise Vella

Mars 2009

Nul ne doit nous exclure du paradis que Cantor a créé.
David Hilbert

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à 4 soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*. Dans cette note, on présente un codage des entiers qui permettrait peut-être d'aboutir à une démonstration de la conjecture de Goldbach en utilisant le principe de la descente infinie de Fermat.

2 Matrice de congruence à 2x

Tout entier peut être représenté par la séquence infinie d'entiers qui sont ses restes modulo l'infinitude des nombres premiers.

Dans la suite, nous ne considérerons pour chaque entier que ses restes modulo les nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à sa moitié. On va associer à chaque nombre pair $2x$ une matrice carrée définie de la façon suivante :

$$m(p_i, p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \equiv 2x \ (mod\ p_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour exemple, la matrice carrée suivante que l'on appellera M_{48} est associée au nombre 48. Les entêtes des lignes et des colonnes sont les nombres premiers impairs successifs : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 (que l'on appelle $pmax_{48}$, le plus grand nombre premier inférieur ou égal à 24, la moitié de 48)[1].

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les lignes composées uniquement de 0 fournissent les décomposants de Goldbach de 48 qui sont $5, 7, 11, 17$ et 19.

Les matrices booléennes associées aux nombres $2x$ valant de 6 à 100 sont fournies en annexe (ainsi que les matrices de restes pour les nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à x, et les vecteurs des restes des $2x$ modulo ces mêmes nombres premiers qui ont permis le calcul des matrices booléennes).

De façon évidente, les matrices booléennes associées à deux nombres pairs qui partagent leurs restes modulo des nombres premiers impairs successifs (comme 3 et 5, par exemple) contiennent une sous-matrice carrée commune en haut et à gauche (de taille 2×2 dans le cas des seuls premiers impairs 3 et 5)[2].

Par exemple, la matrice carrée associée à 684 est de taille 67×67. Celle associée à $2994 = 684 + 2310$ est de taille 237×237. Ces deux nombres partageant leurs restes modulo 3, 5, 7 et 11, leurs deux matrices de booléens associées partagent la petite sous-matrice en haut et à gauche de taille 4×4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dès leurs lignes 6 respectives et avant leurs colonnes 6, les deux matrices de booléens associées à 684 et 2994 diffèrent.

[1]Pour faciliter la lecture de cette matrice carrée de booléens, fournissons la matrice carrée M'_{48} des restes des nombres premiers impairs inférieurs à 24 modulo ces mêmes nombres premiers impairs ainsi que le vecteur v_{48} des restes de 48 modulo ces nombres premiers impairs auxquels on compare les éléments de M'_{48} pour obtenir la matrice M_{48}

$$M'_{48} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

et $v_{48} = (0\ \ 3\ \ 6\ \ 4\ \ 9\ \ 14\ \ 10\ \ 2)$.

[2]Par exemple, les matrices de booléens associées aux nombres $30, 60$ et 90 ont toutes les 3 la matrice 2×2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en haut à gauche.

3 Descente infinie de Fermat

Ce type de démonstration repose sur le fait qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers positifs. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et toutes ses parties propres non vides[3] possèdent une propriété remarquable : ils admettent un plus petit élément.

On raisonne par l'absurde : supposons qu'un certain entier $2ng$ (on choisit ce nom mnémotechnique pour signifier qu'il est pair et non-Goldbach) ne vérifie pas la conjecture de Goldbach. Si nous sommes capables de montrer qu'il existe un entier $2ng'$ strictement inférieur à $2ng$, selon la relation d'ordre sur les entiers, et qui ne vérifie pas non plus la conjecture de Goldbach, nous aboutirons à une contradiction.

Posons que $2ng$ est compris entre deux primorielles[4] successives. $2ng$ ne vérifie pas la conjecture si et seulement si, p et q étant deux nombres premiers impairs :

$$\forall\, q \leq 2ng/2,\ \exists\, p \leq 2ng/2,\ 2ng\ \equiv\ p\ (q)$$

En utilisant la notion de matrice carrée de congruence définie au troisième paragraphe, cela équivaut à dire que la matrice associée à $2ng$ contient au moins un 1 dans chacune de ses lignes.

Pour mener la démonstration par descente infinie à son but, il faudrait être capable de démontrer qu'il existe une sous-matrice carrée en haut à gauche de la matrice carrée associée à $2ng$ qui elle-aussi, contient au moins un 1 par ligne (fixons cette sous-matrice juste de taille $n-1 \times n-1$ si la matrice associée à $2ng$ est de taille $n \times n$).

Dans les faits, cela n'est jamais le cas, et il s'agit de comprendre pourquoi. Observons les exemples de matrices fournis en annexe : ces matrices ne contiennent jamais de ligne (si ce n'est la dernière dans le cas du double d'un nombre premier) contenant des 0 dans toutes les colonnes sauf dans la dernière. Dit en d'autres termes, une matrice $n \times n$ qui a l'allure de la matrice ci-dessous, i.e. qui contient une sous-matrice $n-1 \times n-1$ en haut à gauche contenant elle-même

[3]Essayons d'imaginer comment nous concevons les parties propres de $\mathbb{N}$ sur lesquelles on envisage de mener le raisonnement par l'absurde. Je crois qu'elles doivent chacune contenir une infinité de nombres : admettons qu'une telle partie propre contienne 2308 compris entre #7 et #11, du coup, la partie de $\mathbb{N}$ doit également contenir les nombres décroissants suivants, obtenus en soustrayant de multiples fois $210 = \#7$ à 2308 : $2098, 1888, 1678, 1468, 1258, 1048, 838, 628, 418, 208$. Tous les nombres précités ont pour préfixe $0-1-3-5$ (i.e. $0\ (mod\ 2),\ 1\ (mod\ 3), 3\ (mod\ 5)\ et\ 5\ (mod\ 7)$). A partir de 208, on est en-dessous de 210 la primorielle #7, du coup, il faut décrémenter de 30 en 30 ($30 = \#5$), ce qui nous fournit les nombres $178, 148, 118, 88, 58, 28$, qui conservent quant à eux le préfixe $0-1-3$, puis on décrémente encore selon #3, c'est à dire de 6 en 6, ce qui nous fournit les nombres $22, 16, 10$ et 4 qui ont quant à eux conservé le préfixe $0-1$ et on poursuit jusqu'au nombre 2 quelque soit le nombre pair de départ.

[4]On rappelle que la primorielle est définie de la façon suivante (par analogie avec la factorielle) :

$$\#n = \prod_{p_i\ premier\ \leq\ n} p_i$$

Par exemple, $\#2 = 2, \#3 = 6, \#5 = 30, \#7 = 210....$

une ligne sans un seul 1 (dont j'ai coloré les éléments en bleu), ne peut être associée à aucun entier pair.

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 & . \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \ldots 1 \ldots\ldots & . \end{pmatrix}$$

En effet, lorsqu'on est dans le cas d'un $2x$ double de premier, la ligne des restes de x et la ligne des restes de $2x$ se terminent toutes les deux par un 0 alors que tous les autres nombres de ces deux lignes sont quant à eux non nuls, ce qui permet d'obtenir un 1 dans la case de la dernière ligne et de la dernière colonne et des 0 dans toutes les autres cases de la dernière ligne et dans toutes les autres cases de la dernière colonne.

Dans les autres cas ($2x$ n'est pas le double d'un nombre premier), la ligne vecteur des restes de $2x$ se termine systématiquement par un nombre pair, tandis que les lignes de la matrice des restes des nombres premiers se terminent toutes par les nombres premiers successifs, il ne peut donc jamais y avoir égalité entre un impair et un pair et de fait, il ne peut jamais y avoir une ligne qui contiendrait un 1 dans la dernière colonne dans une ligne autre que la dernière ligne.

Pour mener à bien la démonstration, il convient donc de choisir comme valeur pour $2ng'$ la valeur de $2ng - \#p_{max}$ (p_{max} étant le plus grand nombre premier inférieur à la moitié de $2ng$) dans la mesure où $2ng$ et $2ng - \#p_{max}$ partagent leurs restes modulo tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à p_{max}, ce que l'on peut écrire *ont-un-préfixe-commun*$(2ng, 2ng - \#p_{max})$ en utilisant la fonction définie au paragraphe 2.

Inversement à la descente infinie de Fermat, on teste par programme jusqu'à 16.10^8 ce que l'on pourrait appeler la "montée infinie de Goldbach" : tout nombre pair $2x$ supérieur ou égal à 6 partage au moins l'un de ses décomposants de Goldbach avec $2x+6$. Si une telle démonstration devait voir le jour, elle serait à relier d'une part à la démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers d'Euclide, et d'autre part, à la démonstration appelée "diagonalisation de Cantor" si ce n'est qu'ici la diagonale n'est pas très droite !

4 Conclusion

Dans cette note, on peut dire que l'on considère que "les nombres sont des mots", et on a présenté des éléments qui appartiennent à ce que l'on pourrait appeler une "théorie lexicale des nombres"[5].

[5]Dans l'axiomatique de Peano, l'ordre défini sur les entiers utilise la fonction *succ* qui à tout nombre n associe le nombre $n+1$. Dans la théorie lexicale des nombres, un nouvel ordre est défini sur les ensembles finis d'entiers qui est l'ordre lexicographique. On peut définir une distance entre les mots associés à deux nombres. On peut inventer différents parcours de

Annexe : les matrices carrées associées aux nombres de 6 à 100

6:
$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$
6 = 3+3

8:
$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$
8 = 3+5

10:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$
10 = 3+7 = 5+5

12:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$
12 = 5+7

14:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
14 = 3+11 = 7+7

---

nombre en nombre en changeant une ou plusieurs lettres de leur mot associé, etc.

16:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
16 = 3+13 = 5+11

18:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
18 = 5+13 = 7+11

20:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
20 = 3+17 = 7+13

22:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
22 = 3+19 = 5+17 = 11+11

24:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

24 = 5+19 = 7+17 = 11+13

26:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

26 = 3+23 = 7+19 = 13+13

28:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

28 = 5+23 = 11+17

30:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$
30 = 7+23 = 11+19 = 13+17

32:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$
32 = 3+29 = 13+19

34:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
34 = 3+31 = 5+29 = 11+23 = 17+17

36:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$
36 = 5+31 = 7+29 = 13+23 = 17+19

38:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
38 = 7+31 = 19+19

40:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
40 = 3+37 = 11+29 = 17+23

42:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 9 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$
42 = 5+37 = 11+31 = 13+29 = 19+23

44:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

$44 = 3+41 = 7+37 = 13+31$

46:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 7 & 12 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$46 = 3+43 = 5+41 = 17+29 = 23+23$

48:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 4 & 9 & 14 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$48 = 5+43 = 7+41 = 11+37 = 17+31 = 19+29$

50:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 & 11 & 16 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$50 = 3+47 = 7+43 = 13+37 = 19+31$

52:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 0 & 1 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$
52 = 5+47 = 11+41 = 23+29

54:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 10 & 2 & 3 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$
54 = 7+47 = 11+43 = 13+41 = 17+37 = 23+31

56:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 5 & 18 & 10 \end{pmatrix}$$

56 = 3+53 = 13+43 = 19+37

58:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

58 = 5+53 = 11+47 = 17+41 = 29+29

60:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 & 8 & 9 & 3 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

60 = 7+53 = 13+47 = 17+43 = 19+41 = 23+37 = 29+31

62:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 7 & 10 & 11 & 5 & 16 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

62 = 3+59 = 19+43 = 31+31

64:
$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0
\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 9 & 12 & 13 & 7 & 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
64 = 3+61 = 5+59 = 11+53 = 17+47 = 23+41

66:
$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0
\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 15 & 9 & 20 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$
66 = 5+61 = 7+59 = 13+53 = 19+47 = 23+43 = 29+37

68:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 & 0 & 11 & 22 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

68 = 7+61 = 31+37

70:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & 13 & 1 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

70 = 3+67 = 11+59 = 17+53 = 23+47 = 29+41

72:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 & 7 & 4 & 15 & 3 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

72 = 5+67 = 11+61 = 13+59 = 19+53 = 29+43 = 31+41

74:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 8 & 9 & 6 & 17 & 5 & 16 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

74 = 3+71 = 7+67 = 13+61 = 31+43 = 37+37

76:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 10 & 11 & 8 & 0 & 7 & 18 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

$76 = 3+73 = 5+71 = 17+59 = 23+53 = 29+47$

78:

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&3&3&3&3&3&3&3&3&3&3\\ 2&0&5&5&5&5&5&5&5&5&5\\ 1&2&0&7&7&7&7&7&7&7&7\\ 2&1&4&0&11&11&11&11&11&11&11\\ 1&3&6&2&0&13&13&13&13&13&13\\ 2&2&3&6&4&0&17&17&17&17&17\\ 1&4&5&8&6&2&0&19&19&19&19\\ 2&3&2&1&10&6&4&0&23&23&23\\ 2&4&1&7&3&12&10&6&0&29&29\\ 1&1&3&9&5&14&12&8&2&0&31\\ 1&2&2&4&11&3&18&14&8&6&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&3&1&1&0&10&2&9&20&16&4 \end{pmatrix}$$

78 = 5+73 = 7+71 = 11+67 = 17+61 = 19+59 = 31+47 = 37+41

80:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 12 & 4 & 11 & 22 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

80 = 7+73 = 13+67 = 19+61 = 37+43

82:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 4 & 14 & 6 & 13 & 24 & 20 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$82 = 3+79 = 11+71 = 23+59 = 29+53 = 41+41$

84:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 \\
2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 & 6 & 16 & 8 & 15 & 26 & 22 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

84 = 5+79 = 11+73 = 13+71 = 17+67 = 23+61 = 31+53 = 37+47 = 41+43

86:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 \\
2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 \\
1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 9 & 8 & 1 & 10 & 17 & 28 & 24 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

86 = 3+83 = 7+79 = 13+73 = 19+67 = 43+43

88:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 \\
2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 \\
1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 10 & 3 & 12 & 19 & 1 & 26 & 14 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$88 = 5+83 = 17+71 = 29+59 = 41+47$

90:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 \\ 1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 & 12 & 5 & 14 & 21 & 3 & 28 & 16 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

90 = 7+83 = 11+79 = 17+73 = 19+71 = 23+67 = 29+61 = 31+59 = 37+53 = 43+47

92:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 \\ 1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 7 & 16 & 0 & 5 & 30 & 18 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

92 = 3+89 = 13+79 = 19+73 = 31+61

94:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 & 37 \\
2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 & 41 \\
1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0 & 43 \\
2 & 2 & 5 & 3 & 8 & 13 & 9 & 1 & 18 & 16 & 10 & 6 & 4 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 & 3 & 9 & 18 & 2 & 7 & 1 & 20 & 12 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$94 = 5+89 = 11+83 = 23+71 = 41+53 = 47+47$

96:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 & 37 \\
2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 & 41 \\
1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0 & 43 \\
2 & 2 & 5 & 3 & 8 & 13 & 9 & 1 & 18 & 16 & 10 & 6 & 4 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 & 5 & 11 & 1 & 4 & 9 & 3 & 22 & 14 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$96 = 7+89 = 13+83 = 17+79 = 23+73 = 29+67 = 37+59 = 43+53$

98:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 & 37 \\
2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 & 41 \\
1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0 & 43 \\
2 & 2 & 5 & 3 & 8 & 13 & 9 & 1 & 18 & 16 & 10 & 6 & 4 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 10 & 7 & 13 & 3 & 6 & 11 & 5 & 24 & 16 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

98 = 19+79 = 31+67 = 37+61

100:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 10 & 6 & 4 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
2 & 4 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 6 & 0 & 29 & 29 & 29 & 29 & 29 \\
1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 14 & 12 & 8 & 2 & 0 & 31 & 31 & 31 & 31 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 18 & 14 & 8 & 6 & 0 & 37 & 37 & 37 \\
2 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 & 18 & 12 & 10 & 4 & 0 & 41 & 41 \\
1 & 3 & 1 & 10 & 4 & 9 & 5 & 20 & 14 & 12 & 6 & 2 & 0 & 43 \\
2 & 2 & 5 & 3 & 8 & 13 & 9 & 1 & 18 & 16 & 10 & 6 & 4 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 & 15 & 5 & 8 & 13 & 7 & 26 & 18 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$100 = 3+97 = 11+89 = 17+83 = 29+71 = 41+59 = 47+53$

On voit sur ces exemples que les décompositions de Goldbach correspondent bien aux lignes de premiers qui ne sont constituées que de 0 ou bien aux dernières lignes de la matrice constituées uniquement de 0 et d'un 1 en dernière position lorsque le nombre pair considéré est le double d'un nombre premier.

$2x$ vérifie la conjecture de Goldbach $\Longleftrightarrow$
$\exists\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \forall\, q\ premier\ impair\ \leq\ x,\ 2x\ \not\equiv\ p\ (mod\ q)$.

$2x$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach $\Longleftrightarrow$
$\forall\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \exists\, q\ premier\ impair\ \leq\ x,\ 2x\ \equiv\ p\ (mod\ q)$.

Supposons qu'il existe $2ng$ tel que $2ng$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach. Il faudrait être capable de démontrer qu'alors $\exists\, 2ng',\ 2ng'\ <\ 2ng$ tel que $2ng'$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach non plus.
Que sait-on ?

- on sait que $2p_{max} < 2ng < 4p_{max}$ car par le postulat de Bertrand, l'écart entre deux nombres premiers successifs p_i et p_{i+1} est toujours inférieur strictement à p_i (i.e. $p_{i+1}\ <\ 2p_i$).
- on sait que
  $\forall\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \forall\, q\ premier\ impair\ \leq\ x,$
  $q\ premier\ impair\ >\ \frac{2x}{3}\ \Rightarrow\ 2x\ \not\equiv\ p\ (mod\ q)$[1].
- on sait que
  $\forall\, p\ premier\ impair\ divisant\ 2x,\ 2x\ \equiv\ p\ (mod\ p)$
  tandis que $\forall\, q\ premier\ impair\ ne\ divisant\ pas\ 2x,\ 2x\ \not\equiv\ q\ (mod\ q)$.

$2ng$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach $\Longleftrightarrow$
$\forall\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \exists\, q\ \leq\ \frac{2x}{3},\ 2x\ \equiv\ p\ (mod\ q)$.

Appelons $C = \{a_1\ (mod\ p_1),\ ...,\ a_k\ (mod\ p_k)\}$ le système de congruences[2] que vérifie $2ng$. Il y a $2^k - 2$ ensembles de congruences strictement inclus dans C (sans compter l'ensemble vide).
Comment obtient-on les nombres qui vérifient les ensembles de congruences strictement inclus dans C à partir de $2ng$?
Si l'on soustrait à $2ng$ tous les multiples non nuls du double des produits de premiers impairs $\leq\ \frac{2x}{3}$ (remarque : de tels nombres premiers sont en nombre $\pi(\frac{2x}{3})$-1), on obtient des nombres strictement inférieurs à $2ng$ et qui partagent des colonnes de congruence avec $2ng$.

---

[1] Dans la matrice de 98 ci-après, les 4 dernières colonnes ne contiennent que des 0 de ce fait.

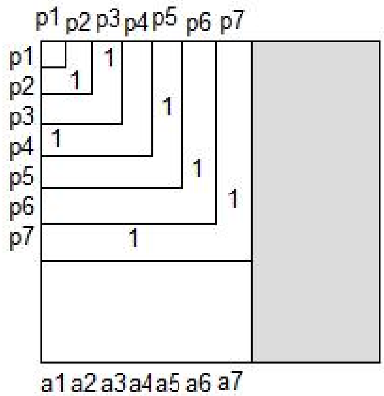
[2] la notion de système de congruences apparaît par exemple dans l'article d'Erdös à la page http ://archive.numdam.org/ARCHIVE/SDPP/SDPP$_1$972 $-$ 1973$_{14_2/SDPP_1972-1973_{14_2A8_0/SDPP_1972-1973_{14_2A8_0.pdf.}}}$

Fournissons l'exemple de la matrice de 98 pour montrer d'où proviennent certaines portions de ses colonnes :

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

98 partage avec 92 la portion bleue de la première colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 6k$).
98 partage avec 88 la portion rouge de la deuxième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 10k$).
98 partage avec 84 la portion verte de la troisième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 14k$).
98 partage avec 76 la portion yellow de la quatrièmee colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 22k$).
98 partage avec 72 la portion cyan de la cinquième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 26k$).
98 partage avec 64 la portion magenta de la sixième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 34k$).
98 partage avec 60 la portion orange de la septième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 38k$).
98 partage avec 52 la portion grise de la huitième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 46k$).
Pour les $p > \frac{x}{2}$, le partage n'a plus lieu.
On comprend que ce mécanisme du partage de portions de colonnes est tel que de très grands nombres partagent de tout petits morceaux haut-gauche de matrices (il faut soustraire 210 à $2ng$ pour obtenir à peine un petit partage de matrice 3×3.).
Ces partages de portions de colonnes découlent directement des propriétés de la relation de congruence telle que définie par Gauss.

La matrice suivante a un 1 au moins par ligne sans qu'aucune de ses sous-matrices carrées ne contienne un 1 par ligne :



La partie grisée à droite de la matrice correspond aux colonnes dans lesquelles il ne peut y avoir que des 0.
La matrice de taille $p_7 \times p_7$ contient un 1 par ligne alors que les matrices en haut à gauche de taille $p_6 \times p_6$, ou bien $p_5 \times p_5$, ou encore $p_4 \times p_4$, ou $p_3 \times p_3$, ou $p_2 \times p_2$ ou enfin $p_1 \times p_1$ contiennent toutes une de leurs lignes qui ne contient que des 0.
Cette matrice inventée est un peu spéciale : on a dû mettre des 1 dans la partie "nord-est" des lignes de la matrice, sans mettre de 1 à gauche de la diagonale dans ces mêmes lignes. Dans les faits, on constate sur les quelques matrices étudiées que quand il y a un 1 à droite de la diagonale dans une ligne, il y a également dans cette ligne un 1 à gauche de la diagonale.
En fait, les lignes de la matrice codent les factorisations des $2x - p$, avec p premier impair.
Voyons de ce fait (après avoir étudié comment se partagent les colonnes des matrices) comment se partagent les lignes des matrices.
La $9^{ème}$ ligne de la matrice de 98 qui code le nombre $98 - 29 = 69 = 2 \times 23$ a le même début que la ^{ème} ligne de la matrice de 92 qui code le même nombre 69.
Quand $2x - 2x' = p - p'$, les lignes des matrices correspondant aux nombres $2x - p$ et $2x' - p'$ correspondent au même nombre. Plus ces nombres sont proches, plus les lignes ont des longueurs proches, l'une étant préfixe de l'autre.
De la même façon que les colonnes "proviennent" d'extensions (au sens de la théorie des langages) de colonnes de différentes matrices de nombres plus petits, les lignes "proviennent" d'extensions de lignes de différentes matrices de nombres plus petits.
Tout cela illustre que par cette méthode, on ne peut aboutir à rien, comme beaucoup le disent...

Soit la suite de mots binaires définie de la façon suivante :

- $S_1 = 1$
- $S_2 = 01$
- $S_3 = 001$
- S_n est un mot binaire défini ainsi :

$$\begin{cases} \mathrm{S}_n(i) = 1 \iff \bigwedge\limits_{n-2i \leq j \leq n-1} [S_j(i) = 0] & \text{pour } \ 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \\ \\ \mathrm{S}_n(i) = 0 & \text{pour } \lfloor \frac{n}{3} \rfloor < i < n \\ \\ \mathrm{S}_n(n) = 1 & \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall\, n \ \geq \ 3, \ \exists\, i \ \leq \ n, S_i \text{ et } S_{n-i-1} \ \text{ contiennent tous les deux un seul 1} \\ \iff \\ 2n \ = \ (2i-1) \ + \ (2n-2i-1) \text{ est une décomposition de Goldbach de } 2n. \end{array}}$$

Dans cette note, la conjecture de Goldbach est présentée d'abord sous l'angle de l'arithmétique des tissus de Lucas ([1]), puis dans le cadre de la combinatoire des mots.

Lorsqu'on étudie la conjecture de Goldbach, on peut se focaliser sur la "première" décomposition de Goldbach d'un nombre pair (i.e. celle qui fait intervenir un nombre premier le plus petit possible comme premier sommant). On va voir ici que le fait d'étudier plutôt la décomposition de Goldbach que l'on appellera "centrale" (i.e. dont les deux nombres premiers sont le plus proche possible de la moitié du nombre pair considéré) peut être intéressant.

On choisit d'associer à chaque nombre pair de la forme $2n = 6x + 4$ une grille de booléens de taille $largeur = x$ sur $longueur = 3x$ définie ainsi : les cases $(i, [(2i + 1)k] + i)$ de la grille valent 1 (pour k strictement positif) et les autres cases de la grille valent 0.

A un nombre pair de la forme $2n = 6x+6$ (resp. $2n = 6x+8$), on associe une grille de booléens dont le remplissage s'effectue de la même façon que ci-dessus mais la grille est de taille x sur $3x + 1$ (resp. $3x + 2$).

Donnons deux exemples : au nombre 28 est associée la grille suivante, de taille 4 sur 12.

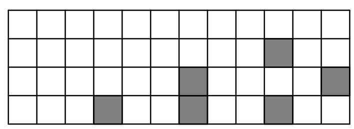


Figure 1: Grille de 28

Au nombre 40 est associée la grille suivante de taille 6 sur 18.

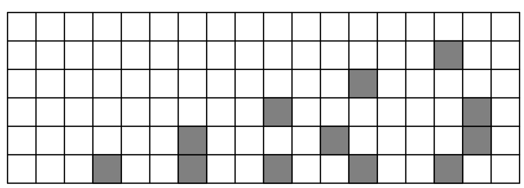
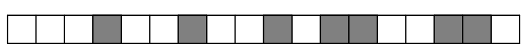


Figure 2: Grille de 40

Calculons maintenant pour chaque colonne le résultat d'un "ou" booléen appliqué à tous les éléments de la colonne. Par exemple, comme résultat du "ou" appliqué aux colonnes de la grille de 40, on obtient la ligne de booléens suivante :



Comme attendu, cette ligne est une suite de booléens associés aux nombres impairs successifs, exprimant le fait que chacun d'eux est premier ou composé (les 3 premiers 0 indiquent que 3, 5 et 7 sont premiers puis le premier 1 indique que 9 est composé, etc).

On obtient cette suite résultante de booléens, bien que l'on ait considéré tous les nombres impairs (et non seulement les impairs premiers), à cause de la symétrie inhérente au problème de Goldbach. Si un nombre composé inférieur à n est non congru à $2n$ selon tout module inférieur à n, son complémentaire, s'il est premier, sera congru à $2n$ selon certains modules.

Imaginons maintenant que l'on "plie" la grille de booléens obtenue selon une ligne verticale centrale (ainsi que le proposait Laisant dans [2]). Si la grille est de longueur paire, la ligne centrale sera entre deux colonnes. Si la grille est de longueur impaire, la ligne centrale sera au milieu d'une colonne. Les figures 3 et 4 visualisent les lignes centrales des grilles de 28 et de 46.

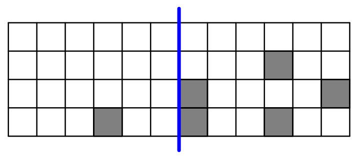


Figure 3: Ligne de pli de 28

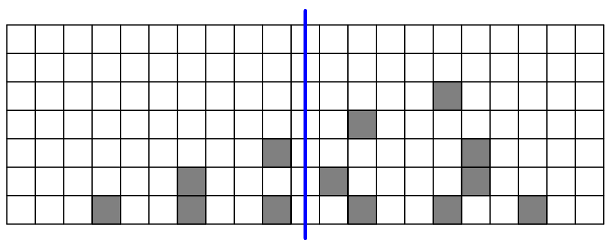


Figure 4: Ligne de pli de 46

Calculons la taille minimale fen d'une fenêtre centrée autour de la ligne centrale et qui a un zéro à ses deux extrémités. Si la ligne est de longueur impaire et que la case centrale contient un 0, alors le nombre pair $2n$ auquel on s'intéresse est un double de premier. La fenêtre est alors de taille 1. Dans les autres cas, $2n = (n - fen + 1) + (n + fen - 1)$ est une décomposition de Goldbach de $2n$.

Voyons quelques exemples : 22 a pour ligne de booléens la ligne suivante. La case centrale contenant un 0, la taille de la fenêtre est 1 et 22 est un double

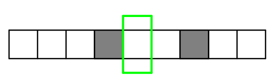


Figure 5: Fenêtre de 22

de premier.

44 a pour ligne de booléens la ligne suivante. La taille minimum de la fenêtre

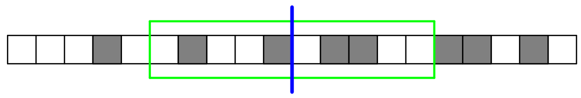


Figure 6: Fenêtre de 44

nécessaire pour obtenir deux 0 symétriques autour de la ligne centrale est 10. $44 = (22-10+1) + (22+10-1) = 13 + 31$ est une décomposition de Goldbach de 44.

Pour prouver la conjecture de Goldbach, il faudrait être capable de prouver que fen est toujours inférieur ou égal à $longueur$.

Etudions maintenant la suite constituée par les tailles des fenêtres qui permettent de trouver la décomposition de Goldbach du nombre pair considérée que l'on appelle "centrale" car ses deux sommants sont le plus proche qu'il est possible de la moitié du nombre pair considéré. Voici son début :

1−2−1−4−3−4−1−2−1−4−3−4−1−2−1−4−3−10−1−6−7−4−5−10−1−2−1−10−5−4−7−6−1−10−3−4−1−2−1−4−3−16−1−6−13−4−9−10−1−8−13−4−5−16−1−2−1−10−5−4−7−6−1−16−3−4−1−2−1−16−5−4−7−6−1−10−3−16−1−6−13−4−15−10−1−8−13−10−5−12−7−8−1−10−3−4−...

La sous-séquence $1-2-1$ qui apparaît fréquemment correspond aux nombres premiers jumeaux (si deux nombres premiers sont jumeaux, leurs doubles respectifs vérifient trivialement la conjecture de Goldbach et la taille de la fenêtre qui leur est associée est 1) ; entre eux deux, il y a un double de nombre pair (double du pair qui se situe entre les nombres premiers jumeaux) qui vérifient également la conjecture avec une taille de fenêtre égale à 2 car il est la somme des deux premiers jumeaux en question.

Cette suite semble posséder une propriété surprenante : elle comporte certaines sous-séquences qui sont des palindromes, au sens de la théorie des langages. Par exemple, $1-2-1-4-3-4-1-2-1$ est un palindrome ou bien (à partir de l'élément en position 13 de la suite), la sous-séquence $1-2-1-4-3-10-1-6-7-4-5-10-1-2-1-10-5-4-7-6-1-10-3-4-1-2-1$ est également un palindrome.

Les cinq palindromes que l'on trouve dans la séquence des tailles de fenêtres pour les nombres pairs inférieurs à 100 se situent entre les nombres suivants : entre 10 et 26, entre 14 et 34, entre 16 et 32, entre 22 et 26 et entre 34 et 86. Ces séquences sont entre deux doubles de premier ou entre deux puissances de 2. Mais la condition en question est nécessaire mais non suffisante puisqu'entre 10 et 22, qui sont tous deux des doubles de premiers, on n'a pas de palindrome de la séquence des fenêtres.

Une tentative vaine de trouver un palindrome plus long, notamment sur la séquence de fenêtres calculées pour les nombres pairs jusqu'à 10000, fait abandonner cette voie utilisant la propriété de palindromie (si la palindromie existait toujours, on imagine que la propriété $fen < longueur$ serait fatalement vérifiée par des nombres plus grands si elle l'était par des nombres plus petits...).

Si l'on programme le calcul de la taille de la fenêtre pour les nombres pairs inférieurs à 500, les fenêtres ont une taille qui n'excède jamais 50. Intéressons-nous à la fonction qui à une taille de fenêtre donnée associe les nombres pairs pour qui cette taille de fenêtre permet de trouver une décomposition de Goldbach "centrale". Cette fonction est fournie ci-après :

fen = 1 : 10 14 22 26 34 38 46 58 62 74 82 86 94 106 118 122 134 142 146 158 166 178 194 202 206 214 218 226 254 262 274 278 298 302 314 326 334 346 358 362 382 386 394 398 422 446 454 458 466 478 482
fen = 2 : 12 24 36 60 84 120 144 204 216 276 300 360 384 396 456 480
fen = 3 : 18 30 42 78 90 138 162 198 210 222 258 330 390 450 462
fen = 4 : 16 20 28 32 40 52 68 80 88 100 112 128 140 152 172 200 208 212 220 268 308 320 340 352 388 392 452 460 472
fen = 5 : 54 66 114 126 150 186 270 306 354 474
fen = 6 : 48 72 96 132 156 168 264 288 324 336 372 468 492
fen = 7 : 50 70 130 154 190 266 286 290 370 374 410 434 470 490
fen = 8 : 108 180 192 240 312 348 408
fen = 9 : 102 318 342 378 438 498
fen = 10 : 44 56 64 76 104 124 160 176 184 196 236 244 280 296 316 344 364 376 380 404 440 464 484 496
fen = 11 : 234 282 294 366 402
fen = 12 : 444
fen = 13 : 98 110 170 182 230 238 250 322 338
fen = 14 : 228 252 420
fen = 15 : 174 246 426 486
fen = 16 : 92 116 136 148 164 188 224 232 248 284 304 328 332 356 416 424 428
fen = 17 : 414
fen = 18 : 432
fen = 19 : 242 310 350 418 430
fen = 20 :
fen = 21 :
fen = 22 : 256 260 436 500
fen = 23 :
fen = 24 :
fen = 25 : 406 494
fen = 26 :
fen = 27 :
fen = 28 : 272 368 400 412 448
fen = 29 :
fen = 30 :
fen = 31 : 442
fen = 32 :
fen = 33 :
fen = 34 : 292 488
fen = 35 :
fen = 36 :
fen = 37 :
fen = 38 :
fen = 39 :
fen = 40 : 476

fen = 41 :
fen = 42 :
fen = 43 :
fen = 44 :
fen = 45 :
fen = 46 :
fen = 47 :
fen = 48 :
fen = 49 :
fen = 50 :

On observe certaines régularités : par exemple, les nombres pairs de fenêtre 2 sont tous des $12k$. Les $fen = 3$ sont tous des $6(2k+1)$. Les $fen = 4$ sont tous des $4k$. Les $fen = 5$ sont tous des $6k$. Les $fen = 6$ sont tous des $12k$ et les $fen = 7$ sont tous des $2pq$, p et q premiers impairs. De la même façon qu'Euler a trouvé une formule extraordinaire, basée sur les nombres pentagonaux, qui calcule la somme des diviseurs d'un nombre ([4]), on peut imaginer qu'il existe une formule qui permet de calculer la taille de la fenêtre. Cette formule, si on la trouvait, permettrait de démontrer que la fenêtre est toujours d'une taille très inférieure à la longueur du rectangle. La suite, trivialement, est constituée de la façon suivante : $fen(i) = k \iff fen(i-k+1) = fen(i+k-1) = 1$

Si l'on se place dans le champ de la combinatoire des mots (cf Lothaire [3]), on travaille ici sur des mots binaires (les chaînes de booléens) présentant certaines périodicités. Le théorème de Fine et Wilf doit par exemple nous permettre de savoir que le mot binaire associé à un nombre pair ne présente pas de périodicité parce qu'il n'est pas assez long (de longueur $3x$ alors que la périodicité n'est obtenue que pour une longueur supérieure au produit des impairs inférieurs à $2x+1$ qui est très supérieur à $3x$, x étant la largeur de la grille associée au nombre pair considéré). On connaît également certaines propriétés des mots binaires utilisés ici (elles ne contiennent jamais 3 zéros successifs à part au début, 3, 5 et 7 étant les seuls premiers impairs se suivant de la sorte). Une étude précise de cette référence bibliographique nous permettra peut-être d'en comprendre plus encore.

Idéalement, comme la conjecture "tout pair $2x$ partage avec $2x+6$ au moins l'un de ses décomposants de Goldbach" semble aussi vraie que celle de Goldbach (sic !), il serait esthétique de trouver comment, lors du passage d'une grille à la grille qui a 3 colonnes et une ligne de plus, on conserve au moins un couple de colonnes vides symétriques par rapport à la ligne centrale.

Bibliographie

[1] A.M. Decaillot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236.
[2] C.A. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Ed. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.
[3] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Ed. Cambridge University Press, 1997.
[4] L.Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport*

à la somme de leurs diviseurs, p.241-253 Commentatio 175 indicis Enestroemiani - Bibliothèque impartiale 8, 1751, p. 10-31 http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE$_{E}ULER_{12}$

Etude combinatoire de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella

16 avril 2009

1 Introduction

La conjecture de Goldbach (1742) énonce que tout nombre pair $2x$ supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers. Est présentée ici une vision combinatoire de la Conjecture de Goldbach.

2 Compter le nombre de sommes de deux sommants premiers impairs inférieurs à un nombre premier donné

$3+3$	$3+5$	$3+7$	$3+11$	$3+13$	$3+17$	$3+19$
	$5+5$	$5+7$	$5+11$	$5+13$	$5+17$	$5+19$
		$7+7$	$7+11$	$7+13$	$7+17$	$7+19$
			$11+11$	$11+13$	$11+17$	$11+19$
				$13+13$	$13+17$	$13+19$
					$17+17$	$17+19$
						$19+19$

On compte dans ce tableau $28 = \dfrac{7 \times 8}{2}$ sommes de deux nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à 19, 19 étant le $7^{ème}$ nombre premier impair.

De manière plus générale, il y a $\dfrac{i(i+1)}{2}$ sommes de deux nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à p_i si p_i est le $i^{ème}$ nombre premier impair.

Si l'on choisit deux éléments dans ce tableau qui sont soit sur la même ligne, soit sur la même colonne, leur valeur est forcément différente (ils sont liés par une relation d'ordre strict). Donc si l'on considère la totalité des éléments qui sont sur les deux plus grandes diagonales du tableau, on obtient $7 + 6 \; = \; 13$ sommes de deux nombres premiers impairs différentes, 19 étant le $7^{ème}$ nombre premier impair. On peut étendre notre constatation ainsi : si l'on considère l'ensemble de tous les éléments d'une même ligne, il existe un ordre total sur cet ensemble.

On va garder en mémoire ces deux calculs :

- il y a $2i-1$ sommes de deux premiers nombres impairs inférieurs ou égals à p_i qui sont toutes de valeurs différentes (donc ordonnées totalement) et qui sont comprises entre 6 et $2p_i$;
- il y a d'autre part $\dfrac{i^2-3i+2}{2}$ autres sommes comprises également entre 6 et $2p_i$ que l'on ne sait pas placer, selon la relation d'ordre total définie ci-dessus, par rapport aux $2i-1$ sommes précédentes.

3 Compter le nombre de sommes de deux sommants impairs inférieurs à un nombre premier donné

3+3	3+5	3+7	3+9	3+11	3+13	3+15	3+17	3+19	~~3+21~~	~~3+23~~	~~3+25~~	~~3+27~~	~~3+29~~	~~3+31~~	~~3+33~~	~~3+35~~
		5+5	5+7	5+9	5+11	5+13	5+15	5+17	5+19	~~5+21~~	~~5+23~~	~~5+25~~	~~5+27~~	~~5+29~~	~~5+31~~	~~5+33~~
				7+7	7+9	7+11	7+13	7+15	7+17	7+19	~~7+21~~	~~7+23~~	~~7+25~~	~~7+27~~	~~7+29~~	~~7+31~~
						9+9	9+11	9+13	9+15	9+17	9+19	~~9+21~~	~~9+23~~	~~9+25~~	~~9+27~~	~~9+29~~
								11+11	11+13	11+15	11+17	11+19	~~11+21~~	~~11+23~~	~~11+25~~	~~11+27~~
										13+13	13+15	13+17	13+19	~~13+21~~	~~13+23~~	~~13+25~~
												15+15	15+17	15+19	~~15+21~~	~~15+23~~
														17+17	17+19	~~17+21~~
																19+19

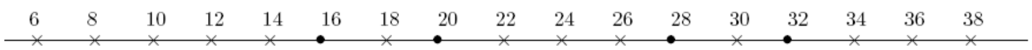
On a barré les éléments dont le deuxième sommant est supérieur strictement à 19. On a coloré en bleu les sommes de deux nombres premiers impairs.

On voit que les $\dfrac{i(i+1)}{2} = 28$ sommes de deux nombres premiers impairs vont trouver leur place dans les $p_i - 2 = 19 - 2 = 17$ colonnes. On a vu dans la première section que $2i - 1$ sommes de deux nombres premiers impairs sont forcément différentes. Elles vont donc occuper $2i - 1$ colonnes parmi les $p_i - 2$ colonnes du tableau des sommes de deux nombres impairs.

Il nous reste à placer $\dfrac{i^2 - 3i + 2}{2}$ nombres dont on espère qu'ils vont par une chance inouïe couvrir les $(p_i - 2) - (2i - 1) = p_i - 2i - 1$ colonnes qui n'ont pas été couvertes par les sommes strictement ordonnées de l'étape précédente.
Là, on est confronté au problème suivant : on peut tout à fait imaginer que, jouant de malchance, les nombres restant dans la partie haute droite du premier tableau, ne viennent pas se positionner dans les bonnes colonnes. Il subsiste donc un trou dans le raisonnement qui correspondrait notamment au fait qu'une colonne resterait sans somme associée. On va donc utiliser certaines propriétés d'ordre total sur certains ensembles de ces sommes restantes pour comprendre comment elles "couvrent" les colonnes "trous" au fur et à mesure jusqu'à l'une certaine d'entre elles.

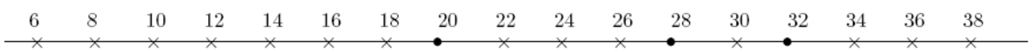
4 Avaler les trous petit à petit

Pour bien fixer les idées, réétudions la droite des nombres pairs, une fois “remplie” par les deux plus grandes diagonales du tableau des sommes de deux nombres premiers impairs. On a vu qu'il subsistait 4 trous.

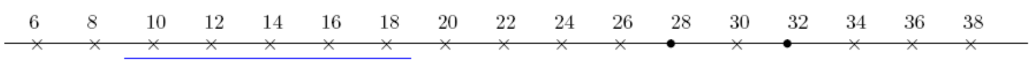


Voyons comment pourraient se positionner sur cette droite les 15 éléments restants de la partie haute-droite du premier tableau, en les prenant ligne par ligne.

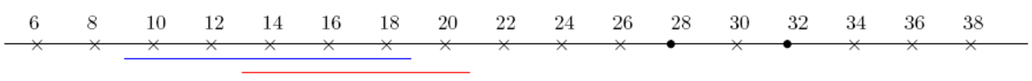
On pourrait imaginer que les 5 sommes de deux premiers impairs de la première ligne (la première somme est $2 \times 3 + 4$), qui correspondent en fait aux nombres $3+7, 3+11, 3+13, 3+17$ et $3+19$), et qui sont toutes différentes, se positionneraient ainsi sur la ligne :



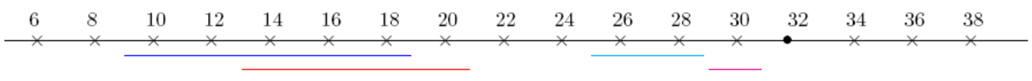
Au passage, on constate qu'elles “colmateraient le trou” 16 mais ça pourrait ne pas être le cas.
Les 4 sommes de la deuxième ligne, dont la première somme vaut $2 \times 5 + 4$, se positionneraient ainsi :



Les 3 sommes de la troisième ligne, se positionneraient quant à elles ainsi à partir de $2 \times 7 + 4$.



Ajoutons enfin les sommes des $4^{ème}$ et $5^{ème}$ lignes.



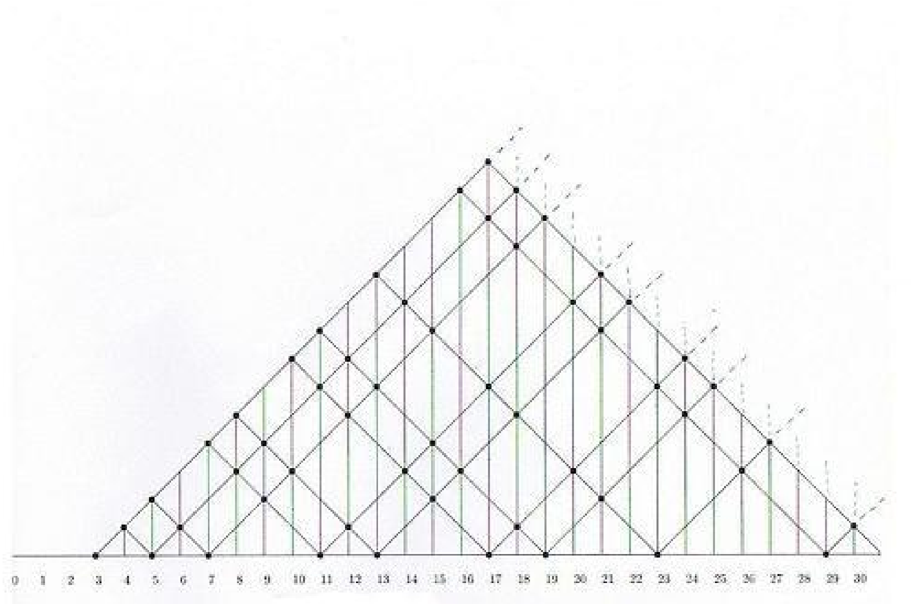
On constate au passage que les trous correspondant aux nombres 16, 20 et 28 ont été “colmatés” tandis que le trou 32 subsiste. On constate aussi qu'il y a eu une discontinuité dans nos recouvrements de la ligne : le nombre 24 n'a été “couvert” par aucune des lignes de sommes qui ont été placées au fur et à mesure sur la droite. De la même façon, la lectrice avertie aura sûrement remarqué que si dans le deuxième tableau, au lieu d'aller jusqu'au nombre premier 19, on s'était arrêté au nombre premier 17, la colonne correspondant au nombre 32 n'aurait contenu aucun élément bleu, une fois les éléments strictement supérieurs à 17 barrés (le seul bleu de cette colonne est $13 + 19$).

Imaginons ce qui va se passer quand on va considérer des nombres premiers de plus en plus grands. Les lignes du tableau des sommes de deux nombres premiers impairs, privées de leurs deux premiers éléments (appartenant aux deux plus grandes diagonales), vont être de plus en plus longues, mais elles seront toujours positionnées sur la droite des nombres pairs à partir du même nombre initial. Un nombre comme 24 finira même par être “couvert” par leur chevauchement, et ainsi tous les nombres entiers, à un moment à définir, finiront par être somme de deux nombres premiers impairs.

1 Introduction

La conjecture de Goldbach (1742) énonce que tout nombre pair $2x$ supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.

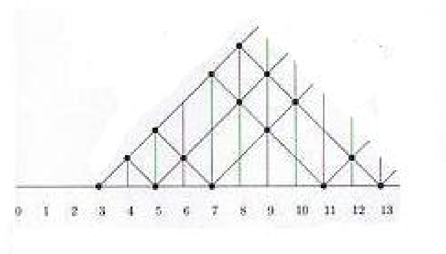
2 Représentation géométrique des décompositions



Le graphique ci-dessus permet la visualisation simultanée de toutes les décompositions Goldbach des nombres pairs successifs. A chaque nombre premier sont associées deux droites de pentes 45° et 135°. A chaque abscisse est associée une verticale. Lorsqu'il y a croisement de trois droites (la verticale associée à x et deux diagonales), on est "sur une" décomposition Goldbach de $2x$. Les croisements sur l'axe des abscisses sont dûs au fait que tout nombre premier, étant trivialement la moitié de son double, les nombres pairs double de nombres premiers vérifient la conjecture.

Le fait de passer d'un point du graphique au point qui en est immédiatement au nord-est ou bien immédiatement au sud-est correspond au fait qu'on est passé d'une décomposition Goldbach de $2n$ à une décomposition de $2n+2$ et que l'un des deux nombres premiers intervenant dans la décomposition de $2n$ avait un jumeau.

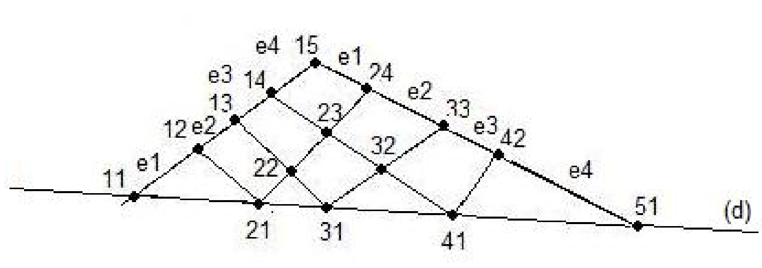
Intéressons-nous au triangle extrait en bas à gauche du graphique infini ci-dessus :



Ce triangle contient les décompositions $3+3$ à $13+13$, que l'on peut compter en les séparant en cinq, quatre, trois, deux et une sommes des deux façons suivantes (cf théorème du double-comptage simplifié) :

- séparation selon le premier sommant :
  - $3+3,\ 3+5,\ 3+7,\ 3+11,\ 3+13$
  - $5+5,\ 5+7,\ 5+11,\ 5+13$
  - $7+7,\ 7+11,\ 7+13$
  - $11+11,\ 11+13$
  - $13+13$
- séparation selon le deuxième sommant :
  - $3+13,\ 5+13,\ 7+13,\ 11+13,\ 13+13$
  - $3+11,\ 5+11,\ 7+11,\ 11+11$
  - $3+7,\ 5+7,\ 7+7$
  - $3+5,\ 5+5$
  - $3+3$

3 Problème géométrique



Posons-nous le problème suivant : on a $\frac{i(i+1)}{2}$ points dont on veut qu'ils respectent des contraintes d'alignement et dont on veut également qu'ils respectent des contraintes d'espacement entre certains points. Les contraintes d'alignement sont :

– $\forall x,\ \forall y_i,\ \forall y_j,\ (x,\ y_i)$ est aligné avec $(x,\ y_j)$
– $\forall x_i,\ \forall y_i,\ \forall x_j,\ \forall y_j,\ (x_i,\ y_i)$ aligné avec $(x_j,\ y_j) \iff x_i + y_i = x_j + y_j$

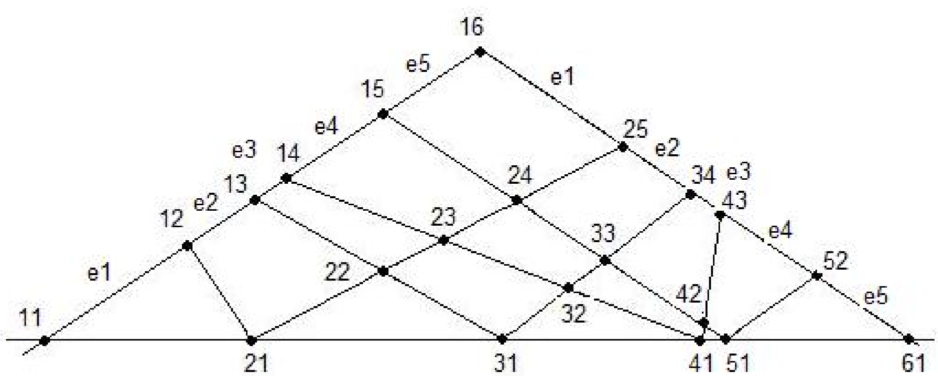
Peut-être cela aura-t-il pour conséquence les autres contraintes d'alignement suivantes ou peut-être ces nouvelles contraintes d'alignement pourraient-elles ne pas être vérifiées.

– $\forall x_i,\ \forall x_j,\ \forall y,\ (x_i,\ y)$ est aligné avec $(x_j,\ y)$

Les contraintes d'espacement (notées par les écarts $e1, e2, e3$ et $e4$ sur le schéma) sont :

– l'espacement entre les points $(1,1)$ et $(1,2)$ est le même que l'espacement entre les points $(1,5)$ et $(2,4)$;
– l'espacement entre les points $(1,2)$ et $(1,3)$ est le même que l'espacement entre les points $(2,4)$ et $(3,3)$;
– l'espacement entre les points $(1,3)$ et $(1,4)$ est le même que l'espacement entre les points $(3,3)$ et $(4,2)$;
– l'espacement entre les points $(1,4)$ et $(1,5)$ est le même que l'espacement entre les points $(4,2)$ et $(5,1)$;

Ces contraintes d'espacement entraînent que le triangle est forcément isocèle. Il pourrait ressembler à cela :



Plusieurs questions se posent alors :

– les contraintes identifiées ont-elles pour conséquence d'autres alignements entre certains points ?
– ces contraintes entraînent-t-elles le parallélisme de certaines droites ?

On peut peut-être considérer qu'une projection selon une certaine direction à définir envoie les points sur la droite des entiers, symbolisée par la base du triangle. Cette projection doit vraisemblablement projeter plusieurs points sur le même entier parce que sinon, l'intervalle borné $[3, p_i]$ se trouverait contenir plus d'entiers qu'il n'est possible.

La question cruciale est alors :

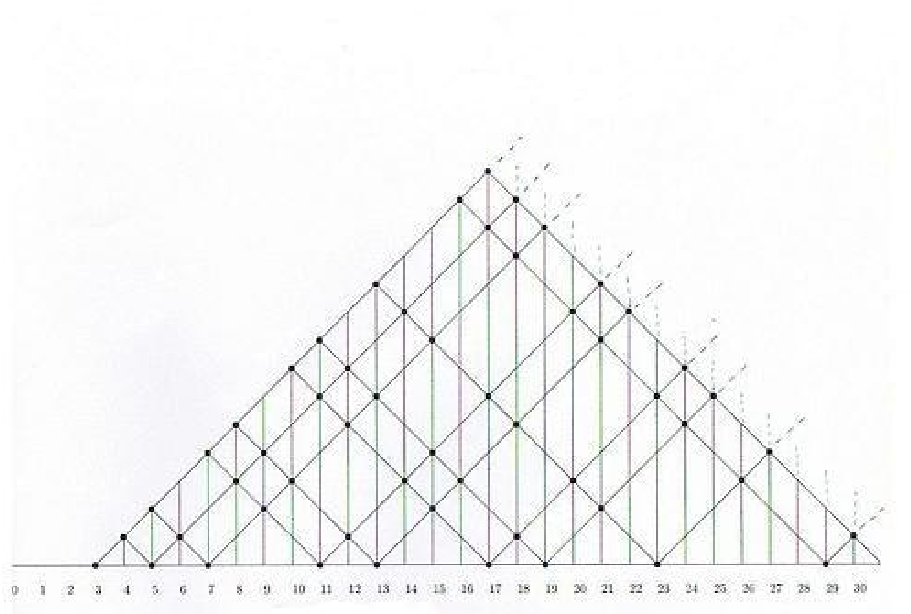
– nos contraintes auraient-elles pour conséquence que les points projetés sont tous à égale distance les uns des autres, et qu'il n'y a pas de point intermédiaire sur lequel personne ne se projetterait ?

On remarque que le graphique initialement présenté, par la perpendicularité des lignes qui le caractérise, garantit que chaque entier est "au milieu", au sens géométrique du terme, de deux nombres premiers.

1 Introduction

La conjecture de Goldbach (1742) énonce que tout nombre pair $2x$ supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.

2 Représentation géométrique des décompositions



Le graphique ci-dessus permet la visualisation simultanée de toutes les décompositions Goldbach des nombres pairs successifs. A chaque nombre premier sont associées deux droites de pentes 45° et 135°. A chaque abscisse est associée une verticale. Lorsqu'il y a croisement de trois droites (la verticale associée à x et deux diagonales), on est "sur une" décomposition Goldbach de $2x$. Les croisements sur l'axe des abscisses sont dûs au fait que tout nombre premier, étant trivialement la moitié de son double, les nombres pairs double de nombres premiers vérifient la conjecture.

Le fait de passer d'un point du graphique au point qui en est immédiatement au nord-est ou bien immédiatement au sud-est correspond au fait qu'on est passé d'une décomposition Goldbach de $2n$ à une décomposition de $2n+2$ et que l'un des deux nombres premiers intervenant dans la décomposition de $2n$ avait un jumeau.

3 Coordonnées des points des différentes sortes de droites

On peut considérer que tous les points du graphique sont des points à 3 coordonnées :

- la première coordonnée correspond au nombre impair associé à la diagonale ascendante à laquelle appartient le point (on considère que 3 est l'impair de rang 1, 5 est celui de rang 2, etc) ;
- la deuxième coordonnée correspond au nombre impair associé à la diagonale descendante à laquelle appartient le point (nota : même remarque sur le rang des impairs),
- la troisième coordonnée correspond au "rang" du nombre pair considéré (6 est le nombre pair de rang 1 qui nous intéresse, 8 celui de rang 2, 10 celui de rang 3, etc).

Tous les points ont leur triplet de coordonnées qui est de la forme $(i, j, i+j-1)$. Une diagonale ascendante contient des points qui ont tous la même première coordonnée. Une diagonale descendante contient des points qui ont tous la même deuxième coordonnée. Une verticale contient des points qui ont tous la même troisième coordonnée.
Seules sont décompositions de Goldbach d'un nombre pair les sommes de deux nombres premiers. On doit donc éliminer dans le graphique tous les points qui sont associés à un nombre composé - que celui-ci soit le premier sommant (première coordonnée, diagonale ascendante) ou le deuxième sommant (deuxième coordonnée, diagonale descendante)[1].
Pour éliminer les points correspondant au nombre composé 9 par exemple, on élimine les points de la diagonale descendante de 9 et ceux de la diagonale ascendante de 9. En l'occurrence, on éliminera tous les points qui ont 4 comme première coordonnée, ainsi que tous ceux qui ont 4 comme deuxième coordonnée. Cela équivaut à exclure de notre espace de points deux plans d'équations respectives $\{x = 4\}$ et $\{y = 4\}$.
En éliminant les points de ces deux plans, on espère qu'un point est conservé dans chacun des plans verticaux, fournissant une décomposition pour chaque nombre pair. En fait, ceci n'est pas tout à fait le cas : on voit par exemple qu'en considérant le triangle qui traite des nombres premiers jusqu'à 29, la verticale de 22 ne contient plus aucun point. Cependant, dans la moitié gauche du triangle isocèle, il semblerait qu'on ne risque pas d'éliminer tous les points de chaque plan. Il s'agit de bien comprendre pourquoi, puis peut-être de mettre au point une démonstration par récurrence.

[1] Il est amusant de visualiser la chose en considérant qu'éliminer un nombre composé consiste à envoyer une boule de billard selon une diagonale descendante depuis le point sur le côté en haut à gauche du triangle isocèle, faire rebondir la boule de billard sur la base du triangle isocèle, et lui faire alors emprunter la diagonale ascendante vers le côté en haut à droite du triangle isocèle.

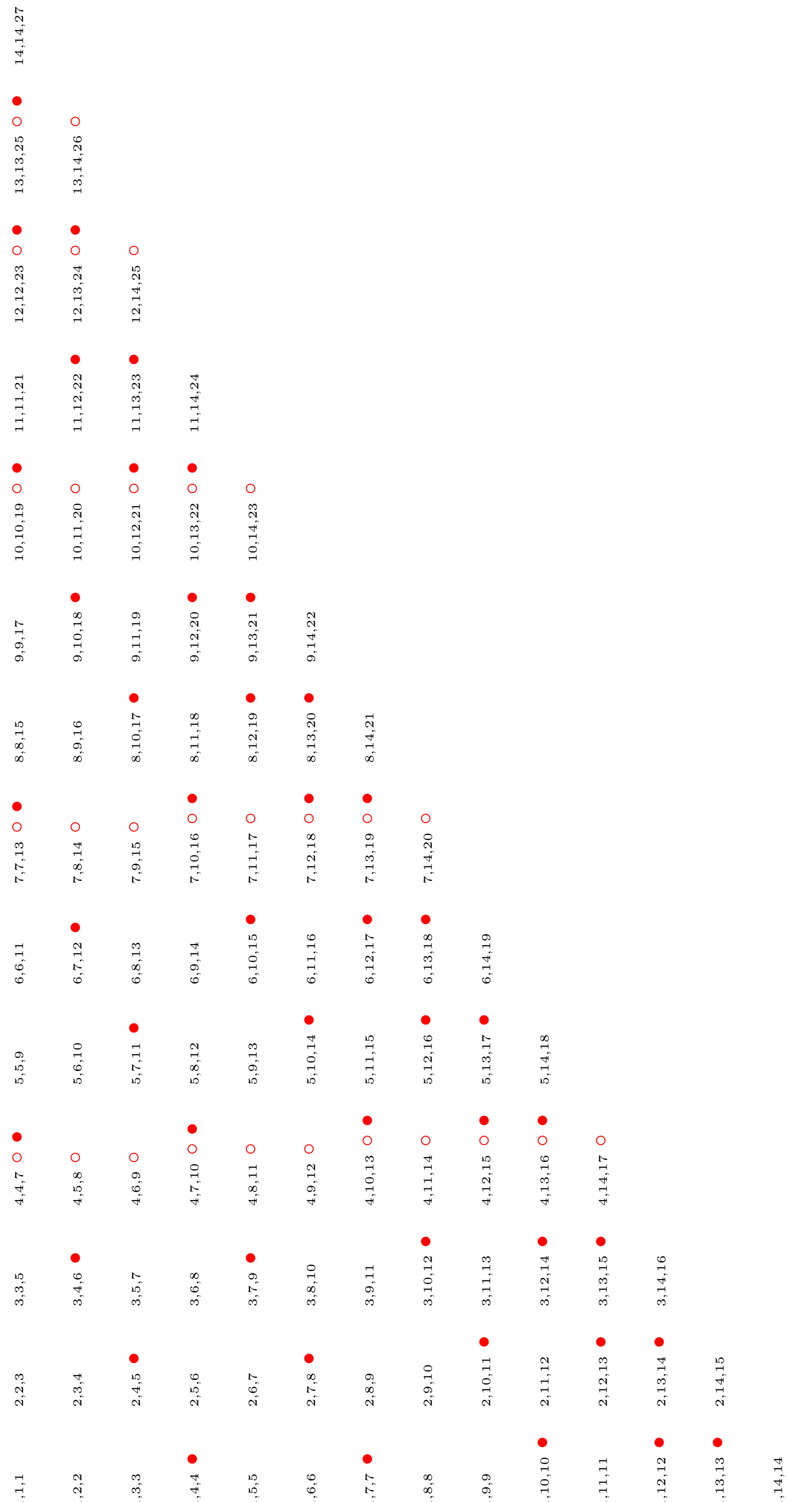
4 Elimination des sommes dont l'un des sommants est composé : traitement d'un exemple

Dans le tableau de la page suivante, on constate que le nombre de points enlevés à cause d'un nombre composé est toujours le même, si on ne se préoccupe pas des doublons : en l'occurrence 15, la moitié de $29 + 1 = 30$ si 29 est le dernier nombre premier du triangle considéré. On constate que ce nombre est également le nombre des doublons.
On constate que dans chaque plan de la troisième coordonnée z, pour z inférieur ou égal à 14 (14 étant la taille du triangle), on enlève dans chaque plan moins d'éléments qu'il n'y en a.
Chaque plan contient $\lceil \frac{i}{2} \rceil$ points pour un triangle donné. Fournissons dans le tableau suivant le nombre de points du plan et le nombre de points enlevés pour un z donné :

z	*nb points du plan*	*nb points enlevés*
1	1	0
2	1	0
3	2	0
4	2	1
5	3	1
6	3	1
7	4	2
8	4	2
9	5	2
10	5	2
11	6	3
12	6	4
13	7	4
14	7	5
15	7	4
16	6	3
17	6	5
18	5	3
19	5	3
20	4	4
21	4	2
22	3	2
23	3	3
24	2	1
25	2	2
26	1	1
27	1	0

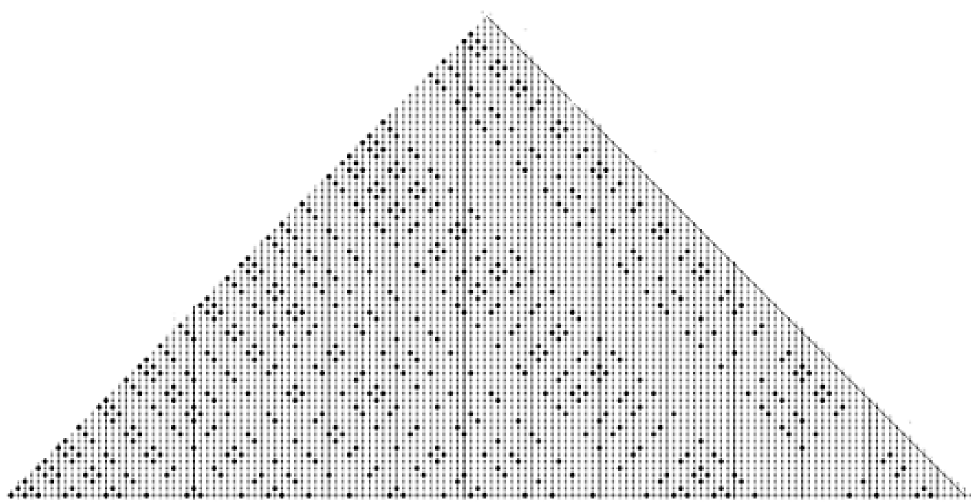
Par contre, il peut arriver qu'on enlève tous les points d'un plan pour $z > 14$, par exemple ici pour les plans $\{z = 20\}, \{z = 23\}, \{z = 25\}, \{z = 26\}$. Quand on augmente de 1 la taille du triangle isocèle lorsqu'on ajoute un nombre premier, on est sûr d'ajouter 1 au nombre de plans qui contiennent au moins un point, et le plan ajouté est le successeur du dernier plan qu'on avait alors. Les points supprimés viennent d'être ajoutés. Le solde des décompositions de Goldbach est strictement positif en quelque sorte (si on est en train d'ajouter le plan $z = 29$, on a un solde net de $\Pi(29) - 1$ décompositions de Goldbach sur les $\frac{29-1}{2}$ points qui ont été ajoutés au triangle). Quand on augmente de 1 la taille du triangle isocèle alors qu'on ajoute un nombre composé, tout point ajouté ne pouvant être décomposition de Goldbach, le solde des décompositions de Goldbach est nul.

Le problème que je n'arrive pas du tout à résoudre est celui du prolongement d'une verticale ne contenant aucune décomposition de Goldbach (celle de $z = 20$ déjà citée par exemple). Dans les faits, son plan va être satisfait par un nombre premier ultérieur 31 (point de coordonnées $(6, 15, 20)$ pour le nombre pair 22) mais ne pourrait-on pas imaginer que l'ajout successif de multiples nombres composés (on sait seulement par le postulat de Bertrand qu'un nombre premier est toujours strictement inférieur au double du nombre premier précédent) laisse la ligne vide dans le même état jusqu'à ce qu'elle atteigne le haut du triangle, ce qui correspondrait à un entier sans décomposition de Goldbach ?


1,1,1
2,2,3
3,3,5
4,4,7
5,5,9
6,6,11
7,7,13
8,8,15
9,9,17
10,10,19
11,11,21
12,12,23
13,13,25
14,14,27
1,2,2
2,3,4
3,4,6
4,5,8
5,6,10
6,7,12
7,8,14
8,9,16
9,10,18
10,11,20
11,12,22
12,13,24
13,14,26
1,3,3
2,4,5
3,5,7
4,6,9
5,7,11
6,8,13
7,9,15
8,10,17
9,11,19
10,12,21
11,13,23
12,14,25
1,4,4
2,5,6
3,6,8
4,7,10
5,8,12
6,9,14
7,10,16
8,11,18
9,12,20
10,13,22
11,14,24
1,5,5
2,6,7
3,7,9
4,8,11
5,9,13
6,10,15
7,11,17
8,12,19
9,13,21
10,14,23
1,6,6
2,7,8
3,8,10
4,9,12
5,10,14
6,11,16
7,12,18
8,13,20
9,14,22
1,7,7
2,8,9
3,9,11
4,10,13
5,11,15
6,12,17
7,13,19
8,14,21
1,8,8
2,9,10
3,10,12
4,11,14
5,12,16
6,13,18
7,14,20
1,9,9
2,10,11
3,11,13
4,12,15
5,13,17
6,14,19
1,10,10
2,11,12
3,12,14
4,13,16
5,14,18
1,11,11
2,12,13
3,13,15
4,14,17
1,12,12
2,13,14
3,14,16
1,13,13
2,14,15
1,14,14

Annexe : Dessin du tissage Goldbach de Wardley

J'ai découvert le graphique de représentation simultanée de toutes les décompositions de Goldbach en septembre 2005. Des recherches sur la toile m'ont amenée au site de Andy Wardley, un anglais qui avait abouti à un schéma similaire, consultable sur la toile (http ://wardley.org/misc/goldbach.html). Est fourni ici un extrait du graphique de Wardley, pour des abscisses allant jusqu'à 143, composé car divisible par 11. Noter la succession de 5 nombres composés consécutifs de 115 à 125.



1 Méthode constructive de calcul d'un décomposant de Goldbach d'un nombre pair par affectation de mots binaires

Voici quels sont les mots binaires de longueur 3, 5, 7 et 9 à associer à un nombre pair en fonction de la classe de congruence de sa moitié[1] . On associera à un nombre pair autant de mots qu'il y a de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à sa racine. On comprend qu'il est aisé de généraliser. Il restera à démontrer que le mot final associé à un nombre pair (par "ou booléen" de puissances de ses mots associés) contient toujours un 0. Le fait de barrer la première lettre d'un mot correspond au fait que ce mot est de longueur impaire (sa ligne de pliage tombe au milieu d'une lettre).

1.1 Mots de longueur 3 à associer au nombre pair

- doubles de $6k$: 010
- doubles de $6k+1$ ou de $6k+5$: ~~0~~11
- doubles de $6k+2$ ou de $6k+4$: 101
- doubles de $6k+3$: ~~1~~00

1.2 Mots de longueur 5 à associer au nombre pair

- doubles de $10k$: 00100
- doubles de $10k+1$ ou de $10k+9$: ~~0~~0110
- doubles de $10k+2$ ou de $10k+8$: 01010
- doubles de $10k+3$ ou de $10k+7$: ~~0~~1001
- doubles de $10k+4$ ou de $10k+6$: 10001
- doubles de $10k+5$: ~~1~~0000

1.3 Mots de longueur 7 à associer au nombre pair

- doubles de $14k$: 0001000
- doubles de $14k+1$ ou de $14k+13$: ~~0~~001100
- doubles de $14k+2$ ou de $14k+12$: 0010100
- doubles de $14k+3$ ou de $14k+11$: ~~0~~010010
- doubles de $14k+4$ ou de $14k+10$: 0100010
- doubles de $14k+5$ ou de $14k+9$: ~~0~~100001
- doubles de $14k+6$ ou de $14k+8$: 1000001
- doubles de $14k+7$: ~~1~~000000

[1] Ces régularités font penser à la loi de réciprocité quadratique.

1.4 Mots de longueur 9 à associer au nombre pair

- doubles de $18k$: 000010000
- doubles de $18k+1$ ou de $18k+17$: 000011000
- doubles de $18k+2$ ou de $18k+16$: 000101000
- doubles de $18k+3$ ou de $18k+15$: 000100100
- doubles de $18k+4$ ou de $18k+14$: 001000100
- doubles de $18k+5$ ou de $18k+13$: 001000010
- doubles de $18k+6$ ou de $18k+12$: 010000010
- doubles de $18k+7$ ou de $18k+11$: 010000001
- doubles de $18k+8$ ou de $18k+10$: 100000001
- doubles de $18k+9$: 100000000

2 Application à la recherche d'un décomposant de Goldbach de 100

100 est un double de pair. Son mot final associé est de longueur paire.
50, la moitié de 100 est un $6x+2$, on associe au nombre 100 le mot de longueur 3 : 101.
50 est un $10k$, on associe au nombre 100 le mot de longueur 5 : 00100.
50 est un $14k+8$, on associe au nombre 100 le mot de longueur 7 : 1000001.
50 est un $18k+14$, on associe au nombre 100 le mot de longueur 9 : 001000100.
On fait un "ou booléen" de ces 4 mots. On obtient la lettre 0 en position 2.
Donc $(50-2\times2+1)+(50+2\times2-1)=47+53$ est une décomposition de Goldbach de 100.

3 Application à la recherche d'un décomposant de Goldbach de 98

98 est un double d'impair. Son mot final associé est de longueur impaire.
49, la moitié de 100 est un $6x+1$, on associe à 98 le mot de longueur 3 : 011.
49 est un $10k+9$, on associe à 98 le mot de longueur 5 : 00110.
49 est un $14k+7$, on associe à 98 le mot de longueur 7 : 1000000.
49 est un $18k+13$, on associe à 98 le mot de longueur 9 : 001000010.
On fait un "ou booléen" de ces 4 mots ou plus exactement de leurs puissances.

$$0110110 \vee 0011000 \vee 1000000 \vee 0010000 = 1111110.$$

On obtient la lettre 0 en position 6 (mot de longueur impaire, on ne compte pas la lettre sur la ligne de pli si c'est un 1, si c'est un 0, le nombre pair considéré vérifie trivialement la conjecture de Goldbach parce que c'est un double de nombre premier).
Donc $(49-2\times6)+(49+2\times6)=37+61$ est une décomposition de Goldbach de 100.

1 Introduction

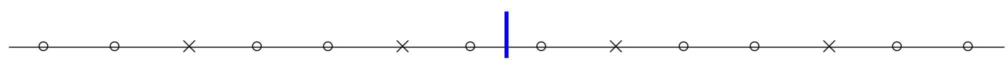
Dans cette note, on étudie un problème particulier consistant à plier des mots binaires en leur milieu.

2 Pliage d'un mot de périodicité 3

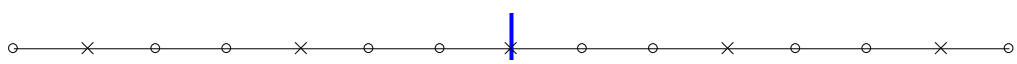
Considérons un mot binaire de périodicité 3 (les croix représentent des 1).

Etudions le résultat d'une opération particulière appelée *symétrise* appliquée au mot binaire : cette opération consiste à remplacer chaque lettre du mot par un "ou booléen" entre cette lettre elle-même et la lettre qui lui est symétrique par rapport à la ligne centrale du mot ($\circ \vee \circ = \circ$, $\times \vee \circ = \circ \vee \times = \times \vee \times = \times$). Selon la position de la ligne centrale du mot, il y a 6 façons différentes d'appliquer l'opération *symétrise*.

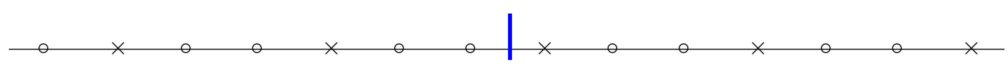
- position 1 (avant et après application de *symétrise*) :



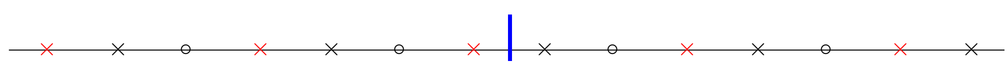
- position 2 (avant et après application de *symétrise*) :



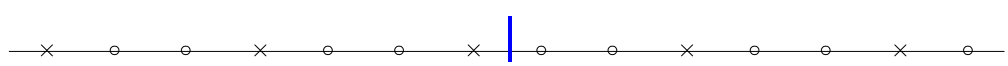
- position 3 (avant application de *symétrise*):



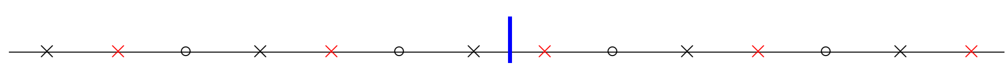
position 3 (après application de *symétrise*):



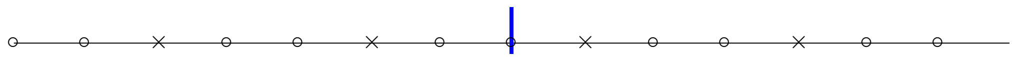
- position 4 (avant application de *symétrise*):



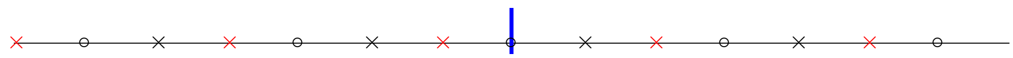
position 4 (après application de *symétrise*):



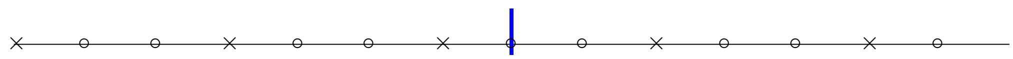
- position 5 (avant application de *symétrise*):



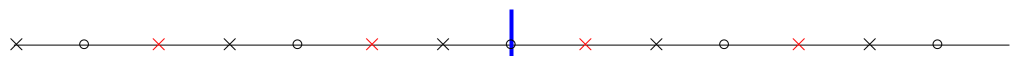
position 5 (après application de *symétrise*):



- position 6 (avant application de *symétrise*) :



position 6 (après application de *symétrise*) :



Les positions 3 et 4 aboutissent au même résultat par symétrisation. Les positions 5 et 6 également. Les 6 positions du pli possibles aboutissent donc à 4 résultats différents. On notera ces 4 résultats de la façon suivante :

- cas 3.1 : 10010|01001 ;
- cas 3.2 : 00100100100 ;
- cas 3.3 : 01101|10110 ;
- cas 3.4 : 11011011011.

On constate que la distance maximum qui sépare deux 0 symétriques par rapport à la ligne de pli est égale à 2.
L'application de la fonction *symétrise* étant simple, on se contentera de représenter les 4 cas ci-dessus par leur mot binaire de longueur 3 situé à droite du pli puisque la symétrie permet de déduire le reste du mot quand on connaît sa longueur :

- cas 3.1 : 010 ;
- cas 3.2 : 100 ;
- cas 3.3 : 101 ;
- cas 3.4 : 011.

On appellera cette représentation la représentation générique. S'il s'agissait d'établir un lien avec la conjecture de Goldbach, ces 6 sortes de plis correspondent aux 6 classes d'équivalence modulo 6 auxquelles peut appartenir la moitié du nombre pair dont on cherche une décomposition de Goldbach.

3 Généralisation

On ne détaillera pas le cas du pliage d'un mot binaire de périodicité 5 ou tout autre nombre impair supérieur. On comprend aisément que les 10 cas de périodicité 5 se ramèneront à 6 résultats possibles différents qui sont :

- cas 5.1 : 010000100001000010 ;
- cas 5.2 : 0000100001000010000 ;
- cas 5.3 : 000110001100011000 ;
- cas 5.4 : 1001010010100101001 ;
- cas 5.5 : 101001010010100101 ;
- cas 5.6 : 0110001100011000110.

La représentation par mot générique permet d'aboutir aux mots :

- cas 5.1 : 00100 ;
- cas 5.2 : 10000 ;
- cas 5.3 : 10001 ;
- cas 5.4 : 01001 ;
- cas 5.5 : 01010 ;
- cas 5.6 : 00110.

De même, les 14 cas de périodicité 7 se ramèneront à 8 résultats possibles différents.

- cas 7.1 : 0001000 ;
- cas 7.2 : 1000000 ;
- cas 7.3 : 1000001 ;
- cas 7.4 : 0100001 ;
- cas 7.5 : 0100010 ;
- cas 7.6 : 0010010.
- cas 7.7 : 0010100 ;
- cas 7.8 : 0001100.

Plus généralement, dans le cas d'un mot de périodicité $2k + 1$, on obtient $2(2k + 1)$ positions possibles différentes de la ligne de pli, qui se ramènent par symétrisation à $2k + 2$ résultats possibles différents. Les résultats sont des mots de périodicité $2k + 1$, représentables par un mot générique de longueur $2k + 1$. Ce mot générique contient au maximum 2 fois la lettre 1.

A nouveau, on constate que la distance maximum à la ligne de pli de deux 0 symétriques est égale à 2.

4 Agrégat du pliage de deux mots de périodicité différentes

On s'attendait à ce qu'il y ait 24 possibilités de faire un "ou booléen" entre l'un des 4 cas différents obtenus pour une périodicité 3 (cas 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4) et l'un des 6 cas différents obtenus pour une périodicité 5 (cas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6). Mais on voit que, la ligne de pli "tombant" selon le cas entre deux caractères (dans le cas d'un mot de longueur paire) ou "sur" un caractère (dans le cas des mots de longueur impaire), seuls certains cas peuvent être combinés à d'autres. On a seulement 12 résultats possibles de combinaisons que voici :

- 3.1 $\vee$ 5.1 : 010 $\vee$ 00100 = 011010010010110
- 3.1 $\vee$ 5.3 : 010 $\vee$ 10001 = 110011010110011
- 3.1 $\vee$ 5.5 : 010 $\vee$ 01010 = 010110111011010
- 3.3 $\vee$ 5.1 : 101 $\vee$ 00100 = 101101111101101
- 3.3 $\vee$ 5.3 : 101 $\vee$ 10001 = 101111101111101
- 3.3 $\vee$ 5.5 : 101 $\vee$ 01010 = 111101101101111
- 3.2 $\vee$ 5.2 : 100 $\vee$ 10000 = 100101100110100
- 3.2 $\vee$ 5.4 : 100 $\vee$ 01001 = 110110100101101
- 3.2 $\vee$ 5.6 : 100 $\vee$ 00110 = 101100111100110
- 3.4 $\vee$ 5.2 : 011 $\vee$ 10000 = 111011011011011
- 3.4 $\vee$ 5.4 : 011 $\vee$ 01001 = 011011111111011
- 3.4 $\vee$ 5.6 : 011 $\vee$ 00110 = 011111011011111

La période du mot résultant est le ppcm des périodes des deux mots à agréger. Le mot résultant du "ou booléen" de deux mots de périodicité 3 et 5 aura donc une période de longueur 15. On constate que tous les mots obtenus contiennent au moins un 0, et ce avant la position 5. Si l'on essaie d'agréger en plus les mots de période 7, on aboutit à des mots dont la périodicité est 105, illisibles. Un test des 48 possibilités nous conforte dans l'idée qu'on trouve un 0 avant la position 7.

5 Généralisation à envisager

Le travail présenté semble généralisable : pour un impair donné $2k+1$, il y a $2k+2$ cas. Agréger les différents cas pour tous les impairs va nous amener à considérer $2^{n-1}.n!$ configurations qui sont vraisemblablement telles (puisque la conjecture de Goldbach semble vraie) que la distance à la ligne de pli de deux 0 symétriques est toujours inférieure au plus grand impair considéré.
Ce qu'il faudrait prouver, c'est la chose suivante : quand on fait un "ou booléen" entre deux mots binaires de longueurs impaires m et n, chacun de ces mots contenant au maximum 2 fois la lettre 1 dans son écriture, le mot résultat contient un 0 avant la position $max(m,n)$.

1 Reformulation de la conjecture de Goldbach dans le domaine de la combinatoire des mots

- Premier cas : Considérons le langage constitué des mots binaires de longueur impaire des deux formes suivantes possibles : 0^k10^k ou $0^i10^j10^i$.
  Ces mots sont tous des palindromes.
  0001000 appartient à ce langage. 0100010 ou 01010 y appartiennent également.
  Il s'agit de démontrer que si l'on prend des puissances de k mots de ce langage, de longueur respective 3, 5,..., $2k+1$, ces puissances contiennent toutes au moins un 0 à une position commune inférieure à $2k+1$.

- Deuxième cas : Considérons le langage constitué des mots binaires de longueur impaire des deux formes suivantes possibles : 10^{2k} ou $00^i10^j10^i$.
  Ces mots privés de leur première lettre sont tous des palindromes.
  10000 appartient à ce langage. 00110 ou 0010010 y appartiennent également.
  Il s'agit de démontrer que si l'on prend des puissances de k mots de ce langage, de longueur respective 3, 5,..., $2k+1$, ces puissances contiennent toutes au moins un 0 à une position commune inférieure à $2k+1$. Ce deuxième cas semble pouvoir se ramener au premier, il semble plus simple dans la mesure où on dispose là, une fois supprimée la première lettre des mots, d'un mot n'ayant que des 0.

1 Tableaux de rappel des mots binaires à affecter, par longueur

longueur	3
$6k$	010
$6k+1, 6k+5$	$\cancel{0}11$
$6k+2, 6k+4$	101
$6k+3$	$\cancel{1}00$

longueur	5
$10k$	00100
$10k+1, 10k+9$	$\cancel{0}0110$
$10k+2, 10k+8$	01010
$10k+3, 10k+7$	$\cancel{0}1001$
$10k+4, 10k+6$	10001
$10k+5$	$\cancel{1}0000$

longueur	7
$14k$	0001000
$14k+1, 14k+13$	$\cancel{0}001100$
$14k+2, 14k+12$	0010100
$14k+3, 14k+11$	$\cancel{0}010010$
$14k+4, 14k+10$	0100010
$14k+5, 14k+9$	$\cancel{0}100001$
$14k+6, 14k+8$	1000001
$14k+7$	$\cancel{1}000000$

longueur	9
$18k$	000010000
$18k+1, 18k+17$	$\cancel{0}00011000$
$18k+2, 18k+16$	000101000
$18k+3, 18k+15$	$\cancel{0}00100100$
$18k+4, 18k+14$	001000100
$18k+5, 18k+13$	$\cancel{0}01000010$
$18k+6, 18k+12$	010000010
$18k+7, 18k+11$	$\cancel{0}10000001$
$18k+8, 18k+10$	100000001
$18k+9$	$\cancel{1}00000000$

2 Essayer de comprendre : étude d'exemples

On constate que les mots d'une longueur impaire donnée se déduisent des mots de longueur le nombre impair précédent, par un processus tout ce qu'il y a de plus déterministe et déterminé (les mots ne commençant pas par une lettre barrée se voient concaténer un 0 au début et à la fin, les mots commençant par une lettre barrée se voient ajouter un 0 en position 2 et concaténer un 0 à la fin, et deux mots supplémentaires sont ajoutés : 10^i1 et $\cancel{0}10^{i-1}1$ avec i valant $longueur - 1$).

On peut noter en passant que la concaténation est une opération non commutative : quand on concatène deux mots en commençant soit par l'un soit par l'autre, on a toutes les chances de ne pas aboutir au même résultat.

$$\textit{Exemple :}\quad (010)(1101) \neq (1101)(010).$$

On voit qu'on pourrait en y passant du temps trouver une formule qui fournit le mot d'une certaine longueur impaire $2k+1$ à affecter au nombre pair dont on cherche des décomposants de Goldbach, suivant la classe de congruence à laquelle appartient sa moitié modulo $2(2k+1)$.

Ce qu'il faut comprendre tout à fait, et qui semble difficile, c'est pourquoi quand on prend des puissances des mots de différentes longueurs associés à un nombre pair quelconque, on est assuré que ces mots auront tous un 0 à une position commune.

A chaque fois, on fournit la position commune, qui donne la décomposition de Goldbach "centrale"[1] du nombre pair considéré.
La formule à appliquer pour trouver la décomposition centrale de Goldbach est différente selon que le nombre pair considéré est le double d'un nombre impair ou le double d'un nombre pair : $(x - 2.pos + 2) + (x + 2.pos - 2)$ (doubles d'impair) ou bien $(x - 2.pos + 1) + (x + 2.pos - 1)$ (doubles de pair).

2.1 Du double du nombre premier 19 au double du nombre premier 23

$2x$	x	*mots associés*	*position du 0 commun*	*décomposition de Goldbach*
38	19	011 00110	1	$19+19$
40	20	101 00100	2	$(20-4+1)+(20+4-1)$ $17+23$
42	21	100 00110	2	$(21-4+2)+(21+4-2)$ $19+23$
44	22	10110 01010	5	$(22-10+1)+(22+10-1)$ $13+31$
46	23	011 01001	1	$23+23$

[1] On appelle "décomposition centrale" d'un nombre pair celle qui minimise la différence entre les deux décomposants.

2.2 Du double du nombre premier 31 au double du nombre premier 37

$2x$	x	*mots associés*	*position du* 0 *commun*	*décomposition de Goldbach*
62	31	011 00110 0010010	1	$31 + 31$
64	32	10110 01010 0100010	5	$(32 - 10 + 1) + (32 + 10 - 1)$ $23 + 41$
66	33	100 01001 0100001	3	$(33 - 6 + 2) + (33 + 6 - 2)$ $29 + 37$
68	34	101 10001 1000001	2	$(34 - 4 + 1) + (34 + 4 - 1)$ $31 + 37$
70	35	0110 1000 1000000	4	$(35 - 8 + 2) + (35 + 8 - 2)$ $29 + 41$
72	36	010 10001 1000001	3	$(36 - 6 + 1) + (36 + 6 - 1)$ $31 + 41$
74	37	011 01001 0100001	1	$37 + 37$

2.3 Du double du nombre premier 41 au double du nombre premier 47, en passant par le double du nombre premier 43

$2x$	x	*mots associés*	*position du 0 commun*	*décomposition de Goldbach*
82	41	011 00110 0001100 001000010	1	$41+41$
84	42	010 01010 0001000 010000010	1	$(42-2+1)+(42+2-1)$ $41+43$
86	43	011 01001 0001100 010000001	1	$43+43$
88	44	101 10001 0010100 100000001	2	$(44-4+1)+(44+4-1)$ $41+47$
90	45	100100100 100001000 001001000 100000000	2	$(45-4+2)+(45+4-2)$ $43+47$
92	46	101101101 100011000 010001001 100000001	8	$(46-16+1)+(46+16-1)$ $31+61$
94	47	011 01001 0100001 010000001	1	$47+47$

2.4 Du double du nombre premier 53 au double du nombre premier 59

$2x$	x	*mots associés*	*position du 0 commun*	*décomposition de Goldbach*
106	53	011 01001 0001100 000011000	1	$53 + 53$
108	54	0100 10001 0010100 000010000	4	$(54 - 8 + 1) + (54 + 8 - 1)$ $47 + 61$
110	55	0110110 1000010 0001100 000011000	7	$(55 - 14 + 2) + (55 + 14 - 2)$ $43 + 67$
112	56	101 10001 0001000 000101000	2	$(56 - 4 + 1) + (56 + 4 - 1)$ $53 + 59$
114	57	100 01001 0001100 000011000	3	$(57 - 6 + 2) + (57 + 6 - 2)$ $53 + 61$
116	58	10110110 01010010 00101000 001000100	8	$(58 - 16 + 1) + (58 + 16 - 1)$ $47 + 71$
118	59	011 00110 0010010 001000010	1	$59 + 59$

Enfin, le tableau suivant présente la recherche des décomposants de 98 et 100. J'ai un certain attachement pour 98 car ce nombre m'a fait comprendre beaucoup ; quant à 100, depuis le début de ces recherches, les expérimentations sont toujours initialement menées de 6 à 100.

$2x$	x	*mots associés*	*position du* 0 *commun*	*décomposition de Goldbach*
98	49	0110110 0011000 1000000 001000010	7	$(49-14+2)+(49+14-2)$ $37+61$
100	50	101 00100 1000001 001000100	2	$(50-4+1)+(50+4-1)$ $47+53$

Piste pour une démonstration de la conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

27 Avril 2009

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

2 Définitions

Dans la suite de cette note, on s'intéresse à une restriction de la conjecture qui est *"tout nombre pair supérieur ou égal à 6 est la somme de deux nombres premiers impairs"*. Les nombres pairs étant trivialement composés, on ne considèrera que la divisibilité par des nombres impairs.

Le travail présenté ici se situe dans la théorie des langages. Les définitions sont empruntées à Sakarovitch ([2]).
Considérons l'alphabet binaire $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
Les éléments 0 et 1 de $\mathcal{A}$ sont appelés *lettres*.
Les suites finies de lettres sont appelées *mots*.
L'ensemble des mots est noté $\mathcal{A}^*$.
On appelle *langage sur* $\mathcal{A}$ ou *langage de* $\mathcal{A}^*$ tout ensemble de mots écrits sur l'alphabet $\mathcal{A}$.
L'ensemble des mots est naturellement muni d'une opération binaire appelée la *concaténation* :

$$(a_1a_2...a_m).(b_1b_2...b_n) = (a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n)$$

Cette opération est associative, possède un élément neutre, le mot vide. On l'appellera *produit* et on appellera donc *puissance* l'itération de ce produit plusieurs fois.
Muni de la concaténation, $\mathcal{A}^*$ est un monoïde.
La concaténation n'est pas commutative puisque $\mathcal{A}$ contient deux lettres.

Exemple : $(010)(11001) \neq (11001)(010)$.

La *longueur d'un mot* est le nombres de ses lettres.
Soient f et g des mots de $\mathcal{A}^*$; g est un *facteur gauche* ou *préfixe* de f s'il existe

h tel que $f = gh$; g est *facteur gauche propre* ou préfixe propre si h est différent du mot vide. Autrement dit, g est un préfixe de f si f "commence par" g.
Si $f = a_1 a_2 ... a_m$ est un mot de $\mathcal{A}^*$, on appelle *image-miroir* de f le mot f^t :

$$f^t = a_m a_{m-1} ... a_1$$

Un mot qui est égal à son image-miroir est appelé *palindrome*.

Exemple : (000010010000) *est un palindrome.*

Dans toute la suite, nous omettrons les parenthèses autour des mots car nous avons besoin de rechercher aisément l'existence de plusieurs 0 à des positions communes dans des puissances de mots et l'usage des parenthèses ne permettrait pas une visualisation immédiate de telles propriétés car elle décalerait les lettres des différents mots les unes par rapport aux autres.

La lettre 1 sera utilisée dans les mots pour représenter d'une manière générale le fait pour un nombre d'être composé parce que divisible par un nombre impair plus petit que lui et différent de 1. Inversement, la lettre 0 sera utilisée dans les mots pour représenter le fait pour un nombre d'être non divisible par un nombre impair plus petit que lui et différent de 1.

3 Caractère symétrique de la conjecture de Goldbach

Pour résoudre notre problème, nous allons le décomposer en sous-problèmes, résoudre les sous-problèmes puis "agréger" entre elles les résolutions des sous-problèmes. Nous allons d'abord nous préoccuper de la divisibilité par 3, puis par 5, puis successivement par tous les nombres impairs inférieurs à x ($2x$ est le nombre pair dont on cherche une décomposition de Goldbach) et nous comprendrons pourquoi un nombre pair a toujours une telle décomposition[1], conditionnée par les différents caractères de divisibilité invoqués.

Etudions le caractère symétrique de la conjecture de Goldbach (un procédé de vérification expérimental de cette conjecture est présenté dans Laisant [1]). Pour cela, voyons l'exemple du nombre pair 40. Dans le tableau suivant, on place les nombres impairs inférieurs à 20 la moitié de 40, et ceux supérieurs à 20 en vis-à-vis dans un tableau quand leur somme vaut 40 ; on place également au-dessus (resp. au-dessous) des nombres supérieurs (resp. inférieurs) à 20 une lettre 0 ou 1 indiquant le fait qu'il soit divisible par 3.

1	0	0	1	0	0	1	0	0
3	5	7	9	11	13	15	17	19
37	35	33	31	29	27	25	23	21
0	0	1	0	0	1	0	0	1

On peut associer au nombre pair 40 pour la divisibilité par 3 le mot binaire suivant : 100100100100100100.
On voit que 9 ne peut pas être un décomposant de Goldbach de 40 puisqu'il est

[1] que nous appellerons sa décomposition "centrale" parce qu'elle minimise la distance des deux sommants à x.

divisible par 3. On voit également que 33 ne peut pas être un décomposant de Goldbach de 40 car il est divisible par 3.
9 et 33 parce qu'ils ne peuvent être des décomposants de Goldbach de 40 vont "entraîner avec eux" dans leur impossibilité d'être des décomposants de Goldbach de 40 leur complémentaire à 40, en l'occurrence 31 et 7.
On va représenter cela en "symétrisant" le mot binaire initial de la façon suivante :

1	0	1	1	0	1	1	0	1
3	5	7	9	11	13	15	17	19
37	35	33	31	29	27	25	23	21
1	0	1	1	0	1	1	0	1

En algèbre de Boole, on exprime cela en disant que 1 est absorbant pour l'opération "ou booléen" (symbolisée par $\vee$).

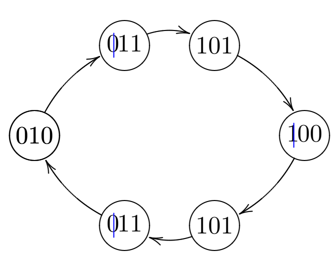
$$1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1.$$

On choisit maintenant d'associer à 40 pour la divisibilité par 3 le mot "symétrisé" suivant : 101101101101101101.

Ce mot étant un palindrome, on peut le représenter par son suffixe constitué de sa moitié droite, lue de gauche à droite, ou bien par son préfixe constitué de sa moitié gauche, lue de droite à gauche, qui sont deux mots égaux : 101101101.

On peut encore réduire le mot représentant 40 pour la divisibilité par 3 : c'est un mot périodique, la longueur de sa période la plus petite est 3. On conserve seulement 101 comme représentant de 40 en ce qui concerne la divisibilité par 3.

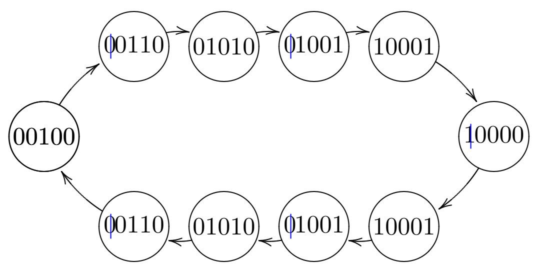
Lorsqu'on réitère cette analyse pour d'autres nombres pairs, on comprend que la représentation du caractère de divisibilité par 3 va associer aux nombres pairs $2x$ successifs les mots du cycle de 6 mots suivant après symétrisation, selon la classe de congruence à laquelle appartient x modulo 6 (selon le positionnement de leur "ligne de pli" sur le mot 100 : le pli peut être sur le 1, entre le 1 et le premier 0, sur le premier 0, entre les deux 0, sur le deuxième 0 ou entre le deuxième 0 et le 1 suivant du fait de la périodicité) :



Les nombres pairs doubles de $6k$ se voient affecter le mot 010, les nombres pairs doubles de nombres de la forme $6k+1$ se voient affecter le mot 011, et ainsi de suite jusqu'aux nombres pairs doubles de nombres de la forme $6k+5$ qui se voient affecter le mot ~~0~~11.

Certains mots du cycle ont leur première lettre barrée : cela correspond au fait que le mot en question est associé à un nombre pair qui est le double d'un nombre impair (le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à $2x - 3$ est impair).

Une étude similaire (et évidente) concernant le caractère de divisibilité par 5 nous fait aboutir au cycle contenant les 10 mots suivants :



Le cycle fournissant les mots d'une longueur impaire donnée *longueur* se déduit du cycle fournissant les mots de longueur le nombre impair précédent par un processus parfaitement déterminé (les mots ne commençant pas par une lettre barrée se voient concaténer un 0 au début et à la fin, les mots commençant par une lettre barrée se voient ajouter un 0 en position 2 et concaténer un 0 à la fin, et quatre sommets supplémentaires sont ajoutés au cycle à des positions intermédiaires à définir précisément ; à ces quatre sommets sont associés les deux mots suivants : 10^i1 et $\cancel{0}10^{i-1}1$ avec i valant $longueur - 2$).

Revenons au problème de Goldbach et à son caractère symétrique : un nombre impair est décomposant de Goldbach d'un nombre pair $2x$ donné s'il n'en est pas "empêché", de lui-même ou par son complémentaire à $2x$, sous prétexte qu'il serait composé car divisible par 3, ou bien composé car divisible par 5, ..., ou bien composé car divisible par tout nombre impair inférieur ou égal à x.

4 Exemple du nombre pair 98

$2x$	x	*mots associés*	*position du 0 commun*	*décomposition de Goldbach*
98	49	~~0~~110110 ~~0~~011000 ~~1~~000000 ~~0~~01000010	7	$(49 - 14 + 2) + (49 + 14 - 2)$ $37 + 61$

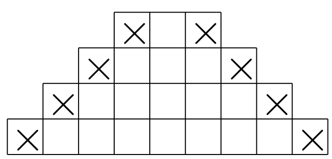
5 Affectation d'un ensemble de mots à un nombre pair

On associe au nombre pair $2x$ un ensemble de k mots de longueurs respectives $3, 5, ..., 2k+1$ où $2k+1$ est le plus grand impair inférieur ou égal à x.
On va ici distinguer deux cas selon que le nombre pair considéré est le double d'un nombre pair ou le double d'un nombre impair, i.e. considérer séparément les deux langages disjoints contenant des mots qui ont leur première lettre barrée ou pas.

- **Premier cas : nombres pairs double d'un nombre pair (tous leurs mots associés ont une initiale non barrée, sont des palindromes, et contiennent au moins une et au plus deux fois la lettre** 1)

  Trouver un décomposant de Goldbach de $2x$ consiste donc à trouver la position commune à laquelle les puissances des mots associés à $2x$, que l'on tronque pour que les mots résultant soient tous de longueur $2k+1$, contiennent tous une lettre 0. On peut parler de préfixes des puissances puisqu'on ne considère que le début du mot mais l'image de la troncature à la même longueur est plus parlante.

  Dans le pire des cas, le nombre de colonnes occupées par des 1 dans les k mots associés à $2x$ est $2k$, en positionnant les palindromes de la façon suivante :



  $2k$ étant strictement inférieur à $2k+1$, il reste forcément une colonne ne contenant que des 0 à une position inférieure ou égale à $2k+1$, le plus grand impair inférieur ou égal à x. En fait, on peut utiliser d'autres palindromes que ceux utilisés dans l'exemple de la tour de Hanoï de palindromes présentée ci-dessus et les positionner totalement autrement les uns par rapport aux autres, mais on voit difficilement comment on pourrait faire occuper un nombre de colonnes supérieur à $2k$ par des 1. Pour déduire de ce raisonnement que l'une des colonnes au moins ne contient que des 0, on utilise un principe en quelque sorte dual du principe des tiroirs[2] : ce principe énonce que si on a moins de n objets à ranger dans n tiroirs, l'un des tiroirs au moins sera vide.

[2] Le principe des tiroirs dit que si on a $n+1$ objets à ranger dans n tiroirs, l'un des tiroirs contient 2 objets.

- **Deuxième cas : nombres pairs double d'un nombre impair (tous leurs mots associés ont une initiale barrée, sont des palindromes si on les prive de leur initiale, et contiennent au moins une et au plus deux fois la lettre** 1**)**
  Si toutes les lettres barrées au début des différents mots associés à $2x$ sont des 0, on est dans le cas du double d'un nombre premier qui vérifie trivialement la conjecture de Goldbach.
  On notera donc que l'ensemble des nombres premiers est l'ensemble des nombres qui se voient affecter par notre fonction d'affectation des mots très spécifiques, commençant tous par un 0 barré.
  Si l'une des lettres barrées au début d'un des mots est un 1, on pourra peut-être utiliser le fait que les mots privés de leur première lettre sont des palindromes qui contiennent chacun soit exactement deux fois la lettre 1, soit uniquement des 0 pour à nouveau parvenir au résultat que l'une des colonnes au moins sur les $2k+1$ colonnes ne contient que des 0.

Bibliographie

[1] C.A. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Ed. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.
[2] J. Sakarovitch, *Eléments de théorie des automates*, Ed. Vuibert informatique, 2003.

Différentes formulations équivalentes
de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

Mai 2009

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

On fournira ici une formulation équivalente à la conjecture de Goldbach utilisant des mots binaires, une formulation utilisant le concept de graphe, puis une formulation utilisant des ensembles d'entiers.

Dans la suite de cette note, on s'intéresse à cette restriction de la conjecture : *"tout nombre pair supérieur ou égal à 24 est la somme de deux nombres premiers impairs"*.

2 Formulation utilisant des mots binaires

2.1 Définitions

Nous allons représenter les entiers par des mots binaires bâtis sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. L'ensemble de ces mots est muni de l'opération de *concaténation* :

$$(a_1a_2...a_m).(b_1b_2...b_n) = (a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n)$$

Si $f = a_1a_2...a_m$ est un mot, son *image-miroir* est le mot $f^t = a_ma_{m-1}...a_1$.
Un mot égal à son image-miroir est un *palindrome*, comme par exemple (000010010000).
Soient f et g des mots de $\mathcal{A}^*$; g est un *préfixe propre* de f s'il existe h non vide tel que $f = gh$.
Dans toute la suite, nous omettrons les parenthèses autour des mots.

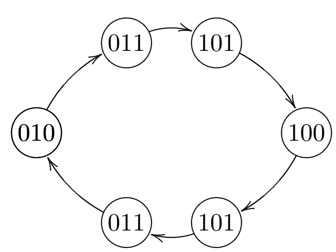
La lettre 1 représentera d'une manière générale le fait pour un nombre entier d'être composé parce que divisible par un nombre impair inférieur à lui, et différent de 1. Inversement, la lettre 0 sera utilisée pour représenter le fait pour un nombre entier d'être non divisible par un nombre impair inférieur à lui, et différent de 1.

2.2 Caractère symétrique de la conjecture de Goldbach

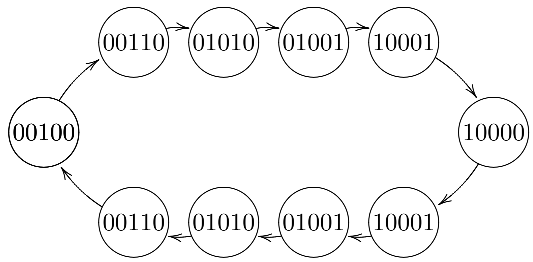
Observons un exemple. Si $2a = 40$, $\varphi(40)$ est le nombre de nombres inférieurs à 40 et premiers à 40 : on appelle ces nombres les unités génératrices du groupe $\mathbb{Z}/40$. $\varphi(x)$ est appelée la fonction indicatrice d'Euler.
Il y a $\varphi(40)/2$ couples d'impairs dont la somme vaut 40 ; il s'agit des couples $(1, 39)$, $(3, 37)$, $(5, 35)$, $(7, 33)$, $(9, 31)$, $(11, 29)$, $(13, 27)$ et $(15, 25)$. Les sommes associées à chacun de ces couples se réécrivent de la façon suivante, en utilisant les unités génératrices : $1 + 3.13$, $3 + 37$, $7 + 3.11$, $31 + 3.3$, $11 + 29$, $13 + 3.9$, $17 + 23$ et $19 + 3.7$.

Intéressons-nous successivement à la divisibilité par 3 des nombres de ces différents couples, puis à leur divisibilité par 5, puis à leurs différentes divisibilités par tous les nombres impairs inférieurs ou égaux à a.
La divisibilité par 3 étant de périodicité 3, on choisit d'associer à 40 le mot 101 de longueur 3. Ce mot représente le caractère de divisibilité par 3 des nombres 20 ± 1, 20 ± 3 et 20 ± 5
Plus généralement, au nombre $2a$ est associé pour la divisibilité par 3, le mot binaire $l_1 l_2 l_3$ de longueur 3 dans lequel l_i représente le caractère de divisibilité par 3 de $x \pm (2i - 1)$ si a est pair (resp. $x \pm (2i - 2)$ si a est impair).

Dans la mesure où l'on considère la divisibilité par 3 non seulement des nombres inférieurs à a, mais simultanément des nombres supérieurs à a (par *disjonction booléenne*), on comprend que la représentation du caractère de divisibilité par 3 va associer aux nombres pairs $2a$ successifs les mots du cycle de 6 mots suivant, selon la classe de congruence à laquelle appartient a modulo 6 (selon le positionnement de leur "ligne de pli" sur le mot 100 : le pli peut être sur le 1, entre le 1 et le premier 0, sur le premier 0, entre les deux 0, sur le deuxième 0 ou entre le deuxième 0 et le 1 suivant du fait de la périodicité) :



Une étude similaire (et évidente) concernant le caractère de divisibilité par 5 nous fait aboutir au cycle contenant les 10 mots suivants :



L'affectation des mots à un nombre pair peut être vue comme utilisant des automates séquentiels élémentaires qu'on appellera $Machine_3$, $Machine_5$, ..., $Machine_{2k+1}$.
La première machine appelée $Machine_3$ renvoie successivement les 6 mots de longueur 3 suivants $010, 011, 101, 100, 101, 011$, et retour au premier mot de longueur 3, puis répétition des mots de la liste dans le même ordre, indéfiniment.
La deuxième machine appelée $Machine_5$ renvoie successivement les 10 mots de longueur 5 suivants $00100, 00110, 01010, 01001, 10001, 10000, 10001, 01001, 01010,$ 00110, et retour au premier mot de longueur 5, puis répétition des mots de la liste dans le même ordre, indéfiniment.
Pour trouver les mots fournis par la machine $Machine_{2k+3}$ quand on a les mots de la machine $Machine_{2k+1}$, il faut procéder de la manière suivante :

- les k premiers mots de la machine $Machine_{2k+3}$ sont les k premiers mots de la machine $Machine_{2k+1}$ auxquels on a appliqué le traitement suivant : les mots de rang pair se voient concaténer un 0 au début et à la fin tandis que les mots de rang impair se voient concaténer un 0 à la fin, et rajouter un 0 comme deuxième lettre (toute lettre après la deuxième se voit décaler d'un rang à droite) ;

- les k derniers mots de la machine $Machine_{2k+3}$ sont les k derniers mots de la machine $Machine_{2k+1}$ auxquels on a appliqué un traitement identique à celui qui a été appliqué aux k premiers mots ;

- le mot central de la machine $Machine_{2k+3}$ est le mot central de la machine $Machine_{2k+1}$ auquel on a concaténé deux 0 à l'extrémité droite ;

- on ajoute deux mots entre les k premiers mots et le mot central qui sont : $0.1.0^{2k}.1$ et $1.0^{2k+1}.1$;

- on ajoute deux mots entre le mot central et les k derniers mots qui sont : $1.0^{2k+1}.1$ et $0.1.0^{2k}.1$.

Pour le premier nombre pair que l'on considère (i.e. 24), les curseurs dans les 5 premières machines sont dans une position particulière.
Pour trouver les mots associés aux nombres pairs successifs suivant 24, on peut imaginer que les curseurs avancent d'un cran dans chaque machine, et pour

chaque nouveau double de nombre impair $2k+1$, on ajoute une nouvelle machine qui renvoie les mots de longueur $2k+1$ qu'il faudra affecter à tous les nombres pairs à venir (lorsqu'on introduit une nouvelle machine son curseur est positionné sur le mot que l'on a coutume d'appeler *central* de la machine en question, i.e. un 1 suivi de $2k$ zéros).

2.3 Calcul des mots associés à un nombre pair

L'algorithme ci-dessous calcule les mots associés à un nombre pair donné.

$m = \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$
pour i *allant de* 1 *à* m *de* 1 *en* 1
  si $(x \; mod \; 4i+2 \; = \; 2i+1)$ *alors* $mot(2x,i) \; = \; 1.0^{2i}$
  sinon si $(x \; mod \; 4i+2 \; = \; 0)$ *alors* $mot(2x,i) \; = \; 0^i.1.0^i$
  sinon pour j *allant de* 2 *à* $4i$ *de* 2 *en* 2
    si $(2x \; mod \; 8i+4 \; = \; j)$ *ou* $(2x \; mod \; 8i+4 \; = \; 8i+4-j)$ *alors*
      si $(x \; mod \; 2 \; = \; 0)$ *alors*
        $mot(2x,i) \; = \; 0^{i-\frac{j}{4}}.1.0^{\frac{j}{2}-1}.1.0^{i-\frac{j}{4}}$
      sinon
        $mot(2x,i) \; = \; 0.0^{i-\frac{j}{4}-1}.1.0^{\frac{j}{2}-1}.1.0^{i-\frac{j}{4}-1}$

2.4 Remplissage de la matrice carrée

L'étape suivante consiste à mettre ces mots dans une matrice carrée M de taille $m \times m$, dans l'ordre dans lequel on les a trouvés, en effectuant ce qu'on appellera la "complétion" des mots.
L'opération de multiplication qu'on utilise sur deux mots est la *concaténation* des mots. On peut ainsi parler de *puissance* quand on concatène plusieurs fois un même mot.
Si le mot $mot(2x,i)$ est d'une longueur supérieure à m, on met dans la ligne i de la matrice le préfixe propre de $mot(2x,i)$ de m lettres.
Si le mot $mot(2x,i)$ est d'une longueur inférieure à m, on prend le préfixe de m lettres d'une puissance de $mot(2x,i)$ qui a quant à elle (la puissance de $mot(2x,i)$) plus de m lettres.

On lit maintenant les mots dans les colonnes de la matrice au lieu de les lire dans les lignes.
L'un des mots (celui de la colonne *colonne*) ne contient qu'un seul 1 (ce 1 est situé sur une ligne bien précise : la ligne *ligne* telle que *ligne + colonne = m + 1*).

La bijection colonne / décomposant de Goldbach s'effectue de la manière suivante :

si $(x \; mod \; 2 \;=\; 1)$ $f(colonne) \;=\; x+2-2.colonne$
sinon $f(colonne) \;=\; x+1-2.colonne$
si $((f(colonne) \;=\; x) \;\vee\; (2x \; mod \; f(x) \;\neq\; 0))$
alors $f(colonne)$ *est un décomposant de Goldbach de* $2x$.

2.5 Traitement d'un cas simple

Les 5 mots associés au nombre pair 24 sont :
010
01010
0010100
010000010
10000000001

La matrice carrée de taille 5×5 est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mots verticaux ne contenant qu'un seul 1 sont ceux des colonnes 1, 3 et 4, qui correspondent aux décomposants de Goldbach de 24 que sont 11, 7 et 5 $(24 \;=\; 11+13 \;=\; 7+17 \;=\; 5+19)$.

3 Formulation utilisant des graphes

Les éléments $M(i,j)$ de la matrice M, obtenus par la première formulation présentée au paragraphe 2, sont tels que :

$$M(i,j) = 1 \iff (2i+1 \mid a-2j+1) \vee (2i+1 \mid a+2j-1)$$

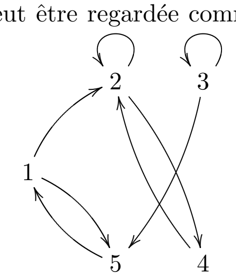
.

Pour le nombre pair 24, la matrice ainsi obtenue est :

	13	15	17	19	21
	11	9	7	5	3
3	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
7	0	0	1	0	1
9	0	1	0	0	0
11	1	0	0	0	0

Trouver les décomposants de Goldbach de *2a* est équivalent à trouver dans la matrice d'adjacence les colonnes ne comptant qu'un seul 1 (qui est sur la diagonale ascendante).

Cette matrice peut être regardée comme la matrice d'adjacence du graphe d'ordre 5 suivant :



Dans le contexte de la théorie des graphes, trouver les décomposants de Goldbach de $2a$ est équivalent à trouver les sommets du graphe de divisibilité étendue (on l'appelle ainsi car on se rappelle qu'un arc exprime la divisibilité d'un nombre ou de son complémentaire à $2a$) qui n'ont qu'un seul antécédent.
Ce qui est intéressant ici, c'est le fait qu'un même sommet (par exemple pour le graphe associé au nombre pair 24 le sommet 1) représente de façon conjointe d'une part le diviseur 3 (entête de ligne) et d'autre par le couple $(11, 13)$ qui est à distance 1 de 12 la moitié de 24.

Si l'on reprend la façon dont sont définis les éléments de la matrice,
un sommet y n'a qu'un seul antécédent si et seulement si, quel que soit x différent de $m + 1 - y, M(x, y) = 0$.
Ceci est équivalent à :

$$(2x + 1 \nmid a - 2y + 1) \wedge (2x + 1 \nmid a + 2y - 1)^1$$

Dans le graphe, on trouve que les trois sommets 1, 3 et 4 n'ont qu'un seul antécédent.
y=1 est une colonne satisfaisante car pour x=1, 2, 3 et 4,
$(3 \nmid 11) \wedge (3 \nmid 13) \wedge (5 \nmid 11) \wedge (5 \nmid 13) \wedge (7 \nmid 11) \wedge (7 \nmid 13) \wedge (9 \nmid 11) \wedge (9 \nmid 13)$
y=3 est également une colonne satisfaisante car pour x = 1, 2, 4 et 5,
$(3 \nmid 7) \wedge (3 \nmid 17) \wedge (5 \nmid 7) \wedge (5 \nmid 17) \wedge (9 \nmid 7) \wedge (9 \nmid 17) \wedge (11 \nmid 7) \wedge (11 \nmid 17)$
Enfin, y=4 est également une colonne satisfaisante car pour x = 1, 3, 4 et 5,
$(3 \nmid 5) \wedge (3 \nmid 19) \wedge (7 \nmid 5) \wedge (7 \nmid 19) \wedge (9 \nmid 5) \wedge (9 \nmid 19) \wedge (11 \nmid 5) \wedge (11 \nmid 19)$.

Dans ce contexte, la conjecture de Goldbach devient : "pourquoi, lorsqu'on choisit $m-1$ impairs tous différents parmi les m premiers impairs supérieurs ou égaux à 3, il existe toujours 2 nombres à égale distance de $2m + 2$ que tous les $m - 1$ impairs choisis ne divisent pas ?".

4 Formulation utilisant des ensembles d'entiers

Voici une façon supplémentaire de considérer le problème de la conjecture de Goldbach.
On cherche les décomposants de $2a$, un nombre pair.
On va associer à $2a$ un ensemble de nombres E_{2a} initialement vide.
Cette formulation utilise la notion de *résiduminimumabsolu* définie par Gauss dans les Recherches Arithmétiques (Cf Annexe 1).

[1]Cette formule est légèrement différente dans le cas du double dun nombre impair.

4.1 Description de l'algorithme utilisant les valeurs absolues des résidus minima absolus

On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à a. $m = \left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor$.

Pour i allant de 1 *à* m, *on calcule les valeurs absolues des résidus minima absolus de* $2a$ *pour les modules de la forme* $8i+4$ (*remarque :* $i > 0$). *Si* $2a \equiv 0 \ (mod\ 8i+4)$, *on ajoute le singleton* $\{i+1\}$ *à l'ensemble* E_{2a} ; *sinon si* $2a \equiv 4i+2 \ (mod\ 8i+4)$, *on ajoute le singleton* $\{1\}$ *à l'ensemble* E_{2a} ; *sinon pour* j *allant de* 0 *à* $4i+2$ *de* 2 *en* 2, *si* $(2a \equiv j \ (mod\ 8i+4))$ *ou si* $(2a \equiv 8i+4-j \ (mod\ 8i+4))$ *on ajoute à l'ensemble* E_{2a} *le singleton* $\{i - \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$ *si a est pair, on ajoute à l'ensemble* E_{2a} *le singleton* $\{i + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$ *si son élément est inférieur ou égal à* m ; *sinon (a est impair), on ajoute à l'ensemble* E_{2a} *le singleton* $\{i + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 2\}$ *si son élément est inférieur ou égal à* m ; *Lorsque i est inférieur strictement à* m, *on ajoute également à l'ensemble de nombres toutes les sommes inférieures à* m *des nombres déjà ajoutés et d'un mutiplede* i.

Cette formulation consiste à stocker dans E_{2a} les indices j des éléments de la matrice $M(i,j)$ égaux à 1. Le nombre pair 24 pris en exemple se verra associé l'ensemble de nombres $E_{24} = \{1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5\}$.
L'ensemble E_{2a} contient une seule occurrence de certains nombres, et plusieurs occurrences d'autres nombres.
A chaque nombre n'apparaissant qu'en une seule occurrence peut être associé un décomposant de Goldbach de $2a$, de la même façon que cela a été fait dans la seconde formulation.

5 Nouvelle caractérisation des nombres premiers

Le travail présenté ici nous permet de mettre en évidence une nouvelle façon de caractériser les nombres premiers. On utilise la notion de résidu minimum absolu de Gauss, dont on prend la valeur absolue. On appelle $varma(x,m)$ la valeur absolue du résidu minimum absolu de x selon le module m.

$$\text{v}arma(x,m) = \begin{cases} x \ mod\ m & \text{si } x \ mod\ m \leq \ \text{m/2} \\ x \ - \ (x \ mod\ m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

exemple : varma(32,12) = 4.

Les nouvelles caractérisations sont alors :

- x est un nombre impair non premier si et seulement si
$\exists i \leq \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ tel que $j = varma(2x, 8i+4)$
et $i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 = 1$
et $i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 2 = 1$

- x est un nombre impair premier si et seulement si
$\forall i < \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$
$j = varma(2x, 8i+4) \Rightarrow ((i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1) \wedge (i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 2 \neq 1))$

- x est un le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers si et seulement si
$\forall i < \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$
$j = varma(2x, 8i+4) \Rightarrow ((i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1) \wedge (i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1))$

Etant donné un entier x, si selon un module de la forme $4i+2$, la valeur absolue du résidu minimum absolu de x est égale à $2i+1$ alors x est composé.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[3] J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, suivi de H. Poincaré, *L'invention mathématique*, Ed. Jacques Gabay, 2000.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000. [6] D. Nordon, *Les obstinations d'un mathématicien*, Ed. Belin Pour La Science, 2003.
[7] A. Doxiadis, *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach*, Ed. Points, 2002.
[8] A.M. Decaillot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236.

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9\ (mod\ 5)$, $-7 \equiv 15\ (mod\ 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite $0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : Traitement d'exemples plus étoffés

A2.1 : Traitement du cas $2a = 78$ en utilisant la formulation de la conjecture de Goldbach basée sur les mots binaires

Mots associés au nombre pair 78
Les mots associés au nombre pair 78 sont au nombre de 19 (le nombre d'impairs inférieurs ou égaux à 39). Ce sont les mots :

```
100
00110
0010010
000100100
00010000100
1000000000000
000100000000100
00000010000100000
0000000001100000000
000000000100100000000
00000000100000010000000
0000000100000000001000000
000000100000000000000100000
00000100000000000000000010000
0000100000000000000000000001000
000100000000000000000000000000100
00100000000000000000000000000000010
0100000000000000000000000000000000001
100000000000000000000000000000000000000
```

[2]Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

Obtention de la matrice

```
1001001001001001001
0011000110001100011
0010010001001000100
0001001000001001000
0001000010000010000
1000000000000100000
0001000000000100001
0000001000010000000
0000000001100000000
0000000001001000000
0000000010000001000
0000000100000000001
0000001000000000000
0000010000000000000
0000100000000000000
0001000000000000000
0010000000000000000
0100000000000000000
1000000000000000000
```

Identification des colonnes ne contenant qu'un seul 1
Pour le nombre pair 78, les colonnes de la matrice qui conviennent sont :

```
1001001001001001001
0011000110001100011
0010010001001000100
0001001000001001000
0001000010000010000
1000000000000100000
0001000000000100001
0000001000010000000
0000000001100000000
0000000001001000000
0000000010000001000
0000000100000000001
0000001000000000000
0000010000000000000
0000100000000000000
0001000000000000000
0010000000000000000
0100000000000000000
1000000000000000000
```

Calcul des décomposants de Goldbach
$f(2) = 37$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 37 + 41$.
$f(5) = 31$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 31 + 47$.
$f(11) = 19$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 19 + 59$.
$f(12) = 17$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 17 + 61$.
$f(15) = 11$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 11 + 67$.
$f(17) = 7$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 7 + 71$.
$f(18) = 5$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 5 + 73$.

A2.2 : Traitement du cas $2a = 84$ en utilisant la formulation de la conjecture de Goldbach basée sur les ensembles de nombres

84 est le double du nombre pair 42.
On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 42.
$m = \left\lfloor \dfrac{42-1}{2} \right\rfloor = 20.$

Calcul des valeurs absolues des résidus minima absolus:
$84 \equiv 0 \ (mod\ 12)$,
$84 \equiv 4 \ (mod\ 20)$,
$84 \equiv 0 \ (mod\ 28)$,
$84 \equiv 12 \ (mod\ 36)$,

$84 \equiv 4 \ (mod\ 44)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 40)
$84 \equiv 20 \ (mod\ 52)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 32)
$84 \equiv 24 \ (mod\ 60)$,
$84 \equiv 16 \ (mod\ 68)$,
$84 \equiv 8 \ (mod\ 76)$,
$84 \equiv 0 \ (mod\ 84)$,
$84 \equiv 8 \ (mod\ 92)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 16 \ (mod\ 100)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 24 \ (mod\ 108)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 32 \ (mod\ 116)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 40 \ (mod\ 124)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 48 \ (mod\ 132)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 56 \ (mod\ 140)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 64 \ (mod\ 148)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 72 \ (mod\ 156)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 80 \ (mod\ 164)$ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84).

Ajout des nombres à l'ensemble E_{84} :
$1 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 2$, ajoutons 2 à l'ensemble,
$2 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 2 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 4$, ajoutons 2 et 4 à l'ensemble,
$3 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 4$, ajoutons 4 à l'ensemble,
$4 - \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 8$, ajoutons 2 et 8 à l'ensemble,
$5 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 5 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 7$, ajoutons 5 et 7 à l'ensemble,
$6 - \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 6 + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 12$, ajoutons 2 et 12 à l'ensemble,
$7 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 7 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 14$, ajoutons 2 et 14 à l'ensemble,
$8 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 8 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 13$, ajoutons 5 et 13 à l'ensemble,
$9 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 9 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 12$, ajoutons 8 et 12 à l'ensemble,
$10 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 11$, ajoutons 11 à l'ensemble,
$11 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 10, 11 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 14$, ajoutons 10 et 14 à l'ensemble,
$12 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 9, 12 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 17$, ajoutons 9 et 17 à l'ensemble,
$13 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 13 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 20$, ajoutons 8 et 20 à l'ensemble,
$14 - \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 7, 14 + \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 23$, ajoutons 7 à l'ensemble, $(23 > 20)$
$15 - \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 15 + \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 26$, ajoutons 6 à l'ensemble, $(26 > 20)$
$16 - \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 16 + \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 29$, ajoutons 5 à l'ensemble, $(29 > 20)$
$17 - \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 17 + \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 32$, ajoutons 4 à l'ensemble, $(32 > 20)$
$18 - \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 18 + \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 35$, ajoutons 3 à l'ensemble, $(35 > 20)$

$19 - \left\lfloor \dfrac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 19 + \left\lfloor \dfrac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 38$, ajoutons 2 à l'ensemble, $(38 > 20)$
$20 - \left\lfloor \dfrac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 20 + \left\lfloor \dfrac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 41$, ajoutons 1 à l'ensemble, $(41 > 20)$

Complétion des lignes quand les mots sont trop courts
$2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 3 = 11, 11 + 3 = 14, 14 + 3 = 17, 17 + 3 = 20$, ajoutons 5, 8, 11, 14, 17 et 20 à l'ensemble,
$2 + 5 = 7, 7 + 5 = 12, 12 + 5 = 17, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19$, ajoutons 7, 12, et 17 à l'ensemble, ajoutons 9, 14 et 19 à l'ensemble,
$4 + 7 = 11, 11 + 7 = 18$, ajoutons 11 et 18 à l'ensemble,
$2 + 9 = 11, 9 + 9 = 18, 8 + 9 = 17$, ajoutons 11 et 18 à l'ensemble, ajoutons 17 à l'ensemble;
$5 + 11 = 16, 7 + 11 = 18$, ajoutons 16 et 18 à l'ensemble ;
$2 + 13 = 15$, ajoutons 15 à l'ensemble ;
$2 + 15 = 17$, ajoutons 17 à l'ensemble ;

Calcul des décomposants de Goldbach
L'ensemble associé à 84, E_{84}, est, après exécution de l'algorithme, égal à $\{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, , 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 20, 20\}$.
$1, 3, 6, 10, 13, 15, 16$ et 19 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble.
$f(1) = 41, f(3) = 37, f(6) = 31, f(10) = 23, f(13) = 17, f(15) = 13, f(16) = 11, f(19) = 5$ sont tous des décomposants de Goldbach du nombre pair 84.

Différentes formulations équivalentes
de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

Mai 2009

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

On fournira ici une formulation équivalente à la conjecture de Goldbach utilisant des mots binaires, une formulation utilisant le concept de graphe, puis une formulation utilisant des ensembles d'entiers.

Dans la suite de cette note, on s'intéresse à cette restriction de la conjecture : *"tout nombre pair supérieur ou égal à 24 est la somme de deux nombres premiers impairs"*.

2 Formulation utilisant des mots binaires

2.1 Définitions

Nous allons représenter les entiers par des mots binaires bâtis sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. L'ensemble de ces mots est muni de l'opération de *concaténation* :

$$(a_1a_2...a_m).(b_1b_2...b_n) = (a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n)$$

Si $f = a_1a_2...a_m$ est un mot, son *image-miroir* est le mot $f^t = a_ma_{m-1}...a_1$.
Un mot égal à son image-miroir est un *palindrome*, comme par exemple (000010010000).
Soient f et g des mots de $\mathcal{A}^*$; g est un *préfixe propre* de f s'il existe h non vide tel que $f = gh$.
Dans toute la suite, nous omettrons les parenthèses autour des mots.

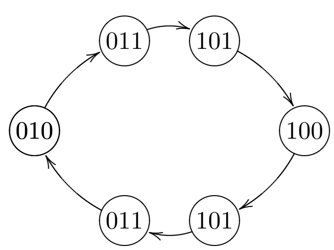
La lettre 1 représentera d'une manière générale le fait pour un nombre entier d'être composé parce que divisible par un nombre impair inférieur à lui, et différent de 1. Inversement, la lettre 0 sera utilisée pour représenter le fait pour un nombre entier d'être non divisible par un nombre impair inférieur à lui, et différent de 1.

2.2 Caractère symétrique de la conjecture de Goldbach

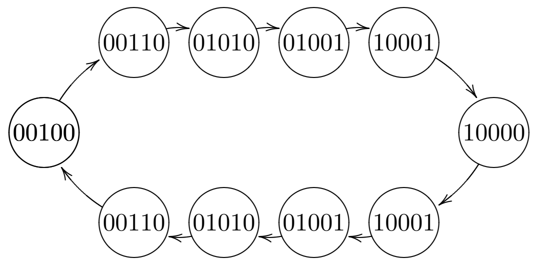
Observons un exemple. Si $2a = 40$, $\varphi(40)$ est le nombre de nombres inférieurs à 40 et premiers à 40 : on appelle ces nombres les unités génératrices du groupe $\mathbb{Z}/40$. $\varphi(x)$ est appelée la fonction indicatrice d'Euler.
Il y a $\varphi(40)/2$ couples d'impairs dont la somme vaut 40 ; il s'agit des couples $(1, 39)$, $(3, 37)$, $(5, 35)$, $(7, 33)$, $(9, 31)$, $(11, 29)$, $(13, 27)$ et $(15, 25)$. Les sommes associées à chacun de ces couples se réécrivent de la façon suivante, en utilisant les unités génératrices : $1 + 3.13$, $3 + 37$, $7 + 3.11$, $31 + 3.3$, $11 + 29$, $13 + 3.9$, $17 + 23$ et $19 + 3.7$.

Intéressons-nous successivement à la divisibilité par 3 des nombres de ces différents couples, puis à leur divisibilité par 5, puis à leurs différentes divisibilités par tous les nombres impairs inférieurs ou égaux à a.
La divisibilité par 3 étant de périodicité 3, on choisit d'associer à 40 le mot 101 de longueur 3. Ce mot représente le caractère de divisibilité par 3 des nombres 20 ± 1, 20 ± 3 et 20 ± 5
Plus généralement, au nombre $2a$ est associé pour la divisibilité par 3, le mot binaire $l_1 l_2 l_3$ de longueur 3 dans lequel l_i représente le caractère de divisibilité par 3 de $x \pm (2i - 1)$ si a est pair (resp. $x \pm (2i - 2)$ si a est impair).

Dans la mesure où l'on considère la divisibilité par 3 non seulement des nombres inférieurs à a, mais simultanément des nombres supérieurs à a (par *disjonction booléenne*), on comprend que la représentation du caractère de divisibilité par 3 va associer aux nombres pairs $2a$ successifs les mots du cycle de 6 mots suivant, selon la classe de congruence à laquelle appartient a modulo 6 (selon le positionnement de leur "ligne de pli" sur le mot 100 : le pli peut être sur le 1, entre le 1 et le premier 0, sur le premier 0, entre les deux 0, sur le deuxième 0 ou entre le deuxième 0 et le 1 suivant du fait de la périodicité) :



Une étude similaire (et évidente) concernant le caractère de divisibilité par 5 nous fait aboutir au cycle contenant les 10 mots suivants :



L'affectation des mots à un nombre pair peut être vue comme utilisant des automates séquentiels élémentaires qu'on appellera $Machine_3$, $Machine_5$, ..., $Machine_{2k+1}$.
La première machine appelée $Machine_3$ renvoie successivement les 6 mots de longueur 3 suivants $010, 011, 101, 100, 101, 011$, et retour au premier mot de longueur 3, puis répétition des mots de la liste dans le même ordre, indéfiniment.
La deuxième machine appelée $Machine_5$ renvoie successivement les 10 mots de longueur 5 suivants $00100, 00110, 01010, 01001, 10001, 10000, 10001, 01001, 01010, 00110$, et retour au premier mot de longueur 5, puis répétition des mots de la liste dans le même ordre, indéfiniment.
Pour trouver les mots fournis par la machine $Machine_{2k+3}$ quand on a les mots de la machine $Machine_{2k+1}$, il faut procéder de la manière suivante :

- les k premiers mots de la machine $Machine_{2k+3}$ sont les k premiers mots de la machine $Machine_{2k+1}$ auxquels on a appliqué le traitement suivant : les mots de rang pair se voient concaténer un 0 au début et à la fin tandis que les mots de rang impair se voient concaténer un 0 à la fin, et rajouter un 0 comme deuxième lettre (toute lettre après la deuxième se voit décaler d'un rang à droite) ;

- les k derniers mots de la machine $Machine_{2k+3}$ sont les k derniers mots de la machine $Machine_{2k+1}$ auxquels on a appliqué un traitement identique à celui qui a été appliqué aux k premiers mots ;

- le mot central de la machine $Machine_{2k+3}$ est le mot central de la machine $Machine_{2k+1}$ auquel on a concaténé deux 0 à l'extrémité droite ;

- on ajoute deux mots entre les k premiers mots et le mot central qui sont : $0.1.0^{2k}.1$ et $1.0^{2k+1}.1$;

- on ajoute deux mots entre le mot central et les k derniers mots qui sont : $1.0^{2k+1}.1$ et $0.1.0^{2k}.1$.

Pour le premier nombre pair que l'on considère (i.e. 24), les curseurs dans les 5 premières machines sont dans une position particulière.
Pour trouver les mots associés aux nombres pairs successifs suivant 24, on peut imaginer que les curseurs avancent d'un cran dans chaque machine, et pour

chaque nouveau double de nombre impair $2k+1$, on ajoute une nouvelle machine qui renvoie les mots de longueur $2k+1$ qu'il faudra affecter à tous les nombres pairs à venir (lorsqu'on introduit une nouvelle machine son curseur est positionné sur le mot que l'on a coutume d'appeler *central* de la machine en question, i.e. un 1 suivi de $2k$ zéros).

2.3 Calcul des mots associés à un nombre pair

L'algorithme ci-dessous calcule les mots associés à un nombre pair donné.

$m = \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$
pour i *allant de* 1 *à* m *de* 1 *en* 1
  si $(x \; mod \; 4i+2 \; = \; 2i+1)$ *alors* $mot(2x,i) \; = \; 1.0^{2i}$
  sinon si $(x \; mod \; 4i+2 \; = \; 0)$ *alors* $mot(2x,i) \; = \; 0^i.1.0^i$
  sinon pour j *allant de* 2 *à* $4i$ *de* 2 *en* 2
    si $(2x \; mod \; 8i+4 \; = \; j)$ *ou* $(2x \; mod \; 8i+4 \; = \; 8i+4-j)$ *alors*
      si $(x \; mod \; 2 \; = \; 0)$ *alors*
        $mot(2x,i) \; = \; 0^{i-\frac{j}{4}}.1.0^{\frac{j}{2}-1}.1.0^{i-\frac{j}{4}}$
      sinon
        $mot(2x,i) \; = \; 0.0^{i-\frac{j}{4}-1}.1.0^{\frac{j}{2}-1}.1.0^{i-\frac{j}{4}-1}$

2.4 Remplissage de la matrice carrée

L'étape suivante consiste à mettre ces mots dans une matrice carrée M de taille $m \times m$, dans l'ordre dans lequel on les a trouvés, en effectuant ce qu'on appellera la "complétion" des mots.
L'opération de multiplication qu'on utilise sur deux mots est la *concaténation* des mots. On peut ainsi parler de *puissance* quand on concatène plusieurs fois un même mot.
Si le mot $mot(2x,i)$ est d'une longueur supérieure à m, on met dans la ligne i de la matrice le préfixe propre de $mot(2x,i)$ de m lettres.
Si le mot $mot(2x,i)$ est d'une longueur inférieure à m, on prend le préfixe de m lettres d'une puissance de $mot(2x,i)$ qui a quant à elle (la puissance de $mot(2x,i)$) plus de m lettres.

On lit maintenant les mots dans les colonnes de la matrice au lieu de les lire dans les lignes.
L'un des mots (celui de la colonne *colonne*) ne contient qu'un seul 1 (ce 1 est situé sur une ligne bien précise : la ligne *ligne* telle que *ligne + colonne = m + 1*).

La bijection colonne / décomposant de Goldbach s'effectue de la manière suivante :

si $(x \bmod 2 \ = \ 1)$ $f(colonne) \ = \ x + 2 - 2.colonne$
sinon $f(colonne) \ = \ x + 1 - 2.colonne$
si $((f(colonne) \ = \ x) \ \vee \ (2x \bmod f(x) \ \neq \ 0))$
alors $f(colonne)$ *est un décomposant de Goldbach de* $2x$.

2.5 Traitement d'un cas simple

Les 5 mots associés au nombre pair 24 sont :
010
01010
0010100
010000010
10000000001

La matrice carrée de taille 5×5 est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mots verticaux ne contenant qu'un seul 1 sont ceux des colonnes 1, 3 et 4, qui correspondent aux décomposants de Goldbach de 24 que sont 11, 7 et 5 $(24 \ = \ 11 + 13 \ = \ 7 + 17 \ = \ 5 + 19)$.

3 Formulation utilisant des graphes

Les éléments $M(i,j)$ de la matrice M, obtenus par la première formulation présentée au paragraphe 2, sont tels que :

$$M(i,j) = 1 \iff (2i + 1 \mid a - 2j + 1) \vee (2i + 1 \mid a + 2j - 1)$$

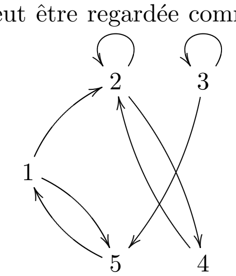
.

Pour le nombre pair 24, la matrice ainsi obtenue est :

	13 11	15 9	17 7	19 5	21 3
3	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
7	0	0	1	0	1
9	0	1	0	0	0
11	1	0	0	0	0

Trouver les décomposants de Goldbach de *2a* est équivalent à trouver dans la matrice d'adjacence les colonnes ne comptant qu'un seul 1 (qui est sur la diagonale ascendante).

Cette matrice peut être regardée comme la matrice d'adjacence du graphe d'ordre 5 suivant :



Dans le contexte de la théorie des graphes, trouver les décomposants de Goldbach de $2a$ est équivalent à trouver les sommets du graphe de divisibilité étendue (on l'appelle ainsi car on se rappelle qu'un arc exprime la divisibilité d'un nombre ou de son complémentaire à $2a$) qui n'ont qu'un seul antécédent.
Ce qui est intéressant ici, c'est le fait qu'un même sommet (par exemple pour le graphe associé au nombre pair 24 le sommet 1) représente de façon conjointe d'une part le diviseur 3 (entête de ligne) et d'autre par le couple $(11, 13)$ qui est à distance 1 de 12 la moitié de 24.

Si l'on reprend la façon dont sont définis les éléments de la matrice,
un sommet y n'a qu'un seul antécédent si et seulement si, quel que soit x différent de $m+1-y, M(x,y) = 0$.
Ceci est équivalent à :

$$(2x+1 \nmid a-2y+1) \wedge (2x+1 \nmid a+2y-1)^1$$

Dans le graphe, on trouve que les trois sommets 1, 3 et 4 n'ont qu'un seul antécédent.
y=1 est une colonne satisfaisante car pour x=1, 2, 3 et 4,
$(3 \nmid 11) \wedge (3 \nmid 13) \wedge (5 \nmid 11) \wedge (5 \nmid 13) \wedge (7 \nmid 11) \wedge (7 \nmid 13) \wedge (9 \nmid 11) \wedge (9 \nmid 13)$
y=3 est également une colonne satisfaisante car pour x = 1, 2, 4 et 5,
$(3 \nmid 7) \wedge (3 \nmid 17) \wedge (5 \nmid 7) \wedge (5 \nmid 17) \wedge (9 \nmid 7) \wedge (9 \nmid 17) \wedge (11 \nmid 7) \wedge (11 \nmid 17)$
Enfin, y=4 est également une colonne satisfaisante car pour x = 1, 3, 4 et 5,
$(3 \nmid 5) \wedge (3 \nmid 19) \wedge (7 \nmid 5) \wedge (7 \nmid 19) \wedge (9 \nmid 5) \wedge (9 \nmid 19) \wedge (11 \nmid 5) \wedge (11 \nmid 19)$.

Dans ce contexte, la conjecture de Goldbach devient : "pourquoi, lorsqu'on choisit $m-1$ impairs tous différents parmi les m premiers impairs supérieurs ou égaux à 3, il existe toujours 2 nombres à égale distance de $2m+2$ que tous les $m-1$ impairs choisis ne divisent pas ?".

4 Formulation utilisant des ensembles d'entiers

Voici une façon supplémentaire de considérer le problème de la conjecture de Goldbach.
On cherche les décomposants de $2a$, un nombre pair.
On va associer à $2a$ un ensemble de nombres E_{2a} initialement vide.
Cette formulation utilise la notion de *résiduminimumabsolu* définie par Gauss dans les Recherches Arithmétiques (Cf Annexe 1).

[1]Cette formule est légèrement différente dans le cas du double dun nombre impair.

4.1 Description de l'algorithme utilisant les valeurs absolues des résidus minima absolus

On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à a. $m = \left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor$.

Pour i allant de 1 *à* m, *on calcule les valeurs absolues des résidus minima absolus de* $2a$ *pour les modules de la forme* $8i+4$ *(remarque :* $i > 0$*).* *Si* $2a \equiv 0 \ (mod\ 8i+4)$, *on ajoute le singleton* $\{i+1\}$ *à l'ensemble* E_{2a} ; *sinon si* $2a \equiv 4i+2 \ (mod\ 8i+4)$, *on ajoute le singleton* $\{1\}$ *à l'ensemble* E_{2a} ; *sinon pour* j *allant de* 0 *à* $4i+2$ *de 2 en 2,* *si* $(2a \equiv j \ (mod\ 8i+4))$ *ou si* $(2a \equiv 8i+4-j \ (mod\ 8i+4))$ *on ajoute à l'ensemble* E_{2a} *le singleton* $\{i - \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$ *si a est pair, on ajoute à l'ensemble* E_{2a} *le singleton* $\{i + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$ *si son élément est inférieur ou égal à* m ; *sinon (a est impair), on ajoute à l'ensemble* E_{2a} *le singleton* $\{i + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 2\}$ *si son élément est inférieur ou égal à* m ; *Lorsque i est inférieur strictement à* m, *on ajoute également à l'ensemble de nombres toutes les sommes inférieures à* m *des nombres déjà ajoutés et d'un mutiplede* i.

Cette formulation consiste à stocker dans E_{2a} les indices j des éléments de la matrice $M(i,j)$ égaux à 1. Le nombre pair 24 pris en exemple se verra associé l'ensemble de nombres $E_{24} = \{1,2,2,2,3,4,5,5\}$.
L'ensemble E_{2a} contient une seule occurrence de certains nombres, et plusieurs occurrences d'autres nombres.
A chaque nombre n'apparaissant qu'en une seule occurrence peut être associé un décomposant de Goldbach de $2a$, de la même façon que cela a été fait dans la seconde formulation.

5 Nouvelle caractérisation des nombres premiers

Le travail présenté ici nous permet de mettre en évidence une nouvelle façon de caractériser les nombres premiers. On utilise la notion de résidu minimum absolu de Gauss, dont on prend la valeur absolue. On appelle $varma(x,m)$ la valeur absolue du résidu minimum absolu de x selon le module m.

$$\text{v}arma(x,m) = \begin{cases} x \ mod\ m & \text{si } x \ mod\ m \leq \ \text{m/2} \\ x \ - \ (x \ mod\ m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

exemple : varma(32,12) = 4.

Les nouvelles caractérisations sont alors :

- x est un nombre impair non premier si et seulement si
  $\exists i \leq \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ tel que $j = varma(2x, 8i+4)$
  et $i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 = 1$
  et $i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 2 = 1$

- x est un nombre impair premier si et seulement si
  $\forall i < \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$
  $j = varma(2x, 8i+4) \Rightarrow ((i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1) \wedge (i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 2 \neq 1))$

- x est un le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers si et seulement si
  $\forall i < \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$
  $j = varma(2x, 8i+4) \Rightarrow ((i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1) \wedge (i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1))$

Etant donné un entier x, si selon un module de la forme $4i+2$, la valeur absolue du résidu minimum absolu de x est égale à $2i+1$ alors x est composé.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[3] J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, suivi de H. Poincaré, *L'invention mathématique*, Ed. Jacques Gabay, 2000.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000. [6] D. Nordon, *Les obstinations d'un mathématicien*, Ed. Belin Pour La Science, 2003.
[7] A. Doxiadis, *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach*, Ed. Points, 2002.
[8] A.M. Decaillot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236.

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9\ (mod\, 5)$, $-7 \equiv 15\ (mod\, 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite $0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : Traitement d'exemples plus étoffés

A2.1 : Traitement du cas $2a = 78$ en utilisant la formulation de la conjecture de Goldbach basée sur les mots binaires

Mots associés au nombre pair 78
Les mots associés au nombre pair 78 sont au nombre de 19 (le nombre d'impairs inférieurs ou égaux à 39). Ce sont les mots :

```
100
00110
0010010
000100100
00010000100
1000000000000
000100000000100
00000010000100000
0000000001100000000
000000000100100000000
00000000100000010000000
0000000100000000001000000
000000100000000000000100000
00000100000000000000000010000
0000100000000000000000000001000
000100000000000000000000000000100
00100000000000000000000000000000010
0100000000000000000000000000000000001
100000000000000000000000000000000000000
```

[2] Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

Obtention de la matrice

```
1001001001001001001
0011000110001100011
0010010001001000100
0001001000001001000
0001000010000010000
1000000000000100000
0001000000001000001
0000001000010000000
0000000001100000000
0000000001001000000
0000000010000001000
0000000100000000001
0000001000000000000
0000010000000000000
0000100000000000000
0001000000000000000
0010000000000000000
0100000000000000000
1000000000000000000
```

Identification des colonnes ne contenant qu'un seul 1
Pour le nombre pair 78, les colonnes de la matrice qui conviennent sont :

```
1001001001001001001
0011000110001100011
0010010001001000100
0001001000001001000
0001000010000010000
1000000000000100000
0001000000001000001
0000001000010000000
0000000001100000000
0000000001001000000
0000000010000001000
0000000100000000001
0000001000000000000
0000010000000000000
0000100000000000000
0001000000000000000
0010000000000000000
0100000000000000000
1000000000000000000
```

Calcul des décomposants de Goldbach
$f(2) = 37$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 37 + 41$.
$f(5) = 31$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 31 + 47$.
$f(11) = 19$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 19 + 59$.
$f(12) = 17$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 17 + 61$.
$f(15) = 11$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 11 + 67$.
$f(17) = 7$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 7 + 71$.
$f(18) = 5$ fournit la décomposition de Goldbach $78 = 5 + 73$.

A2.2 : Traitement du cas $2a = 84$ en utilisant la formulation de la conjecture de Goldbach basée sur les ensembles de nombres

84 est le double du nombre pair 42.
On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 42.
$m = \left\lfloor \frac{42-1}{2} \right\rfloor = 20.$

Calcul des valeurs absolues des résidus minima absolus:
$84 \equiv 0 \ (mod\ 12)$,
$84 \equiv 4 \ (mod\ 20)$,
$84 \equiv 0 \ (mod\ 28)$,
$84 \equiv 12 \ (mod\ 36)$,

$84 \equiv 4 \ (mod\ 44)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 40)
$84 \equiv 20 \ (mod\ 52)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 32)
$84 \equiv 24 \ (mod\ 60)$,
$84 \equiv 16 \ (mod\ 68)$,
$84 \equiv 8 \ (mod\ 76)$,
$84 \equiv 0 \ (mod\ 84)$,
$84 \equiv 8 \ (mod\ 92)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 16 \ (mod\ 100)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 24 \ (mod\ 108)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 32 \ (mod\ 116)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 40 \ (mod\ 124)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 48 \ (mod\ 132)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 56 \ (mod\ 140)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 64 \ (mod\ 148)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 72 \ (mod\ 156)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 80 \ (mod\ 164)$ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84).

Ajout des nombres à l'ensemble E_{84} :
$1 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 2$, ajoutons 2 à l'ensemble,
$2 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 2 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 4$, ajoutons 2 et 4 à l'ensemble,
$3 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 4$, ajoutons 4 à l'ensemble,
$4 - \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 8$, ajoutons 2 et 8 à l'ensemble,
$5 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 5 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 7$, ajoutons 5 et 7 à l'ensemble,
$6 - \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 6 + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 12$, ajoutons 2 et 12 à l'ensemble,
$7 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 7 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 14$, ajoutons 2 et 14 à l'ensemble,
$8 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 8 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 13$, ajoutons 5 et 13 à l'ensemble,
$9 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 9 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 12$, ajoutons 8 et 12 à l'ensemble,
$10 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 11$, ajoutons 11 à l'ensemble,
$11 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 10, 11 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 14$, ajoutons 10 et 14 à l'ensemble,
$12 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 9, 12 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 17$, ajoutons 9 et 17 à l'ensemble,
$13 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 13 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 20$, ajoutons 8 et 20 à l'ensemble,
$14 - \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 7, 14 + \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 23$, ajoutons 7 à l'ensemble, $(23 > 20)$
$15 - \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 15 + \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 26$, ajoutons 6 à l'ensemble, $(26 > 20)$
$16 - \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 16 + \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 29$, ajoutons 5 à l'ensemble, $(29 > 20)$
$17 - \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 17 + \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 32$, ajoutons 4 à l'ensemble, $(32 > 20)$
$18 - \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 18 + \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 35$, ajoutons 3 à l'ensemble, $(35 > 20)$

$19 - \left\lfloor \dfrac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 19 + \left\lfloor \dfrac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 38$, ajoutons 2 à l'ensemble, $(38 > 20)$
$20 - \left\lfloor \dfrac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 20 + \left\lfloor \dfrac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 41$, ajoutons 1 à l'ensemble, $(41 > 20)$

Complétion des lignes quand les mots sont trop courts
$2+3=5, 5+3=8, 8+3=11, 11+3=14, 14+3=17, 17+3=20$, ajoutons 5, 8, 11, 14, 17 et 20 à l'ensemble,
$2+5=7, 7+5=12, 12+5=17, 4+5=9, 9+5=14, 14+5=19$, ajoutons 7, 12, et 17 à l'ensemble, ajoutons 9, 14 et 19 à l'ensemble,
$4+7=11, 11+7=18$, ajoutons 11 et 18 à l'ensemble,
$2+9=11, 9+9=18, 8+9=17$, ajoutons 11 et 18 à l'ensemble, ajoutons 17 à l'ensemble;
$5+11=16, 7+11=18$, ajoutons 16 et 18 à l'ensemble ;
$2+13=15$, ajoutons 15 à l'ensemble ;
$2+15=17$, ajoutons 17 à l'ensemble ;

Calcul des décomposants de Goldbach
L'ensemble associé à 84, E_{84}, est, après exécution de l'algorithme, égal à $\{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, , 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 20, 20\}$.
$1, 3, 6, 10, 13, 15, 16$ et 19 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble.
$f(1) = 41, f(3) = 37, f(6) = 31, f(10) = 23, f(13) = 17, f(15) = 13, f(16) = 11, f(19) = 5$ sont tous des décomposants de Goldbach du nombre pair 84.

Voici une dernière façon de considérer le problème de la conjecture de Goldbach.
On cherche les décomposants de $2a$, un nombre pair.
On va associer à $2a$ un ensemble de nombres E_{2a} initialement vide.

Description de l'algorithme utilisant les restes modulaires

- On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à a.
  $m = \left\lfloor \dfrac{a-1}{2} \right\rfloor$.
- Pour i allant de 1 à m, on calcule les restes spéciaux[1] de $2a$ pour les modules de la forme $8i+4$ (*remarque :* $i > 0$).
- Si $2a \equiv 0\ (mod\ 8i+4)$, on ajoute le singleton $\{i+1\}$ à l'ensemble E_{2a} ;
- sinon si $2a \equiv 4i+2\ (mod\ 8i+4)$, on ajoute le singleton $\{1\}$ à l'ensemble E_{2a} ;
- sinon pour j allant de 0 à $4i+2$ de 2 en 2,
  - si $(2a \equiv j\ (mod\ 8i+4))$ ou si $(2a \equiv 8i+4-j\ (mod\ 8i+4))$
    * on ajoute à l'ensemble E_{2a} le singleton $\{i - \left\lfloor \dfrac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$
    * si a est pair, on ajoute à l'ensemble E_{2a} le singleton $\{i + \left\lfloor \dfrac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$ si son élément est inférieur ou égal à m ;
    * sinon (a est impair), on ajoute à l'ensemble E_{2a} le singleton $\{i + \left\lfloor \dfrac{j}{4} \right\rfloor + 2\}$ si son élément est inférieur ou égal à m ;
- lorsque i est inférieur strictement à m, on ajoute également à l'ensemble de nombres toutes les sommes inférieures à m des nombres déjà ajoutés et d'un mutiple de i (c'est la *"complétion des mots"*).

L'ensemble E_{2a} contient une seule occurrence de certains nombres, et plusieurs occurrences d'autres nombres.
A chaque nombre n'apparaissant qu'en une seule occurrence peut être associé un décomposant de Goldbach de $2a$.

Traitement du cas $2a = 28$ (28 est un double de pair):
On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 14.
$m = \left\lfloor \dfrac{14-1}{2} \right\rfloor = 6$.

Calcul des restes spéciaux :
$28 \equiv 4\ (mod\ 12)$,
$28 \equiv 8\ (mod\ 20)$,
$28 \equiv 0\ (mod\ 28)$,
$28 \equiv 8\ (mod\ 36)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 28)

[1] Par "reste spécial", on entend le reste modulaire habituel de Gauss ou son complémentaire au module quand celui est inférieur au reste.

$28 \equiv 16 \ (mod\ 44)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 28)
$28 \equiv 24 \ (mod\ 52)$ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 28).

Ajout des nombres à l'ensemble E_{28} :
remarque : la division est une division entière (on prend la partie entière du résultat).

- $1 - \left\lfloor \dfrac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 1 + \left\lfloor \dfrac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 3$, ajoutons 1 et 3 à l'ensemble,

- $2 - \left\lfloor \dfrac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 2 + \left\lfloor \dfrac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 5$, ajoutons 1 et 5 à l'ensemble,

- $i = 3, 28 \equiv 0 \ (mod\ 28)$, ajoutons 4 à l'ensemble,

- $4 - \left\lfloor \dfrac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 4 + \left\lfloor \dfrac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 7$, ajoutons 3 à l'ensemble (7 est strictement supérieur à 6),

- $5 - \left\lfloor \dfrac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 5 + \left\lfloor \dfrac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 10$, ajoutons 2 à l'ensemble (10 est strictement supérieur à 6),

- $6 - \left\lfloor \dfrac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 6 + \left\lfloor \dfrac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 13$, ajoutons 1 à l'ensemble (13 est strictement supérieur à 6),

Complétion des lignes quand les mots sont trop courts

- $1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6$, ajoutons 4 et 6 à l'ensemble,

- $1 + 5 = 6$, ajoutons 6 à l'ensemble.

L'ensemble associé à 28, E_{28}, est, après exécution de l'algorithme,
égal à $\{1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6\}$.

Seuls 2 et 5 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble. A 2 correspond le décomposant de Goldbach 11 et à 5 correspond le décomposant de Goldbach 5 pour le nombre pair 28.

Traitement du cas $2a = 84$ (84 est un double de pair):
On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 42.
$m = \left\lfloor \frac{42-1}{2} \right\rfloor = 20.$

Calcul des restes spéciaux :
$84 \equiv 0\ (mod\ 12)$,
$84 \equiv 4\ (mod\ 20)$,
$84 \equiv 0\ (mod\ 28)$,
$84 \equiv 12\ (mod\ 36)$,
$84 \equiv 4\ (mod\ 44)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 40)
$84 \equiv 20\ (mod\ 52)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 32)
$84 \equiv 24\ (mod\ 60)$,
$84 \equiv 16\ (mod\ 68)$,
$84 \equiv 8\ (mod\ 76)$,
$84 \equiv 0\ (mod\ 84)$,
$84 \equiv 8\ (mod\ 92)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 16\ (mod\ 100)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 24\ (mod\ 108)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 32\ (mod\ 116)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 40\ (mod\ 124)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 48\ (mod\ 132)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 56\ (mod\ 140)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 64\ (mod\ 148)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 72\ (mod\ 156)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)
$84 \equiv 80\ (mod\ 164)$ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84).

Ajout des nombres à l'ensemble E_{84} :
remarque : la division est une division entière (on prend la partie entière du résultat).

- $1 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 2$, ajoutons 2 à l'ensemble,
- $2 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 2 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 4$, ajoutons 2 et 4 à l'ensemble,
- $3 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 4$, ajoutons 4 à l'ensemble,
- $4 - \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 8$, ajoutons 2 et 8 à l'ensemble,
- $5 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 5 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 7$, ajoutons 5 et 7 à l'ensemble,

- $6 - \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 6 + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 12$, ajoutons 2 et 12 à l'ensemble,
- $7 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 7 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 14$, ajoutons 2 et 14 à l'ensemble,
- $8 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 8 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 13$, ajoutons 5 et 13 à l'ensemble,
- $9 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 9 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 12$, ajoutons 8 et 12 à l'ensemble,
- $10 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 11$, ajoutons 11 à l'ensemble,
- $11 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 10, 11 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 14$, ajoutons 10 et 14 à l'ensemble,
- $12 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 9, 12 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 17$, ajoutons 9 et 17 à l'ensemble,
- $13 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 13 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 20$, ajoutons 8 et 20 à l'ensemble,
- $14 - \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 7, 14 + \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 23$, ajoutons 7 à l'ensemble, $(23 > 20)$
- $15 - \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 15 + \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 26$, ajoutons 6 à l'ensemble, $(26 > 20)$
- $16 - \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 16 + \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 29$, ajoutons 5 à l'ensemble, $(29 > 20)$
- $17 - \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 17 + \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 32$, ajoutons 4 à l'ensemble, $(32 > 20)$
- $18 - \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 18 + \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 35$, ajoutons 3 à l'ensemble, $(35 > 20)$

- $19 - \left\lfloor \dfrac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 19 + \left\lfloor \dfrac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 38$, ajoutons 2 à l'ensemble, $(38 > 20)$

- $20 - \left\lfloor \dfrac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 20 + \left\lfloor \dfrac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 41$, ajoutons 1 à l'ensemble, $(41 > 20)$

Complétion des lignes quand les mots sont trop courts
$2+3=5, 5+3=8, 8+3=11, 11+3=14, 14+3=17, 17+3=20$, ajoutons 5, 8, 11, 14, 17 et 20 à l'ensemble,
$2+5=7, 7+5=12, 12+5=17, 4+5=9, 9+5=14, 14+5=19$, ajoutons 7, 12, et 17 à l'ensemble, ajoutons 9, 14 et 19 à l'ensemble,
$4+7=11, 11+7=18$, ajoutons 11 et 18 à l'ensemble,
$2+9=11, 9+9=18, 8+9=17$, ajoutons 11 et 18 à l'ensemble, ajoutons 17 à l'ensemble;
$5+11=16, 7+11=18$, ajoutons 16 et 18 à l'ensemble ;
$2+13=15$, ajoutons 15 à l'ensemble ;
$2+15=17$, ajoutons 17 à l'ensemble ;

L'ensemble associé à 84, E_{84}, est, après exécution de l'algorithme, égal à
$\{1,2,2,2,2,2,2,3,,4,4,5,5,5,5,6,7,7,7,8,8,8,8,9,9,10,11,11,11,11,12,12,12,$
$13,14,14,14,14,15,16,17,17,17,17,17,18,18,18,19,20,20\}$.
$1,3,6,10,13,15,16$ et 19 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble.
A 1 correspond le décomposant de Goldbach 41, à 3 correspond le décomposant de Goldbach 37, à 6 correspond le décomposant de Goldbach 31, à 10 correspond le décomposant de Goldbach 23, à 13 correspond le décomposant de Goldbach 17, à 15 correspond le décomposant de Goldbach 13, à 16 correspond le décomposant de Goldbach 11, à 19 correspond le décomposant de Goldbach 5, pour le nombre 84.

Traitement du cas $2a = 98$ (98 est un double d'impair):
On calcule m, le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 49.
$m = \left\lfloor \dfrac{49-1}{2} \right\rfloor = 24.$

Calcul des restes spéciaux :
$98 \equiv 2 \ (mod\ 12)$,
$98 \equiv 2 \ (mod\ 20)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 18)
$98 \equiv 14 \ (mod\ 28)$,
$98 \equiv 10 \ (mod\ 36)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 26)
$98 \equiv 10 \ (mod\ 44)$,
$98 \equiv 6 \ (mod\ 52)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 46)
$98 \equiv 22 \ (mod\ 60)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 38)
$98 \equiv 30 \ (mod\ 68)$,
$98 \equiv 22 \ (mod\ 76)$,
$98 \equiv 14 \ (mod\ 84)$,
$98 \equiv 6 \ (mod\ 92)$,
$98 \equiv 2 \ (mod\ 100)$, (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)

$98 \equiv 10$ (mod 108), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 18$ (mod 116), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 26$ (mod 124), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 14$ (mod 132), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 42$ (mod 140), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 50$ (mod 148), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 58$ (mod 156), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 66$ (mod 164) (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 74$ (mod 172), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 82$ (mod 180), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 90$ (mod 188), (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)
$98 \equiv 98$ (mod 196) (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98).

Ajout des nombres à l'ensemble E_{84} *:*
remarque : la division est une division entière (on prend la partie entière du résultat).

- $1 - \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 1 + \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 2 = 3$, ajoutons 2 et 3 à l'ensemble,

- $2 - \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 2 + \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 2 = 4$, ajoutons 3 et 4 à l'ensemble,

- $98 \equiv 14$ (mod 28), ajoutons 1 à l'ensemble,

- $4 - \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 4 + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 2 = 8$, ajoutons 3 et 8 à l'ensemble,

- $5 - \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 5 + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 2 = 9$, ajoutons 4 et 9 à l'ensemble,

- $6 - \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 6 + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 2 = 9$, ajoutons 6 et 9 à l'ensemble,

- $7 - \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 7 + \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 2 = 14$, ajoutons 3 et 14 à l'ensemble,

- $8 - \left\lfloor \frac{30}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 8 + \left\lfloor \frac{30}{4} \right\rfloor + 2 = 17$, ajoutons 2 et 17 à l'ensemble,

- $9 - \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 9 + \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 2 = 16$, ajoutons 5 et 16 à l'ensemble,

- $10 - \left\lfloor \frac{14}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 10 + \left\lfloor \frac{14}{4} \right\rfloor + 2 = 15$, ajoutons 8 et 15 à l'ensemble,
- $11 - \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 1 = 11, 11 + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 2 = 14$, ajoutons 11 et 14 à l'ensemble,
- $12 - \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 1 = 13, 12 + \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 2 = 14$, ajoutons 13 et 14 à l'ensemble,
- $13 - \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 1 = 12, 13 + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 2 = 17$, ajoutons 12 et 17 à l'ensemble,
- $14 - \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor + 1 = 11, 14 + \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor + 2 = 20$, ajoutons 11 et 20 à l'ensemble,
- $15 - \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor + 1 = 10, 15 + \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor + 2 = 23$, ajoutons 10 et 23 à l'ensemble,
- $16 - \left\lfloor \frac{34}{4} \right\rfloor + 1 = 9, 16 + \left\lfloor \frac{34}{4} \right\rfloor + 2 = 26$, ajoutons 9 à l'ensemble, $(26 > 24)$
- $17 - \left\lfloor \frac{42}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 17 + \left\lfloor \frac{42}{4} \right\rfloor + 2 = 29$, ajoutons 8 à l'ensemble, $(29 > 24)$
- $18 - \left\lfloor \frac{50}{4} \right\rfloor + 1 = 7, 18 + \left\lfloor \frac{50}{4} \right\rfloor + 2 = 31$, ajoutons 7 à l'ensemble, $(31 > 24)$
- $19 - \left\lfloor \frac{58}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 19 + \left\lfloor \frac{58}{4} \right\rfloor + 2 = 35$, ajoutons 6 à l'ensemble, $(35 > 24)$
- $20 - \left\lfloor \frac{66}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 20 + \left\lfloor \frac{66}{4} \right\rfloor + 2 = 38$, ajoutons 5 à l'ensemble, $(38 > 24)$
- $21 - \left\lfloor \frac{74}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 21 + \left\lfloor \frac{74}{4} \right\rfloor + 2 = 41$, ajoutons 4 à l'ensemble, $(41 > 20)$
- $22 - \left\lfloor \frac{82}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 22 + \left\lfloor \frac{82}{4} \right\rfloor + 2 = 44$, ajoutons 3 à l'ensemble, $(41 > 20)$
- $23 - \left\lfloor \frac{90}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 23 + \left\lfloor \frac{90}{4} \right\rfloor + 2 = 47$, ajoutons 2 à l'ensemble, $(41 > 20)$

- $98 \equiv 98\ (mod\ 196)$, ajoutons 1 à l'ensemble

Complétion des lignes quand les mots sont trop courts
$2+3=5, 5+3=8, 8+3=11, 11+3=14, 14+3=17, 17+3=20, 20+3=23$,
$3+3=6, 6+3=9, 9+3=12, 12+3=15, 15+3=18, 18+3=21, 21+3=24$,
ajoutons 5, 8, 11, 14, 17, 20 et 23 à l'ensemble,
ajoutons 6, 9, 12, 15, 18, 21 et 24 à l'ensemble,
$3+5=8, 8+5=13, 13+5=18, 18+5=23$,, $4+5=9, 9+5=14, 14+5=19, 19+5=24$,, ajoutons 8, 13, 18 et 23 à l'ensemble, ajoutons 9, 14, 19 et 24 à l'ensemble,
$1+7=8, 8+7=15, 15+5=22$, ajoutons 8, 15 et 22 à l'ensemble,
$3+9=12, 12+9=21, 8+9=17$, ajoutons 12 et 21 à l'ensemble, ajoutons 17 à l'ensemble;
$4+11=15, 9+11=20$, ajoutons 15 et 20 à l'ensemble ;
$6+13=19, 9+13=22$, ajoutons 19 et 22 à l'ensemble ;
$3+15=18$, ajoutons 18 à l'ensemble ;
$2+17=19$, ajoutons 19 à l'ensemble ;
$5+19=24$, ajoutons 24 à l'ensemble ;

L'ensemble associé à 98, E_{98}, est, après exécution de l'algorithme, égal à
$\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 23, 23, 24, 24, 24\}$.
$7, 10$ et 16 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble. A 7 correspond le décomposant de Goldbach 37, à 10 correspond le décomposant de Goldbach 31, à 16 correspond le décomposant de Goldbach 19, pour le nombre 98.

Je ne sais pas démontrer pourquoi il est obligatoire que l'un des nombres de l'ensemble apparaisse sous une unique occurrence...

Valeurs absolues des résidus modulaires minima de Gauss et nombres premiers

Denise Vella-Chemla

10 mai 2009

Pour chaque nombre pair $2a$, calculons la valeur absolue de son reste minimum selon des modules prenant les valeurs successives $8i+4$ pour i strictement positif et inférieur ou égal à m, le nombre de nombres impairs inférieurs ou égaux à la moitié de $2a$.

Dans chaque colonne, effectuons maintenant un traitement que l'on souhaiterait appeler "écrêter la sinusoïde" et qui consiste à colorer dans la colonne c les nombres égaux à $2c$ ou $2c-2$.

Après ce traitement, seules certaines lignes ont uniquement leur dernier nombre coloré. Ces lignes sont les lignes de nombres pairs $2a$ tels que soit a est un nombre premier, soit $p+1=a=q-1$ et p et q sont deux nombres premiers jumeaux.

De 24 à 100, les doubles de nombres premiers sont 26 (double de 13), 34 (double de 17), 38 (double de 19), 46 (double de 23), 58 (double de 29), 62 (double de 31), 74 (double de 37), 82 (double de 41), 86 (double de 43) et 94 (double de 47).

De 24 à 100, les doubles d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux sont 24 (12 est entre 11 et 13), 36 (18 est entre 17 et 19), 60 (30 est entre 29 et 31) et enfin 84 (42 est entre 41 et 43).

24 :	0	4	4	12	20																			
26 :	2	6	2	10	18	26																		
28 :	4	8	0	8	16	24																		
30 :	6	10	2	6	14	22	30																	
32 :	4	8	4	4	12	20	28																	
34 :	2	6	6	2	10	18	26	34																
36 :	0	4	8	0	8	16	24	32																
38 :	2	2	10	2	6	14	22	30	38															
40 :	4	0	12	4	4	12	20	28	36															
42 :	6	2	14	6	2	10	18	26	34	42														
44 :	4	4	12	8	0	8	16	24	32	40														
46 :	2	6	10	10	2	6	14	22	30	38	46													
48 :	0	8	8	12	4	4	12	20	28	36	44													
50 :	2	10	6	14	6	2	10	18	26	34	42	50												
52 :	4	8	4	16	8	0	8	16	24	32	40	48												
54 :	6	6	2	18	10	2	6	14	22	30	38	46	54											
56 :	4	4	0	16	12	4	4	12	20	28	36	44	52											
58 :	2	2	2	14	14	6	2	10	18	26	34	42	50	58										
60 :	0	0	4	12	16	8	0	8	16	24	32	40	48	56										
62 :	2	2	6	10	18	10	2	6	14	22	30	38	46	54	62									
64 :	4	4	8	8	20	12	4	4	12	20	28	36	44	52	60									
66 :	6	6	10	6	22	14	6	2	10	18	26	34	42	50	58	66								
68 :	4	8	12	4	20	16	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64								
70 :	2	10	14	2	18	18	10	2	6	14	22	30	38	46	54	62	70							
72 :	0	8	12	0	16	20	12	4	4	12	20	28	36	44	52	60	68							
74 :	2	6	10	2	14	22	14	6	2	10	18	26	34	42	50	58	66	74						
76 :	4	4	8	4	12	24	16	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72						
78 :	6	2	6	6	10	26	18	10	2	6	14	22	30	38	46	54	62	70	78					
80 :	4	0	4	8	8	24	20	12	4	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76					
82 :	2	2	2	10	6	22	22	14	6	2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82				
84 :	0	4	0	12	4	20	24	16	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80				
86 :	2	6	2	14	2	18	26	18	10	2	6	14	22	30	38	46	54	62	70	78	86			
88 :	4	8	4	16	0	16	28	20	12	4	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84			
90 :	6	10	6	18	2	14	30	22	14	6	2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82	90		
92 :	4	8	8	16	4	12	28	24	16	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88		
94 :	2	6	10	14	6	10	26	26	18	10	2	6	14	22	30	38	46	54	62	70	78	86	94	
96 :	0	4	12	12	8	8	24	28	20	12	4	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	
98 :	2	2	14	10	10	6	22	30	22	14	6	2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82	90	98
100 :	4	0	12	8	12	4	20	32	24	16	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96

Tester autrement la primalité

Denise Vella-Chemla

12 Mai 2009

1 Introduction

Est présentée dans cette note une nouvelle façon de tester la primalité d'un nombre entier, qui a découlé de recherches autour de la Conjecture de Goldbach ([6]). Cette conjecture reformulée par Euler énonce que *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

2 Utiliser la valeur absolue du résidu minimum absolu défini par Gauss

En annexe, est fourni un extrait des Recherches Arithmétiques de Gauss qui donne la définition de ce que Gauss appelle le *résidu minimum absolu* d'un nombre entier relatif selon un certain module.

Nous utilisons ici la valeur absolue de ce résidu minimum absolu selon les modules successifs 6, 10, 14,..., i.e. selon les modules de la forme $4k+2$ pour $0 < k < \sqrt{x}$.

Associons dans un tableau à chaque nombre entier x variant de 3 à 50 son image par la fonction $f(x,k) = 2k+1-varma(x,4k+2)$, pour k prenant les valeurs successives de 1 à $\sqrt{x}$, et où $varma(x,m)$ est la valeur absolue du *résidu minimum absolu* de x selon le module m (pour $k=0$, $f(x,k) = varma(x,4k+2)$). Les entêtes de colonnes fournissent les modules $4k+2$ selon lesquels sont calculées les valeurs de $f(x,k)$.

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
3 :	1	0									
4 :	0	1	1								
5 :	1	2	0								
6 :	0	3	1								
7 :	1	2	2								
8 :	0	1	3								
9 :	1	0	4	2							
10 :	0	1	5	3							
11 :	1	2	4	4							
12 :	0	3	3	5							
13 :	1	2	2	6							
14 :	0	1	1	7							
15 :	1	0	0	6							
16 :	0	1	1	5	7						
17 :	1	2	2	4	8						
18 :	0	3	3	3	9						
19 :	1	2	4	2	8						
20 :	0	1	5	1	7						
21 :	1	0	4	0	6						
22 :	0	1	3	1	5						
23 :	1	2	2	2	4						
24 :	0	3	1	3	3						
25 :	1	2	0	4	2	8					
26 :	0	1	1	5	1	7					
27 :	1	0	2	6	0	6					
28 :	0	1	3	7	1	5					
29 :	1	2	4	6	2	4					
30 :	0	3	5	5	3	3					
31 :	1	2	4	4	4	2					
32 :	0	1	3	3	5	1					
33 :	1	0	2	2	6	0					
34 :	0	1	1	1	7	1					
35 :	1	2	0	0	8	2					
36 :	0	3	1	1	9	3	3				
37 :	1	2	2	2	8	4	2				
38 :	0	1	3	3	7	5	1				
39 :	1	0	4	4	6	6	0				
40 :	0	1	5	5	5	7	1				
41 :	1	2	4	6	4	8	2				
42 :	0	3	3	7	3	9	3				
43 :	1	2	2	6	2	10	4				
44 :	0	1	1	5	1	11	5				
45 :	1	0	0	4	0	10	6				
46 :	0	1	1	3	1	9	7				
47 :	1	2	2	2	2	8	8				
48 :	0	3	3	1	3	7	9				
49 :	1	2	4	0	4	6	10	4			
50 :	0	1	5	1	5	5	11	5			

Etudions maintenant pour chaque x le produit des valeurs $f(x,k)$ ainsi calculées.

Trivialement, ce produit va être non nul pour les nombres premiers impairs (sauf 3 et 5), ce que l'on peut écrire :

$$x \text{ est un nombre premier impair } \iff \prod_{0\,<\,k\,<\,\sqrt{x}} f(x,k) \;>\; 0$$

Fournissons une autre façon de calculer $varma(x,k)$:

$$varma(x,k) = \mid \frac{k}{\pi} arcsin(sin(\frac{x\pi}{k})) \mid$$

Cette fonction est une fonction continue en dents de scie.
On imagine qu'en multipliant entre elles deux fonctions en dents de scie de périodicité p et q, on obtiendra une fonction continue de périodicité $ppcm(p,q)$.

Le fait pour un nombre pair d'admettre une décomposition de Goldbach, tel qu'il est présenté dans [4] peut alors s'écrire :

$$\begin{gathered}
\forall\, x \;\geq\; 3,\; Goldbach(2x,p,q) \\
\iff \\
\text{2x} \;=\; p+q \\
et\ p\ est\ un\ nombre\ premier\ impair \\
et\ q\ est\ un\ nombre\ premier\ impair \\
\iff \\
\exists\, d \;\leq\; x-3\ tel\ que \\
\prod_{0\,<\,k\,<\,\sqrt{x-d}} f(x-d,k) \;\times \prod_{0\,<\,m\,<\,\sqrt{x+d}} f(x+d,m) \;>\; 0
\end{gathered}$$

On pourrait démontrer la conjecture de Goldbach si l'on parvenait à démontrer que les différents produits selon la variable d ne peuvent pas être tous simultanément nuls[1].

3 Explication

Par deux programmes différents (l'un traitant les nombres pairs doubles de nombres pairs et l'autre traitant les nombres pairs doubles de nombres impairs), on essaie de trouver une explication au fait qu'il existe systématiquement un nombre d compris entre 1 et le nombre d'impairs inférieurs ou égaux à x qui est tel que les produits $f(x-d,k) * f(x+d,k)$ selon les modules k de 3 à $\sqrt{x}$ sont tous non nuls (nota : c'est à dire que l'on effectue les produits en prenant les éléments 2 par 2 autour de x par module pris chacun isolément au lieu d'effectuer les produits de la ligne correspondant à $x-d$ et de la ligne correspondant à $x+d$ pour étudier si chacun d'eux est premier).

[1] Peut-être est-il même possible d'obtenir par calcul les valeurs de d qui n'annulent pas le produit des produits.

En annexes 4 et 5 sont fournis les résultats de ces deux programmes ainsi que les sources des programmes eux-mêmes en annexes 6 et 7. On a systématiquement coloré les éléments de la première colonne dont tous les produits sont non nuls. On a fourni la décomposition de Goldbach à laquelle cette colonne correspond. On a mis un petit trait dans chaque ligne qui correspond à un axe de symétrie de la courbe en dents de scie (dont on ne fournit que les résultats pour les abscisses entières). Les axes de symétrie des courbes des différentes lignes sont décalés d'un en un pour les nombres pairs doubles de nombres impairs, et de deux en deux pour les nombres pairs doubles de nombres pairs. C'est à cause de ce "décalage" des axes de symétrie qu'on obtient toujours une colonne de produits tous non nuls (les courbes en dents de scie sont en quelque sorte déphasées). On constate que les fonctions en dents de scie dans le sens des colonnes ont pour conséquence des fonctions en dents de scie dans le sens des lignes pour les produits. Je crois que cette voie est la bonne, mais il faut réussir à la formaliser rigoureusement.

Une analyse plus poussée des résultats des deux programmes amènent aux conclusions suivantes (ceci doit être prouvable en utilisant la définition des produits effectués) :

- Pour les doubles de nombres impairs, les lignes des diviseurs de $2x$ commencent par un 0, et contiennent les carrés des $k+1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne. Ce qui nous intéresse pour assurer l'existence de décomposants de Goldbach, c'est la position des zéros : les positions de 2 zéros successifs sont systématiquement écartées de $2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

- Pour les doubles de nombres pairs, les lignes des diviseurs de $2x$ contiennent également les carrés des $k+1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne mais la ligne commencent par le plus grand des carrés de pairs. Les positions de 2 zéros successifs, comme dans le cas précédent, sont systématiquement écartées de $2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

- Sur les lignes des nombres qui ne divisent pas x, dans le cas d'un nombre pair double d'un nombre impair, on trouve des produits de deux nombres pairs successifs. Ce qui nous intéresse pour la recherche de décomposants, c'est le fait que si l'on prend 3 zéros successifs sur ces lignes, ils sont écartés de $écart_1$ et $écart_2$ tels que $écart_1 + écart_2 = 2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

- Sur les lignes des nombres qui ne divisent pas x, dans le cas d'un nombre pair double d'un nombre pair, lorsque les lignes commencent par un 0, on trouve des produits de deux nombres pairs successifs. Ce qui nous intéresse pour la recherche de décomposants, c'est le fait que si l'on prend 3 zéros successifs sur ces lignes, ils sont écartés de $écart_1$ et $écart_2$ tels que $écart_1 + écart_2 = 2k+1$ sur la $k^{ième}$ ligne.

Ce sont les contraintes spécifiques présentées ci-dessus sur les écarts entre les positions des zéros des différentes lignes qui ont pour conséquence que l'une des colonnes au moins ne contient aucun zéro.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.
[6] D. Vella-Chemla, Différentes formulations équivalentes de la Conjecture de Goldbach, mai 2009.

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9 \ (mod\, 5)$, $-7 \equiv 15 \ (mod\, 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite $0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

[2] Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : une citation extraite des Recherches Arithmétiques de Gauss (p.416)

Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, [...], est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique ; [...]. En outre, la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

Annexe 3 : Valeurs absolues des résidus minima absolus pour les nombres entiers de 51 à 100

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
51 :	1	0	4	2	6	4	12	6			
52 :	0	1	3	3	7	3	13	7			
53 :	1	2	2	4	8	2	12	8			
54 :	0	3	1	5	9	1	11	9			
55 :	1	2	0	6	8	0	10	10			
56 :	0	1	1	7	7	1	9	11			
57 :	1	0	2	6	6	2	8	12			
58 :	0	1	3	5	5	3	7	13			
59 :	1	2	4	4	4	4	6	14			
60 :	0	3	5	3	3	5	5	15			
61 :	1	2	4	2	2	6	4	14			
62 :	0	1	3	1	1	7	3	13			
63 :	1	0	2	0	0	8	2	12			
64 :	0	1	1	1	1	9	1	11	13		
65 :	1	2	0	2	2	10	0	10	14		
66 :	0	3	1	3	3	11	1	9	15		
67 :	1	2	2	4	4	10	2	8	16		
68 :	0	1	3	5	5	9	3	7	17		
69 :	1	0	4	6	6	8	4	6	16		
70 :	0	1	5	7	7	7	5	5	15		
71 :	1	2	4	6	8	6	6	4	14		
72 :	0	3	3	5	9	5	7	3	13		
73 :	1	2	2	4	8	4	8	2	12		
74 :	0	1	1	3	7	3	9	1	11		
75 :	1	0	0	2	6	2	10	0	10		
76 :	0	1	1	1	5	1	11	1	9		
77 :	1	2	2	0	4	0	12	2	8		
78 :	0	3	3	1	3	1	13	3	7		
79 :	1	2	4	2	2	2	12	4	6		
80 :	0	1	5	3	1	3	11	5	5		
81 :	1	0	4	4	0	4	10	6	4	14	
82 :	0	1	3	5	1	5	9	7	3	13	
83 :	1	2	2	6	2	6	8	8	2	12	
84 :	0	3	1	7	3	7	7	9	1	11	
85 :	1	2	0	6	4	8	6	10	0	10	
86 :	0	1	1	5	5	9	5	11	1	9	
87 :	1	0	2	4	6	10	4	12	2	8	
88 :	0	1	3	3	7	11	3	13	3	7	
89 :	1	2	4	2	8	10	2	14	4	6	
90 :	0	3	5	1	9	9	1	15	5	5	
91 :	1	2	4	0	8	8	0	14	6	4	
92 :	0	1	3	1	7	7	1	13	7	3	
93 :	1	0	2	2	6	6	2	12	8	2	
94 :	0	1	1	3	5	5	3	11	9	1	
95 :	1	2	0	4	4	4	4	10	10	0	
96 :	0	3	1	5	3	3	5	9	11	1	
97 :	1	2	2	6	2	2	6	8	12	2	
98 :	0	1	3	7	1	1	7	7	13	3	
99 :	1	0	4	6	0	0	8	6	14	4	
100 :	0	1	5	5	1	1	9	5	15	5	5

Annexe 4 : Produits f(x-k,i)*f(x+k,i) pour les nombres pairs doubles de nombres impairs (x allant de 13 à 49 de 2 en 2, i allant de 1 à $\sqrt{x}$ de 1 en 1 et k allant de 0 à $\frac{x-1}{2}$ de 2 en 2)

26 est un double de premier

$30 \;=\; 13 + 17$

0	4	$\mid$ 4	0
0	4	16	$\mid$ 16
36	24	8	0

34 est un double de premier

38 est un double de premier

$42 \;=\; 19 + 23$

0	4	$\mid$ 4	0	4
16	8	0	$\mid$ 0	8
0	4	16	36	$\mid$ 36
36	32	16	0	8

46 est un double de premier

$50 \;=\; 19 + 31$

4	0	$\mid$ 0	4	0	0
0	4	16	$\mid$ 16	4	0
16	12	0	8	$\mid$ 8	0
4	0	12	32	48	$\mid$ 48
64	60	40	16	0	8

$54 \;=\; 23 + 31$

0	4	$\mid$ 4	0	4	4	0
4	0	8	$\mid$ 8	0	4	0
36	24	8	0	$\mid$ 0	8	24
0	4	16	36	64	$\mid$ 64	36
36	32	20	0	16	24	$\mid$ 24

58 est un double de premier

62 est un double de premier

$66 \;=\; 37 + 29$

0	4	$\mid$ 4	0	4	4	0	4
4	0	8	$\mid$ 8	0	4	0	8
4	0	12	24	$\mid$ 24	12	0	4
36	32	16	0	8	$\mid$ 8	0	16
0	4	16	36	64	100	$\mid$ 100	64

$70 \;=\; 41 + 29$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 16 & |\,16 & 4 & 0 & 4 & 16 & 16 \\
0 & 4 & 16 & 36 & |\,36 & 16 & 4 & 0 & 4 \\
64 & 48 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 & 48 \\
4 & 0 & 12 & 32 & 60 & 80 & |\,80 & 60 & 32
\end{array}$$

74 est un double de premier

$78 \ = \ 37 + 41$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
0 & 4 & |\,4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\
16 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 16 & 8 & 0 & 0 & 8 \\
16 & 12 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 \\
36 & 32 & 16 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 16 & 32 & 36 \\
36 & 32 & 20 & 0 & 16 & 24 & |\,24 & 16 & 0 & 20 \\
0 & 4 & 16 & 36 & 64 & 100 & 144 & |\,144 & 100 & 64
\end{array}$$

82 est un double de premier

86 est un double de premier

$90 \ = \ 43 + 47$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
0 & 4 & |\,4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 4 & 16 & |\,16 & 4 & 0 & 4 & 16 & 16 & 4 & 0 \\
16 & 12 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 8 \\
0 & 4 & 16 & 36 & 64 & |\,64 & 36 & 16 & 4 & 0 & 4 \\
100 & 80 & 48 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 & 48 & 80 \\
36 & 32 & 20 & 0 & 24 & 40 & 48 & |\,48 & 40 & 24 & 0
\end{array}$$

94 est un double de premier

$98 \ = \ 37 + 61$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
16 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 16 & 8 & 0 & 0 & 8 & 16 & 8 \\
0 & 4 & 16 & 36 & |\,36 & 16 & 4 & 0 & 4 & 16 & 36 & 36 \\
16 & 12 & 0 & 16 & 24 & |\,24 & 16 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 \\
36 & 32 & 20 & 0 & 16 & 24 & |\,24 & 16 & 0 & 20 & 32 & 36 \\
100 & 96 & 72 & 40 & 16 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 16 & 40 & 72 \\
16 & 12 & 0 & 20 & 48 & 84 & 112 & 120 & |\,120 & 112 & 84 & 48
\end{array}$$

Annexe 5 : Produits f(x-k,i)*f(x+k,i) pour les nombres pairs doubles de nombres pairs (x allant de 14 à 50 de 2 en 2, i allant de 1 à $\sqrt{x}$ de 1 en 1 et k allant de 1 à $x-2$ de 2 en 2)

$2de2en228 \ = \ 11 + 17$

$$\begin{array}{rrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 \\
0 & 8 & 16 & 8 & 0 & |\,0 \\
36 & 16 & 4 & 0 & 4 & 16
\end{array}$$

$32 \ = \ 13 + 19$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 16 & 8 & 0 & |\,0 & 8 \\
24 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12 & 24 \\
48 & 32 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12
\end{array}$$

$36 \; = \; 17 + 19$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
4 & 0 & 4 & |\,4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\
8 & 0 & 4 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 4 \\
8 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 8 & |\,8 \\
64 & 36 & 16 & 4 & 0 & 4 & 16 & 36
\end{array}$$

$40 \; = \; 17 + 23$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
16 & 4 & 0 & 4 & 16 & |\,16 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 8 & 24 & 36 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 \\
48 & 32 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12 & 32 & 48
\end{array}$$

$44 \; = \; 13 + 31$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 4 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 4 & 0 & 8 \\
0 & 8 & 24 & 36 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 \\
24 & 16 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 16 & 24 & |\,24
\end{array}$$

$48 \; = \; 19 + 29$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
4 & 0 & 4 & |\,4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\
0 & 8 & 16 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 16 & 8 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 12 & 16 \\
8 & 0 & 16 & 32 & 36 & 32 & 16 & 0 & 8 & |\,8 & 0
\end{array}$$

$52 \; = \; 23 + 29$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 8 & 16 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 16 & 8 & 0 & 0 & 8 \\
24 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12 & 24 & |\,24 & 12 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 8 & 24 & 48 & 64 & 48 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 \\
48 & 40 & 20 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 20 & 40 & 48 & |\,48
\end{array}$$

$56 \; = \; 19 + 37$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 4 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 4 & 0 & 8 & 8 & 0 & 4 \\
36 & 16 & 4 & 0 & 4 & 16 & 36 & |\,36 & 16 & 4 & 0 & 4 & 16 \\
0 & 8 & 24 & 48 & 64 & 48 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 & 48 \\
24 & 16 & 0 & 20 & 32 & 36 & 32 & 20 & 0 & 16 & 24 & |\,24 & 16
\end{array}$$

$60 \; = \; 29 + 31$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
4 & 0 & 4 & |\,4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\
16 & 4 & 0 & 4 & 16 & |\,16 & 4 & 0 & 4 & 16 & 16 & 4 & 0 & 4 \\
24 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12 & 24 & |\,24 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12 & 24 \\
8 & 0 & 16 & 32 & 36 & 32 & 16 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 16 & 32 & 36 \\
8 & 0 & 16 & 40 & 60 & 64 & 60 & 40 & 16 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 16
\end{array}$$

$64 \; = \; 23 + 41$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
8 & 0 & 4 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 4 & 0 & 8 & 8 & 0 & 4 & 0 & 8 \\
8 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 8 & |\,8 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 8 & 8 \\
24 & 16 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 16 & 24 & |\,24 & 16 & 0 & 12 & 16 & 12 \\
0 & 8 & 24 & 48 & 80 & 100 & 80 & 48 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 & 48
\end{array}$$

$68 \;==31+37$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrr}
0 & 4 & 0 & |\,0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 16 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 16 & 8 & 0 & 0 & 8 & 16 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 24 & 36 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 & 36 & 24 & 8 & 0 & 0 & 8 \\
48 & 32 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12 & 32 & 48 & |\,48 & 32 & 12 & 0 & 4 & 0 & 12 \\
0 & 8 & 24 & 48 & 80 & 100 & 80 & 48 & 24 & 8 & 0 & |\,0 & 8 & 24 & 48 & 80
\end{array}
$$

72 = 31 + 41
4 0 4 | 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0
0 8 16 8 0 | 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8
0 8 24 36 24 8 0 | 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24
64 36 16 4 0 4 16 36 64 | 64 36 16 4 0 4 16 36
8 0 16 40 60 64 60 40 16 0 8 | 8 0 16 40 60 64
8 0 16 40 72 96 100 96 72 40 16 0 8 | 8 0 16 40

76 = 29 + 47
0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0
8 0 4 0 8 | 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4
8 0 12 16 12 0 8 | 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16
48 32 12 0 4 0 12 32 48 | 48 32 12 0 4 0 12 32 48
24 16 0 20 32 36 32 20 0 16 24 | 24 16 0 20 32 36 32
0 8 24 48 80 120 144 120 80 48 24 8 0 | 0 8 24 48 80

80 = 43 + 37
0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0
16 4 0 4 16 | 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4
24 12 0 4 0 12 24 | 24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 0
24 16 0 12 16 12 0 16 24 | 24 16 0 12 16 12 0 16 24 24
48 40 20 0 12 16 12 0 20 40 48 | 48 40 20 0 12 16 12 0
0 8 24 48 80 120 144 120 80 48 24 8 0 | 0 8 24 48 80 120

84 = 41 + 43
4 0 4 | 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0
8 0 4 0 8 | 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8
36 16 4 0 4 16 36 | 36 16 4 0 4 16 36 36 16 4 0 4 16
8 0 16 32 36 32 16 0 8 | 8 0 16 32 36 32 16 0 8 8 0
80 60 32 12 0 4 0 12 32 60 80 | 80 60 32 12 0 4 0 12 32
8 0 16 40 72 96 100 96 72 40 16 0 8 | 8 0 16 40 72 96 100

88 = 41 + 47
0 4 0 0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4
0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 | 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0
24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 | 24 12 0 4 0 12
0 8 24 48 64 48 24 8 0 | 0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8
100 64 36 16 4 0 4 16 36 64 100 | 100 64 36 16 4 0 4 16 36
24 16 0 24 48 60 64 60 48 24 0 16 24 | 24 16 0 24 48 60 64

92 = 31 + 61
0 4 0 | 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0
0 8 16 8 0 | 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0
8 0 12 16 12 0 8 | 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 12 0 8
0 8 24 48 64 48 24 8 0 | 0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8 24
80 60 32 12 0 4 0 12 32 60 80 | 80 60 32 12 0 4 0 12 32 60
48 40 24 0 20 32 36 32 20 0 24 40 48 | 48 40 24 0 20 32 36 32

$96 = 43 + 53$

4	0	4	|4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4
8	0	4	0	8	|8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8
0	8	24	36	24	8	0	|0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0
8	0	16	32	36	32	16	0	8	|8	0	16	32	36	32	16	0	8	8	0	16
48	40	20	0	12	16	12	0	20	40	48	|48	40	20	0	12	16	12	0	20	40
80	72	48	20	0	12	16	12	0	20	48	72	80	|80	72	48	20	0	12	16	12

$100 = 47 + 53$

0	4	0	|0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0
16	4	0	4	16	|16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4
0	8	24	36	24	8	0	|0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24
24	16	0	12	16	12	0	16	24	|24	16	0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	12
24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	|24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	24	16
120	96	60	32	12	0	4	0	12	32	60	96	120	|120	96	60	32	12	0	4	0	12	32	60
24	16	0	24	56	84	96	100	96	84	56	24	0	16	24	|24	16	0	24	56	84	96	100	96

Annexe 6 : Source du programme de calcul des produits pour les nombres pairs doubles de nombres impairs

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int prime(int atester)
{
  unsigned long diviseur=2;
  bool pastrouve=true;
  unsigned long k = 2;
  if (atester == 1) return 0;
  if (atester == 2) return 1;
  if (atester == 3) return 1;
  if (atester == 5) return 1;
  if (atester == 7) return 1;
  while (pastrouve)
    {
    if ((k * k) > atester) return 1;
    else
      if ((atester % k) == 0) {
        return 0 ;
      }
        else k++;
    }
}

int main (int argc, char* argv[])
{   int deuxx, x, m, i, j, k, produit, d ;
    bool premier ;
    int tab[200][200] ;

    for (x= 3; x <= 100 ; x++)
    {
        m = sqrt((float) x);
        for (i = 0 ; i <= 10 ; i++)
            for (j=0 ; j <= 2*i+1 ; j++)
                if (((x % (4*i+2)) == j) ||
                    ((x % (4*i+2)) == (4*i+2-j)))
                    tab[x][i] = 2*i+1-j ;
    }
    std::cout << "\n" ;
    for (x = 13 ; x <= 50 ; x=x+2)
    {
        m = (int) sqrt((float) x);
        if (prime(x)) std::cout << "\n" << 2*x << "␣est␣un␣double␣de␣premier\n" ;
        else
        {
            std::cout << "\n" << x << ":\n" ;
            for (i = 1 ; i <= m ; i++)
            {
                j = 2*i+1 ;
                for (k = 0 ; k < (x-1)/2 ; k=k+2)
                    printf("%4d",tab[x-k][i] * tab[x+k][i]) ;
                std::cout << "\n" ;}}}}
```

Annexe 7 : Source du programme de calcul des produits pour les nombres pairs doubles de nombres pairs

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>

int prime(int atester)
{
  unsigned long diviseur=2;
  bool pastrouve=true;
  unsigned long k = 2;
  if (atester == 1) return 0;
  if (atester == 2) return 1;
  if (atester == 3) return 1;
  if (atester == 5) return 1;
  if (atester == 7) return 1;
  while (pastrouve)
    {
    if ((k * k) > atester) return 1;
    else
      if ((atester % k) == 0) {
        return 0 ;
      }
        else k++;
    }
}

int main (int argc, char* argv[])
{   int deuxx, x, m, i, j, k, produit, d ;
    bool premier ;
    int tab[200][200] ;

    for (x= 3; x <= 100 ; x++)
    {
        m = sqrt((float) x);
        for (i = 0 ; i <= 10 ; i++)
            for (j=0 ; j <= 2*i+1 ; j++)
                if (((x % (4*i+2)) == j) ||
                    ((x % (4*i+2)) == (4*i+2-j)))
                    tab[x][i] = 2*i+1-j ;
    }
    std::cout << "\n" ;
    for (x = 14 ; x <= 50 ; x=x+2)
    {
        m = (int) sqrt((float) x);
        if (prime(x)) std::cout << "\n" << 2*x << " est un double de premier\n" ;
        else
        {
            std::cout << "\n" << x << ":\n" ;
            for (i = 1 ; i <= m ; i++)
            {
                j = 2*i+1 ;
                for (k = 1 ; k < 2*((x/2)-1) ; k=k+2)
                    printf("%4d",tab[x-k][i] * tab[x+k][i]) ;
                std::cout << "\n" ;
            }
        }
    }
}
```

Conjecture de Goldbach
et résidus minima absolus de Gauss

Denise Vella-Chemla

20 Mai 2009

1 Introduction

Est présenté dans cette note un algorithme simple de calcul des décomposants de Goldbach d'un nombre pair qui a découlé de recherches autour de la Conjecture de Goldbach ([6]). Cette conjecture reformulée par Euler énonce que *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

2 Utiliser la valeur absolue du résidu minimum absolu défini par Gauss

En annexe 1, est fourni un extrait des Recherches Arithmétiques de Gauss qui donne la définition de ce que Gauss appelle le *résidu minimum absolu* d'un nombre entier relatif selon un certain module.

Nous utilisons ici la valeur absolue de ce résidu minimum absolu selon les modules successifs 6, 10, 14,..., i.e. selon les modules de la forme $4k + 2$ pour $0 < k < \sqrt{x}$.

En annexe 3, on trouvera un tableau qui fournit pour chaque nombre entier x variant de 3 à 100 son image par la fonction $f(x, k) = 2k+1-varma(x, 4k+2)$, pour k prenant les valeurs successives de 1 à $\sqrt{x}$, et où $varma(x, m)$ est la valeur absolue du *résidu minimum absolu* de x selon le module m (pour $k = 0$, $f(x, k) = varma(x, 4k + 2)$).

Trivialement, pour x donné, le produit des $f(x, k)$ (k variant de 0 à $\sqrt{x}$) est non nul pour les nombres premiers impairs (sauf 3 et 5), ce que l'on peut écrire ainsi :

$$x \textit{ est un nombre premier impair} \iff \prod_{0\,<\,k\,<\,\sqrt{x}} f(x,k) \;>\; 0$$

Fournissons une autre façon de calculer $varma(x, k)$:

$$varma(x,k) = \mid \frac{k}{\pi} arcsin(sin(\frac{x\pi}{k})) \mid$$

Cette fonction est une fonction continue en dents de scie. En multipliant entre elles deux fonctions en dents de scie de périodicité p et q, on obtiendra une fonction continue de périodicité $ppcm(p, q)$.

Le fait pour un nombre pair d'admettre une décomposition de Goldbach[1] peut alors s'écrire :

$$\forall\ x\ \geq\ 3,\ Goldbach(2x, p, 2x - p)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{gathered} 2\text{x}\ =\ p + (2x - p) \\ et\ p\ est\ un\ nombre\ premier\ impair \\ et\ 2x - p\ est\ un\ nombre\ premier\ impair \\ \Longleftrightarrow \\ \exists\, 3\ \leq\ p\ \leq\ x\ tel\ que \\ \prod_{0\,<\,m_i\,<\,\sqrt{p}} f(p, m_i)\ \times \prod_{0\,<\,m_j\,<\,\sqrt{2x-p}} f(2x - p, m_j)\ >\ 0 \end{gathered}$$

Pour démontrer la conjecture de Goldbach, il faudrait prouver qu'il existe toujours p compris entre 3 et x tel que selon tout module m de la forme $4k + 2$ pour k variant de 1 à $\sqrt{x}$, le produit $f(p, m) \times f(2x - p, m)$ est non nul.

3 Explication

Le fait de programmer l'idée présentée au paragraphe précédent a permis de trouver une explication au fait qu'il existe systématiquement un nombre p compris entre 3 et x qui est tel que les produits $f(p, m) \times f(2x - p, m)$ selon les modules m de la forme $4k + 2$ pour k variant de 1 à $\sqrt{x}$ sont tous non nuls (nota : c'est à dire que l'on effectue les produits en prenant les éléments 2 par 2 autour de x par module pris chacun isolément au lieu d'effectuer les produits de la ligne correspondant à p et de la ligne correspondant à $2x - p$ pour étudier si chacun d'eux est premier).
En annexes 4 et 5 sont fournis le résultat et le source du programme qui implémente cette idée. On a systématiquement coloré les éléments des colonnes dont tous les produits sont non nuls. On a fourni les décompositions de Goldbach correspondant à ces colonnes (il faut indicer chaque colonne par les nombres impairs successifs à partir de 3).

- Sur les lignes k des nombres $2k+1$ diviseurs de $2x$, il y a annulation de la courbe en dents de scie tous les $2k + 1$ nombres ; le premier zéro est à la position k. (Pour les doubles de nombres impairs, les lignes des diviseurs de $2x$ commencent par un 0, et contiennent les carrés des $k + 1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne.
  Pour les doubles de nombres pairs, les lignes des diviseurs de $2x$ contiennent également les carrés des $k + 1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne mais la ligne commencent par le plus grand des carrés de pairs.)

[1] Se reporter à [4] pour une présentation originale de la conjecture.

- Sur les lignes k des nombres $2k+1$ qui ne divisent pas $2x$, on observe deux courbes en dents de scie. La première s'annule une première fois pour k, la seconde s'annule une première fois pour une valeur strictement supérieure à k et inférieure ou égale à $2k+3$, et les deux fonctions en dents de scie sont toutes les deux de période $2k+1$.

Ce sont les contraintes spécifiques présentées ci-dessus sur les écarts entre les positions des zéros des différentes lignes qui ont pour conséquence que l'une des colonnes au moins ne contient aucun zéro.

On comprend que les nombres qui "risqueraient le plus de ne pas avoir de décomposants de Goldbach" sont les nombres pairs qui sont des puissances de 2 : ils ont deux fonctions en dents de scie par ligne, et donc, deux fois plus de zéros qui peuvent annuler des colonnes au risque que toutes les colonnes contiennent des zéros et que le nombre n'ait pas de décomposant de Goldbach.

Les cas "assez graves" (sic !) mais moins "dangereux" que les puissances de 2 sont les nombres pairs qui ont peu de diviseurs : ce sera seulement sur les lignes des diviseurs qu'une seule fonction en dents de scie s'annulera régulièrement, diminuant ainsi le nombre de colonnes couvertes par des zéros.

Quant aux nombres pairs qui ont beaucoup de diviseurs, ils ont relativement plus de décomposants de Goldbach que les autres parce que sur chaque ligne d'un de leurs diviseurs, il n'y a qu'une fonction en dents de scie au lieu de 2.

Le problème de Goldbach reformulé devient : sur l'intervalle des nombres de 1 à x, considérons $2 \times \sqrt{x}$ sinusoïdes qui ont pour périodes les nombres impairs successifs (3, 5, 7, ...). Si l'on ne considère que les sinusoïdes qui s'annulent les "premières" pour chaque période impaire, toutes ces sinusoïdes sont déphasées de 1 en 1. Pourquoi existe-t-il toujours un nombre inférieur à x qui n'annule aucune des sinusoïdes ? Connaître les transformées de Fourier ou le traitement du signal nous permettrait peut-être d'entrevoir une réponse à cette question.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.
[6] D. Vella-Chemla, Différentes formulations équivalentes de la Conjecture de Goldbach, mai 2009.

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9\ (mod\, 5)$, $-7 \equiv 15\ (mod\, 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite $0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : une citation extraite des Recherches Arithmétiques de Gauss (p.416)

Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, [...], est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique ; [...]. En outre, la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

Annexe 3 : Valeurs absolues des résidus minima absolus pour les nombres entiers de 3 à 100

Les entêtes de colonnes fournissent les modules $4k + 2$ selon lesquels sont calculées les valeurs de $f(x, k)$.

[2] Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
3 :	1	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
4 :	0	1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
5 :	1	2	0	2	4	6	8	10	12	14	16
6 :	0	3	1	1	3	5	7	9	11	13	15
7 :	1	2	2	0	2	4	6	8	10	12	14
8 :	0	1	3	1	1	3	5	7	9	11	13
9 :	1	0	4	2	0	2	4	6	8	10	12
10 :	0	1	5	3	1	1	3	5	7	9	11
11 :	1	2	4	4	2	0	2	4	6	8	10
12 :	0	3	3	5	3	1	1	3	5	7	9
13 :	1	2	2	6	4	2	0	2	4	6	8
14 :	0	1	1	7	5	3	1	1	3	5	7
15 :	1	0	0	6	6	4	2	0	2	4	6
16 :	0	1	1	5	7	5	3	1	1	3	5
17 :	1	2	2	4	8	6	4	2	0	2	4
18 :	0	3	3	3	9	7	5	3	1	1	3
19 :	1	2	4	2	8	8	6	4	2	0	2
20 :	0	1	5	1	7	9	7	5	3	1	1
21 :	1	0	4	0	6	10	8	6	4	2	0
22 :	0	1	3	1	5	11	9	7	5	3	1
23 :	1	2	2	2	4	10	10	8	6	4	2
24 :	0	3	1	3	3	9	11	9	7	5	3
25 :	1	2	0	4	2	8	12	10	8	6	4
26 :	0	1	1	5	1	7	13	11	9	7	5
27 :	1	0	2	6	0	6	12	12	10	8	6
28 :	0	1	3	7	1	5	11	13	1	9	7
29 :	1	2	4	6	2	4	10	14	12	10	8
30 :	0	3	5	5	3	3	9	15	13	11	9
31 :	1	2	4	4	4	2	8	14	14	12	10
32 :	0	1	3	3	5	1	7	13	15	13	11
33 :	1	0	2	2	6	0	6	12	16	14	12
34 :	0	1	1	1	7	1	5	11	17	15	13
35 :	1	2	0	0	8	2	4	10	16	16	14
36 :	0	3	1	1	9	3	3	9	15	17	15
37 :	1	2	2	2	8	4	2	8	14	18	16
38 :	0	1	3	3	7	5	1	7	13	19	17
39 :	1	0	4	4	6	6	0	6	12	18	18
40 :	0	1	5	5	5	7	1	5	11	17	19
41 :	1	2	4	6	4	8	2	4	10	16	20
42 :	0	3	3	7	3	9	3	3	9	15	21
43 :	1	2	2	6	2	10	4	2	8	14	20
44 :	0	1	1	5	1	11	5	1	7	13	19
45 :	1	0	0	4	0	10	6	0	6	12	18
46 :	0	1	1	3	1	9	7	1	5	11	17
47 :	1	2	2	2	2	8	8	2	4	10	16
48 :	0	3	3	1	3	7	9	3	3	9	15
49 :	1	2	4	0	4	6	10	4	2	8	14
50 :	0	1	5	1	5	5	11	5	1	7	13

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
51 :	1	0	4	2	6	4	12	6	0	6	12
52 :	0	1	3	3	7	3	13	7	1	5	11
53 :	1	2	2	4	8	2	12	8	2	4	10
54 :	0	3	1	5	9	1	11	9	3	3	9
55 :	1	2	0	6	8	0	10	10	4	2	8
56 :	0	1	1	7	7	1	9	11	5	1	7
57 :	1	0	2	6	6	2	8	12	6	0	6
58 :	0	1	3	5	5	3	7	13	7	1	5
59 :	1	2	4	4	4	4	6	14	8	2	4
60 :	0	3	5	3	3	5	5	15	9	3	3
61 :	1	2	4	2	2	6	4	14	10	4	2
62 :	0	1	3	1	1	7	3	13	11	5	1
63 :	1	0	2	0	0	8	2	12	12	6	0
64 :	0	1	1	1	1	9	1	11	13	7	1
65 :	1	2	0	2	2	10	0	10	14	8	2
66 :	0	3	1	3	3	11	1	9	15	9	3
67 :	1	2	2	4	4	10	2	8	16	10	4
68 :	0	1	3	5	5	9	3	7	17	11	5
69 :	1	0	4	6	6	8	4	6	16	12	6
70 :	0	1	5	7	7	7	5	5	15	13	7
71 :	1	2	4	6	8	6	6	4	14	14	8
72 :	0	3	3	5	9	5	7	3	13	15	9
73 :	1	2	2	4	8	4	8	2	12	16	10
74 :	0	1	1	3	7	3	9	1	11	17	11
75 :	1	0	0	2	6	2	10	0	10	18	12
76 :	0	1	1	1	5	1	11	1	9	19	13
77 :	1	2	2	0	4	0	12	2	8	18	14
78 :	0	3	3	1	3	1	13	3	7	17	15
79 :	1	2	4	2	2	2	12	4	6	16	16
80 :	0	1	5	3	1	3	11	5	5	15	17
81 :	1	0	4	4	0	4	10	6	4	14	18
82 :	0	1	3	5	1	5	9	7	3	13	19
83 :	1	2	2	6	2	6	8	8	2	12	20
84 :	0	3	1	7	3	7	7	9	1	11	21
85 :	1	2	0	6	4	8	6	10	0	10	20
86 :	0	1	1	5	5	9	5	11	1	9	19
87 :	1	0	2	4	6	10	4	12	2	8	18
88 :	0	1	3	3	7	11	3	13	3	7	17
89 :	1	2	4	2	8	10	2	14	4	6	16
90 :	0	3	5	1	9	9	1	15	5	5	15
91 :	1	2	4	0	8	8	0	14	6	4	14
92 :	0	1	3	1	7	7	1	13	7	3	13
93 :	1	0	2	2	6	6	2	12	8	2	12
94 :	0	1	1	3	5	5	3	11	9	1	11
95 :	1	2	0	4	4	4	4	10	10	0	10
96 :	0	3	1	5	3	3	5	9	11	1	9
97 :	1	2	2	6	2	2	6	8	12	2	8
98 :	0	1	3	7	1	1	7	7	13	3	7
99 :	1	0	4	6	0	0	8	6	14	4	6
100 :	0	1	5	5	1	1	9	5	15	5	5

Annexe 4 : Produits $f(p, 4i+2) * f(2x-p, 4i+2)$ pour les nombres pairs $2x$ de 26 à 100, p (indice des colonnes) allant de 3 à x ou $x-1$ suivant la parité de x, i (indice des lignes) allant de 1 à $\sqrt{x}$)

On note au bout de la ligne en vert le fait que $2k+1$ divise ($|$) ou ne divise pas ($\nmid$) $2x$.

$26 = 13 + 13$

0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 26$
	0	8	8	0	4	$5 \nmid 26$
		0	8	24	36	$7 \nmid 26$

$28 = 11 + 17$

0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 28$
	0	8	16	8	0	$5 \nmid 28$
		0	4	16	36	$7 \mid 28$

$30 = 11 + 19 = 13 + 17$

0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 30$
	0	4	16	16	4	0	$5 \mid 30$
		0	0	8	24	36	$7 \nmid 30$

$32 = 13 + 19$

0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 32$
	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 32$
		0	4	0	12	24	$7 \nmid 32$
			0	12	32	48	$9 \nmid 32$

$34 = 11 + 23 = 17 + 17$

0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 34$
	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 34$
		0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 34$
			0	8	24	48	64	$9 \nmid 34$

$36 = 13 + 23 = 17 + 19$

0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 36$
	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 36$
		0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 36$
			0	4	16	36	64	$9 \mid 36$

$38 = 19 + 19$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 38$
	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 38$
		0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 38$
			0	0	8	24	48	64	$9 \nmid 38$

$40 = 11 + 29 = 17 + 23$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 40$
	0	4	16	16	4	0	4	16	$5 \mid 40$
		0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 40$
			0	4	0	12	32	48	$9 \nmid 40$

$42 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 42$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 42$
		0	4	16	36	36	16	4	0	$7 \mid 42$
			0	8	8	0	16	32	36	$9 \nmid 42$

$44 = 13 + 31$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 44$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 44$
		0	0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 44$
			0	12	16	12	0	16	24	$9 \nmid 44$

$46 = 17 + 29 = 23 + 23$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 46$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 46$
		0	4	0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 46$
			0	16	24	24	16	0	12	16	$9 \nmid 46$

$48 = 11 + 37 = 17 + 31 = 19 + 29$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 48$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 48$
		0	8	8	0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 48$
			0	16	32	36	32	16	0	8	$9 \nmid 48$

$50 = 13 + 37 = 19 + 31$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 50$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	$5 \mid 50$
		0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 50$
			0	12	32	48	48	32	12	0	4	$9 \nmid 50$
				0	8	8	0	16	40	60	64	$11 \nmid 50$

$52 = 23 + 29$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 52$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 52$
		0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	$7 \nmid 52$
			0	8	24	48	64	48	24	8	0	$9 \nmid 52$
				0	12	16	12	0	20	40	48	$11 \nmid 52$

$54 = 13+41 = 17+37 = 23+31$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 54$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 54$
		0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	$7 \nmid 54$
			0	4	16	36	64	64	36	16	4	0	$9 \mid 54$
				0	16	24	24	16	0	20	32	36	$11 \nmid 54$

$56 = 13+43 = 19+37$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 56$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 56$
		0	4	16	36	36	16	4	0	4	16	36	$7 \mid 56$
			0	0	8	24	48	64	48	24	8	0	$9 \nmid 56$
				0	20	32	36	32	20	0	16	24	$11 \nmid 56$

$58 = 17+41 = 29+29$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 58$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 58$
		0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	$7 \nmid 58$
			0	4	0	12	32	48	48	32	12	0	4	$9 \nmid 58$
				0	20	40	48	48	40	20	0	12	16	$11 \nmid 58$

$60 = 13+47 = 17+43 = 19+41 = 23+37 = 29+31$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 60$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	$5 \mid 60$
		0	4	0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	$7 \nmid 60$
			0	8	8	0	16	32	36	32	16	0	8	$9 \nmid 60$
				0	16	40	60	64	60	40	16	0	8	$11 \nmid 60$

$62 = 19+43 = 31+31$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 62$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 62$
		0	8	8	0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 62$
			0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	$9 \nmid 62$
				0	12	32	60	80	80	60	32	12	0	4	$11 \nmid 62$

$64 = 17+47 = 23+41$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 64$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 64$
		0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 64$
			0	16	24	24	16	0	12	16	12	0	16	24	$9 \nmid 64$
				0	8	24	48	80	100	80	48	24	8	0	$11 \nmid 64$

$66 = 13+53 = 19+47 = 23+43 = 29+47$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 66$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 66$
		0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 66$
			0	16	32	36	32	16	0	8	8	0	16	32	36	$9 \nmid 66$
				0	4	16	36	64	100	100	64	36	16	4	0	$11 \mid 66$

$68 = 31 + 37$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 68$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 68$
		0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 68$
			0	12	32	48	48	32	12	0	4	0	12	32	48	$9 \nmid 68$
				0	0	8	24	48	80	100	80	48	24	8	0	$11 \nmid 68$

$70 = 17 + 53 = 23 + 47 = 29 + 41$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 70$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	$5 \mid 70$
		0	4	16	36	36	16	4	0	4	16	36	36	16	4	0	$7 \mid 70$
			0	8	24	48	64	48	24	8	0	0	8	24	48	64	$9 \nmid 70$
				0	4	0	12	32	60	80	80	60	32	12	0	4	$11 \nmid 70$

$72 = 19 + 53 = 29 + 43 = 31 + 41$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 72$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 72$
		0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 72$
			0	4	16	36	64	64	36	16	4	0	4	16	36	64	$9 \mid 72$
				0	8	8	0	16	40	60	64	60	40	16	0	8	$11 \nmid 72$
					0	16	40	72	96	100	96	72	40	16	0	8	$13 \nmid 72$

$74 = 31 + 43 = 37 + 37$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 74$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 74$
		0	4	0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 74$
			0	0	8	24	48	64	48	24	8	0	0	8	24	48	64	$9 \nmid 74$
				0	12	16	12	0	20	40	48	48	40	20	0	12	16	$11 \nmid 74$
					0	12	32	60	96	120	120	96	60	32	12	0	4	$13 \nmid 74$

$76 = 17 + 59 = 23 + 53 = 29 + 47$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 76$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 76$
		0	8	8	0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 76$
			0	4	0	12	32	48	48	32	12	0	4	0	12	32	48	$9 \nmid 76$
				0	16	24	24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	$11 \nmid 76$
					0	8	24	48	80	120	144	120	80	48	24	8	0	$13 \nmid 76$

$78 = 17 + 61 = 19 + 59 = 31 + 47 = 37 + 41$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 78$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 78$
		0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 78$
			0	8	8	0	16	32	36	32	16	0	8	8	0	16	32	36	$9 \nmid 78$
				0	20	32	36	32	20	0	16	24	24	16	0	20	32	36	$11 \nmid 78$
					0	4	16	36	64	100	144	144	100	64	36	16	4	0	$13 \mid 78$

$80 = 19+61 = 37+43$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 80$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	$5 \mid 80$
		0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	$7 \nmid 80$
			0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	12	0	16	24	$9 \nmid 80$
				0	20	40	48	48	40	20	0	12	16	12	0	20	40	48	$11 \nmid 80$
					0	0	8	24	48	80	120	144	120	80	48	24	8	0	$13 \nmid 80$

$82 = 23+59 = 29+53 = 41+41$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 82$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 82$
		0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	$7 \nmid 82$
			0	16	24	24	16	0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	$9 \nmid 82$
				0	16	40	60	64	60	40	16	0	8	8	0	16	40	60	64	$11 \nmid 82$
					0	4	0	12	32	60	96	120	120	96	60	32	12	0	4	$13 \nmid 82$

$84 = 17+67 = 23+61 = 31+53 = 37+47 = 41+43$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 84$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 84$
		0	4	16	36	36	16	4	0	4	16	36	36	16	4	0	4	16	36	$7 \mid 84$
			0	16	32	36	32	16	0	8	8	0	16	32	36	32	16	0	8	$9 \nmid 84$
				0	12	32	60	80	80	60	32	12	0	4	0	12	32	60	80	$11 \nmid 84$
					0	8	8	0	16	40	72	96	100	96	72	40	16	0	8	$13 \nmid 84$

$86 = 19+67 = 43+43$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 86$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 86$
		0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	$7 \nmid 86$
			0	12	32	48	48	32	12	0	4	0	12	32	48	48	32	12	0	4	$9 \nmid 86$
				0	8	24	48	80	100	80	48	24	8	0	0	8	24	48	80	100	$11 \nmid 86$
					0	12	16	12	0	20	48	72	80	80	72	48	20	0	12	16	$13 \nmid 86$

$88 = 17+71 = 29+59 = 41+47$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 88$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 88$
		0	4	0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	$7 \nmid 88$
			0	8	24	48	64	48	24	8	0	0	8	24	48	64	48	24	8	0	$9 \nmid 88$
				0	4	16	36	64	100	100	64	36	16	4	0	4	16	36	64	100	$11 \mid 88$
					0	16	24	24	16	0	24	48	60	64	60	48	24	0	16	24	$13 \nmid 88$

$90 = 17+73 = 19+71 = 23+67 = 29+61 = 31+59 = 37+53 = 43+47$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 90$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	$5 \mid 90$
		0	8	8	0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 90$
			0	4	16	36	64	64	36	16	4	0	4	16	36	64	64	36	16	4	0	$9 \mid 90$
				0	0	8	24	48	80	100	80	48	24	8	0	0	8	24	48	80	100	$11 \nmid 90$
					0	20	32	36	32	20	0	24	40	48	48	40	24	0	20	32	36	$13 \nmid 90$

$92 = 19 + 73 = 31 + 61$

0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 $3 \nmid 92$

0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 $5 \nmid 92$

0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 12 0 8 $7 \nmid 92$

0 0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8 24 48 64 48 24 8 0 $9 \nmid 92$

0 4 0 12 32 60 80 80 60 32 12 0 4 0 12 32 60 80 $11 \nmid 92$

0 24 40 48 48 40 24 0 20 32 36 32 20 0 24 40 48 $13 \nmid 92$

$94 = 23 + 71 = 41 + 53 = 47 + 47$

0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 $3 \nmid 94$

0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 $5 \nmid 94$

0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 $7 \nmid 94$

0 4 0 12 32 48 48 32 12 0 4 0 12 32 48 48 32 12 0 4 $9 \nmid 94$

0 8 8 0 16 40 60 64 60 40 16 0 8 8 0 16 40 60 64 $11 \nmid 94$

0 24 48 60 64 60 48 24 0 16 24 24 16 0 24 48 60 64 $13 \nmid 94$

$96 = 17 + 79 = 23 + 73 = 29 + 67 = 37 + 59 = 43 + 53$

0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 $3 \mid 96$

0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 $5 \nmid 96$

0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 $7 \nmid 96$

0 8 8 0 16 32 36 32 16 0 8 8 0 16 32 36 32 16 0 8 $9 \nmid 96$

0 12 16 12 0 20 40 48 48 40 20 0 12 16 12 0 20 40 48 $11 \nmid 96$

0 20 48 72 80 80 72 48 20 0 12 16 12 0 20 48 72 80 $13 \nmid 96$

$98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$

0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 $3 \nmid 98$

0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 $5 \nmid 98$

0 4 16 36 36 16 4 0 4 16 36 36 16 4 0 4 16 36 36 16 4 0 $7 \mid 98$

0 12 16 12 0 16 24 24 16 0 12 16 12 0 16 24 24 16 0 12 16 $9 \nmid 98$

0 16 24 24 16 0 20 32 36 32 20 0 16 24 24 16 0 20 32 36 $11 \nmid 98$

0 16 40 72 96 100 96 72 40 16 0 8 8 0 16 40 72 96 100 $13 \nmid 98$

0 12 16 12 0 20 48 84 112 120 120 112 84 482 0 0 12 16 $15 \nmid 98$

$100 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$

0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 $3 \nmid 100$

0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 $5 \mid 100$

0 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 $7 \nmid 100$

0 16 24 24 16 0 12 16 12 0 16 24 24 16 0 12 16 12 0 16 24 $9 \nmid 100$

0 20 32 36 32 20 0 16 24 24 16 0 20 32 36 32 20 0 16 24 $11 \nmid 100$

0 12 32 60 96 120 120 96 60 32 12 0 4 0 12 32 60 96 120 $13 \nmid 100$

0 16 24 24 16 0 24 56 84 96 100 96 84 56 24 0 16 24 $15 \nmid 100$

Annexe 5 : Source du programme de calcul des produits pour les nombres pairs doubles de nombres impairs

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{   int x, m, i, j, k, n, pp ;
    int tab[200][200] ;
    int produit[200] ;

    for (x= 3; x <= 100 ; x++)
        for (i = 1 ; i <= x ; ++i)
            for (j = 1 ; j <= x ; ++j)
                if (((x % (4*i+2)) == j) || ((x % (4*i+2)) == (4*i+2-j)))
                    if (2*i+1-j >= 0) tab[x][i] = 2*i+1-j ;
                    else tab[x][i] = j-2*i-1 ;
    for (x = 13 ; x <= 50 ; ++x)
    {
        m = (int) sqrt((float) x);
        std::cout << "------------------------------" << "\n" ;
        std::cout << "\n" << x << ":\n" ;
        for (n=1; n <= (x-1)/2 ; ++n) produit[2*n+1] = 1;
        for (i = 1 ; i <= m ; ++i)
        {
            for (k = 1 ; k < i ; ++k)
                std::cout << "   " ;
            for (k = 2*i+1 ; k <= x ; k=k+2)
            {
                pp = tab[k][i] * tab[2*x-k][i];
                if (pp == 0) produit[k] = 0 ;
                printf("%3d", pp);
            }
            std::cout << "\n" ;
        }
        std::cout << "------------------------------" << "\n" ;
        for (n=1; n <= (x-1)/2 ; ++n)
            if (produit[2*n+1] > 0) printf("%3d",1) ; else printf("%3d",0) ;
        std::cout << "\n" ;
        for (n=1; n <= (x-1)/2 ; ++n)
            if (produit[2*n+1] > 0)
                std::cout << 2*n+1 << " est un décomposant de " << 2*x << "\n" ;
    }
}
```

Conjecture de Goldbach
et sinusoïdes

Denise Vella-Chemla

24 Mai 2009

1 Introduction

La lectrice intéressée par les recherches qui ont amené aux éléments présentés ici peut se reporter à la note [6] de la bibliographie[1].

2 Présentation d'un exemple qui explicite la méthode des sinusoïdes

Intéressons nous au cas $2a = 60$ (ou bien $a = 30$). On va noter dans un tableau par des 0 le fait que certains nombres soient divisibles par les nombres impairs compris entre 3 et $2 * \lfloor\sqrt{30}\rfloor + 1$.

57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	
0	–	–	0	–	–	0	–	–	0	–	–	0	–	*divisibilité par* 3
	0	–	–	–	–	0	–	–	–	–	0	–	–	*divisibilité par* 5
		0	–	0	–	–	–	–	0	–	0	–	–	*divisibilité par* 7
			0	–	–	0	–	–	–	–	–	0	–	*divisibilité par* 9
				0	–	–	–	–	–	–	–	0	–	*divisibilité par* 11

Sur la première ligne, on constate que 3 divisant 30 (ou 60), les nombres dont la somme vaut 60 (comme 3 et 57, ou bien 9 et 51) sont simultanément divisibles par 3.
Même constat sur la ligne montrant la divisibilité par 5.
Par contre, 7, 9 et 11 ne divisant pas 30, la divisibilité des nombres a été codée en bleu pour les nombres inférieurs à 30 et en vert pour ceux supérieurs à 30.

On comprend aisément que si l'on indice les colonnes par les nombres de 1 à $\left\lfloor \dfrac{a-1}{2} \right\rfloor$ au lieu de les indicer par les nombres impairs comme on l'a fait, on peut "simuler" les caractères de la divisibilité par les nombres impairs successifs par des sinusoïdes. On utilisera la sinusoïde $sin\left(\dfrac{(x-i)\pi}{2j+1}\right)$ quand on aura besoin d'une sinusoïde de période $2j+1$ qui s'annule pour la valeur i. Les nombres

[1] Se reporter à [4] pour une présentation originale de la conjecture.

qui n'annulent aucune des sinusoïdes ainsi définies sont en bijection immédiate avec les décomposants de Goldbach de $2a$.

Pour les lignes des nombres impairs qui divisent $2a$, on a besoin d'une sinusoïde, pour les lignes des nombres impairs qui ne divisent pas $2a$, on a besoin de deux sinusoïdes.

La question de la conjecture de Goldbach devient : "pourquoi existe-t-il obligatoirement un nombre entier x supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à $\lfloor \dfrac{a-1}{2} \rfloor$ et tel que :

$$\prod_{\substack{1 \leq k \leq \sqrt{a} \\ 1 \leq k' \leq 2k+1 \\ k' \neq k \\ k \in \mathbb{N} \\ k' \in \mathbb{N}}} sin\Big(\frac{(x-k)\pi}{2k+1}\Big).sin\Big(\frac{(x-k')\pi}{2k+1}\Big) \neq 0$$

?" Ce produit fait intervenir $2\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ sinusoïdes. La condition $k' \neq k$ est une condition non obligatoire : puisque c'est la non-nullité des sinusoïdes qui nous intéresse, on peut bêtement élever la sinusoïde "centrale" au carré, cela ne modifie pas le résultat obtenu.
On calcule k' de la façon suivante :

$$k' = (x \; mod \; (2k+1)) + k.$$

On peut se passer de la fonction *mod* (qui renvoie le reste modulaire) en calculant k' ainsi

$$k' = x - (2k+1) * \lfloor x/(2k+1) \rfloor.$$

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.
[6] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, mai 2009.

Conjecture de Goldbach,
Conjecture des nombres premiers jumeaux,
test de primalité
et sinusoïdes

Denise Vella-Chemla

27 Mai 2009

1 Introduction

Dans cette note est présentée un algorithme de recherche des décomposants de Goldbach qui a permis d'aboutir à une façon unifiée de considérer la conjecture de Goldbach et la conjecture des nombres premiers jumeaux en utilisant un test de primalité basé sur le calcul de produits de sinus.

2 Présentation d'un exemple qui explicite la méthode des sinusoïdes

Intéressons nous au cas $2a = 60$ (ou bien $a = 30$). On va noter dans un tableau par des 0 le fait que certains nombres soient divisibles par les nombres impairs compris entre 3 et $2 * \lfloor\sqrt{30}\rfloor + 1$.

57 3	55 5	53 7	51 9	49 11	47 13	45 15	43 17	41 19	39 21	37 23	35 25	33 27	31 29	
				0	−	−	−	−	−	−	−	0	−	*divisibilité par* 11
			0	−	−	0	−	−	−	−	−	0	−	*divisibilité par* 9
		0	−	0	−	−	−	−	0	−	0	−	−	*divisibilité par* 7
	0	−	−	−	−	0	−	−	−	−	0	−	−	*divisibilité par* 5
0	−	−	0	−	−	0	−	−	0	−	−	0	−	*divisibilité par* 3

Sur la dernière ligne, on constate que 3 divisant 30 (ou 60), les nombres dont la somme vaut 60 (comme 3 et 57, ou bien 9 et 51) sont simultanément divisibles par 3.
Même constat sur la ligne montrant la divisibilité par 5.
Par contre, 7, 9 et 11 ne divisant pas 30, la divisibilité des nombres a été codée en noir pour les nombres inférieurs à 30 et en bleu pour ceux supérieurs à 30.

On comprend aisément que si l'on indice les colonnes par les nombres de 1 à $\left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor$ au lieu de les indicer par les nombres impairs comme on l'a fait, on peut "simuler" les caractères de la divisibilité par les nombres impairs successifs par des sinusoïdes. On utilisera la sinusoïde $sin\left(\dfrac{(x-i)\pi}{2j+1}\right)$ quand on aura besoin d'une sinusoïde de période $2j+1$ qui s'annule pour la valeur i. Les nombres qui n'annulent aucune des sinusoïdes ainsi définies sont en bijection immédiate avec les décomposants de Goldbach de $2a$.

Pour les lignes des nombres impairs qui divisent $2a$, on a besoin d'une sinusoïde, pour les lignes des nombres impairs qui ne divisent pas $2a$, on a besoin de deux sinusoïdes.

La question de la conjecture de Goldbach devient : "a étant supérieur ou égal à 11, pourquoi existe-t-il obligatoirement un nombre entier x supérieur ou égal à $\sqrt{a}$ et inférieur ou égal à $\left\lfloor \dfrac{a-1}{2} \right\rfloor$ et tel que :

$$\prod_{\substack{1 \leq k \leq \sqrt{a} \\ 1 \leq k' \leq 2k+1 \\ k' \neq k \\ k \in \mathbb{N} \\ k' \in \mathbb{N}}} sin\left(\frac{(x-k)\pi}{2k+1}\right).sin\left(\frac{(x-k')\pi}{2k+1}\right) \neq 0$$

?" Ce produit fait intervenir $2\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ sinusoïdes. La condition $k' \neq k$ est une condition non obligatoire : puisque c'est la non-nullité des sinusoïdes qui nous intéresse, on peut bêtement élever la sinusoïde "centrale" au carré, cela ne modifie pas le résultat obtenu.
On calcule k' de la façon suivante :

$$k' = (x \ mod \ (2k+1)) + k.$$

On peut se passer de la fonction *mod* (qui renvoie le reste modulaire) en calculant k' ainsi

$$k' = x - (2k+1) * \lfloor x/(2k+1) \rfloor.$$

En annexe 1 est fourni le programme qui calcule les décomposants de Goldbach des nombres pairs compris entre 26 et 100 par cette méthode ainsi que son résultat en annexe 2.

3 Conjecture des nombres premiers jumeaux et test de primalité

On réalise que l'on peut utiliser le programme présenté ci-dessus, moyennant quelques petites modifications, d'une part pour tester la primalité d'un nombre et d'autre part, pour voir si ce nombre n'est pas un nombre pair exactement compris entre deux nombres premiers (que l'on appelle des nombres premiers jumeaux) : il suffit pour ce faire de ne tester non pas tous les sinus, mais uniquement les sinus qui interviennent dans la dernière colonne, celle d'indice $colonne = \left\lfloor \dfrac{a-1}{2} \right\rfloor$. En annexes 3 et 5, sont fournis les deux programmes correspondant et leur résultat sont dans les annexes 4 et 6.

Ces programmes n'ont aucun intérêt pratique : les algorithmes utilisés en cryptographie présentent toutes les qualités d'efficacité nécessitées par un tel domaine d'application. La méthode présentée semble seulement intéressante car elle offre un cadre commun à ces deux problèmes classiques de théorie des nombres, et permet de les traiter en s'affranchissant de la notion de primalité : on a considéré tous les nombres impairs et non seulement les nombres premiers, dans la mesure où on ncd c: e sait pas où ceux-ci sont placés dans la suite numérique.

En annexe 7 sont fournies les sinusoïdes associées aux nombres pairs de 26 à 100, les zéros de la première sinusoïde sont systématiquement codés en noir tandis que ceux de la deuxième (dans le cas où $2k+1$ ne divise pas $2a$) sont codés en bleu. Un regard attentif permet de bien voir le fait que les sinusoïdes bleues "avancent" d'un cran vers la droite à chaque nouveau nombre pair (parfois, les cases bleues "se cachent derrière" les cases noires). On a parfois noté à côté du nombre pair considéré la lettre P pour indiquer qu'il s'agit du double d'un nombre premier, et parfois noté la lettre J pour indiquer qu'il s'agit du double d'un nombre pair qui est entre deux nombres premiers jumeaux.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.
[6] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, mai 2009.

Annexe 1 : Source du programme de calcul des décomposants de Goldbach des nombres pairs de 26 à 100

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{
    const double pi=acos(-1) ;
    int x, ligne, colonne, moitie, decomp ;
    float tempo1, tempo2 ;
    int tab[100][100] ;

    for (x=13 ; x <= 50 ; x++)
    {
        std::cout << "\n" ;
        moitie = (x-1)/2 ;
        for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
            for (colonne = 1 ; colonne <= moitie ; colonne++)
            {
                tab[ligne][colonne] = 1 ;
                tempo1 = ((colonne-ligne)*pi)/(2*ligne+1) ;
                if ((sin(tempo1) < 0.00001) && (sin(tempo1) > -0.00001))
                    tab[ligne][colonne] = 0 ;
                tempo2 = ((colonne-((x % (2*ligne+1))+ligne))*pi)/(2*ligne+1) ;
                if ((sin(tempo2) < 0.00001) && (sin(tempo2) > -0.00001))
                    tab[ligne][colonne] = 0 ;
            }
        for (colonne = 1 ; colonne <= moitie ; colonne++)
        {
            decomp = 1 ;
            for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
                if (tab[ligne][colonne] == 0) decomp = 0 ;
            if (decomp == 1 )
            {
                std::cout << 2*colonne+1 << " est un décomposant de " ;
                std::cout << 2*x << "\n" ;
            }
        }
    }
}
```

Annexe 2 : Résultat du programme de calcul des décomposants de Goldbach des nombres pairs de 26 à 100

```
13 est un décomposant de 26

11 est un décomposant de 28

11 est un décomposant de 30
13 est un décomposant de 30

13 est un décomposant de 32

11 est un décomposant de 34
17 est un décomposant de 34

13 est un décomposant de 36
17 est un décomposant de 36

19 est un décomposant de 38

11 est un décomposant de 40
17 est un décomposant de 40

11 est un décomposant de 42
13 est un décomposant de 42
19 est un décomposant de 42

13 est un décomposant de 44
```

17 est un décomposant de 46
23 est un décomposant de 46

11 est un décomposant de 48
17 est un décomposant de 48
19 est un décomposant de 48

13 est un décomposant de 50
19 est un décomposant de 50

23 est un décomposant de 52

13 est un décomposant de 54
17 est un décomposant de 54
23 est un décomposant de 54

13 est un décomposant de 56
19 est un décomposant de 56

17 est un décomposant de 58
29 est un décomposant de 58

13 est un décomposant de 60
17 est un décomposant de 60
19 est un décomposant de 60
23 est un décomposant de 60
29 est un décomposant de 60

19 est un décomposant de 62
31 est un décomposant de 62

17 est un décomposant de 64
23 est un décomposant de 64

13 est un décomposant de 66
19 est un décomposant de 66
23 est un décomposant de 66
29 est un décomposant de 66

31 est un décomposant de 68

17 est un décomposant de 70
23 est un décomposant de 70
29 est un décomposant de 70

19 est un décomposant de 72
29 est un décomposant de 72
31 est un décomposant de 72

31 est un décomposant de 74
37 est un décomposant de 74

17 est un décomposant de 76
23 est un décomposant de 76
29 est un décomposant de 76

17 est un décomposant de 78
19 est un décomposant de 78
31 est un décomposant de 78
37 est un décomposant de 78

19 est un décomposant de 80
37 est un décomposant de 80

23 est un décomposant de 82
29 est un décomposant de 82
41 est un décomposant de 82

17 est un décomposant de 84
23 est un décomposant de 84
31 est un décomposant de 84
37 est un décomposant de 84
41 est un décomposant de 84

19 est un décomposant de 86
43 est un décomposant de 86

17 est un décomposant de 88
29 est un décomposant de 88
41 est un décomposant de 88

17 est un décomposant de 90
19 est un décomposant de 90
23 est un décomposant de 90
29 est un décomposant de 90
31 est un décomposant de 90
37 est un décomposant de 90
43 est un décomposant de 90

19 est un décomposant de 92
31 est un décomposant de 92

23 est un décomposant de 94
41 est un décomposant de 94
47 est un décomposant de 94

17 est un décomposant de 96
23 est un décomposant de 96
29 est un décomposant de 96
37 est un décomposant de 96
43 est un décomposant de 96

19 est un décomposant de 98
31 est un décomposant de 98
37 est un décomposant de 98

17 est un décomposant de 100
29 est un décomposant de 100
41 est un décomposant de 100
47 est un décomposant de 100

Annexe 3 : Source du programme de test de la primalité des nombres de 13 à 99

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{
    const double pi=acos(-1) ;
    int x, ligne, colonne, moitie, premier ;
    float tempo1, tempo2 ;

    for (x=13 ; x <= 99 ; x=x+2)
    {
        moitie = (x-1)/2 ;
        premier = 1 ;
        for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
        {
            tempo1 = ((moitie-ligne)*pi)/(2*ligne+1) ;
            if ((sin(tempo1) < 0.00001) && (sin(tempo1) > -0.00001))
                premier = 0 ;
            tempo2 = ((moitie-((moitie % (2*ligne+1))+ligne))*pi)/(2*ligne+1) ;
            if ((sin(tempo2) < 0.00001) && (sin(tempo2) > -0.00001))
                premier = 0 ;
        }
        if (premier == 1) std::cout << x << "  ";
    }
}
```

Annexe 4 : Résultat du programme de test de la primalité des nombres de 13 à 99

```
13  17  19  23  29  31  37  41  43  47  53  59  61  67  71  73  79  83  89
97
```

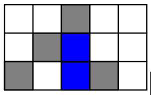
Annexe 5 : Source du programme de recherche des nombres pairs entre deux nombres premiers jumeaux

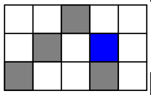
```
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{
    const double pi=acos(-1) ;
    int x, ligne, colonne, moitie, jumeaux ;
    float tempo1, tempo2 ;

    for (x=14 ; x <= 100 ; x=x+2)
    {
        moitie = (x-1)/2 ;
        jumeaux = 1 ;
        for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
        {
            tempo1 = ((moitie-ligne)*pi)/(2*ligne+1) ;
            if ((sin(tempo1) < 0.00001) && (sin(tempo1) > -0.00001))
                jumeaux = 0 ;
            tempo2 = ((moitie-((x % (2*ligne+1))+ligne))*pi)/(2*ligne+1) ;
            if ((sin(tempo2) < 0.00001) && (sin(tempo2) > -0.00001))
                jumeaux = 0 ;
        }
        if (jumeaux == 1) std::cout << x << " est entre deux nombres premiers.\n ";
    }
}
```

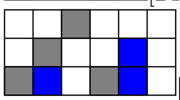
Annexe 6 : Résultat du programme de recherche des nombres pairs entre deux nombres premiers jumeaux

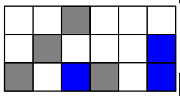
```
18 est entre deux nombres premiers.
 30 est entre deux nombres premiers.
 42 est entre deux nombres premiers.
 60 est entre deux nombres premiers.
 72 est entre deux nombres premiers.
```

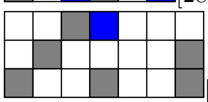
Annexe 7 : Représentation graphique des sinusoïdes associées aux nombres pairs de 26 à 100

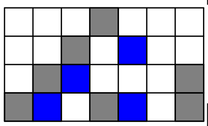

[22:P]

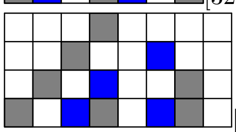

[24:J]

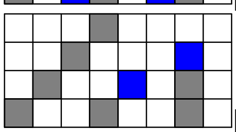

[26:P]

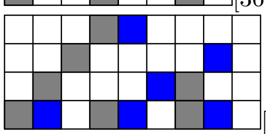

[28]

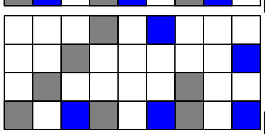

[30]

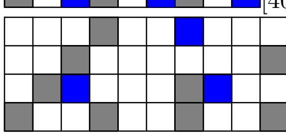

[32]

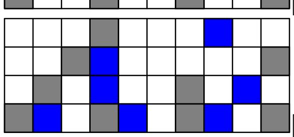

[34:P]

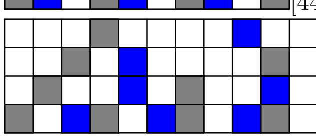

[36:J]

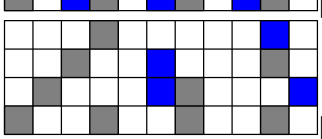

[38:P]


[40]

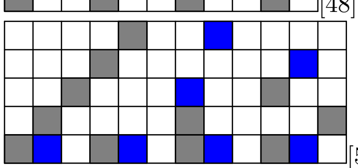

[42]

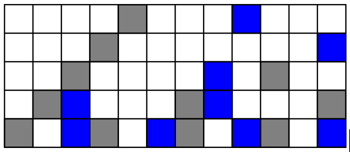

[44]

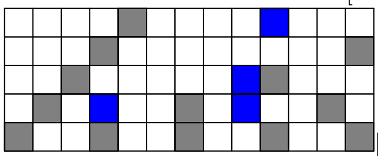

[46:P]

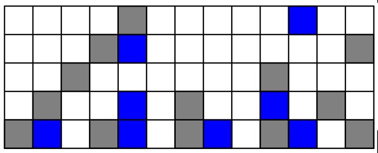

[48]

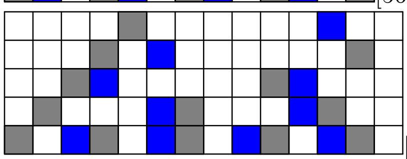
1

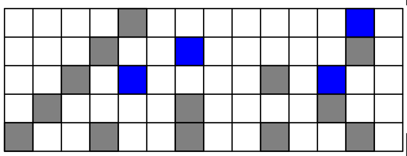

[50]

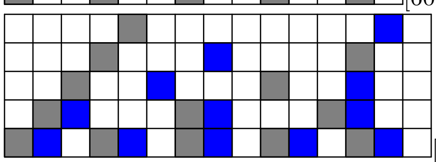

[52]

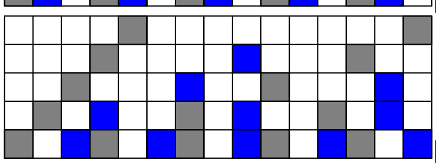

[54]

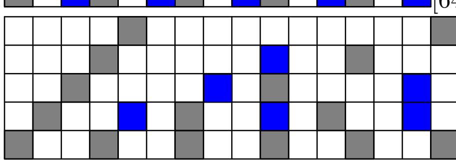

[56]

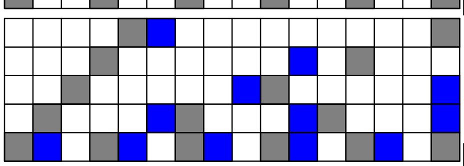

[58:P]

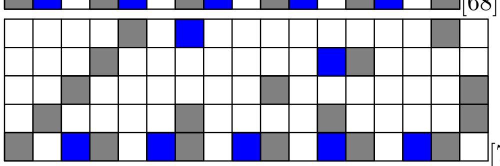

[60:J]

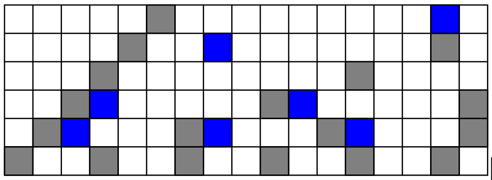

[62:P]

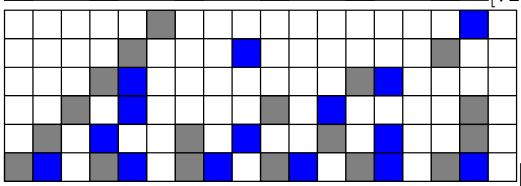

[64]

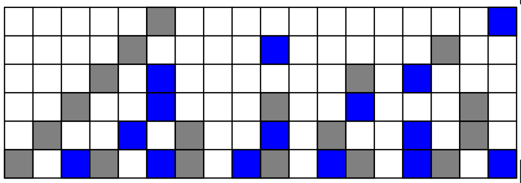

[66]

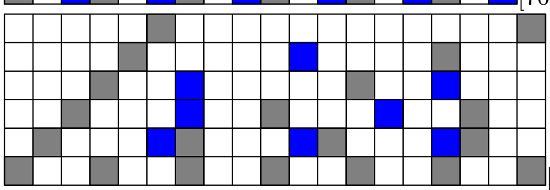

[68]

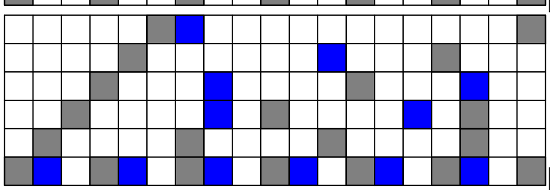

[70]

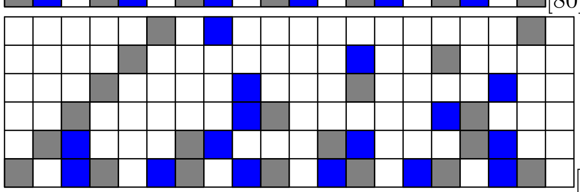

[72]

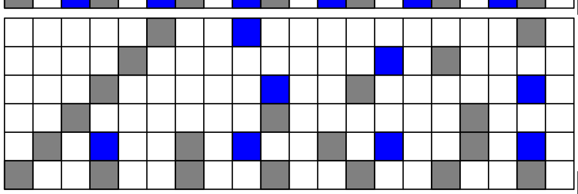

[74:P]

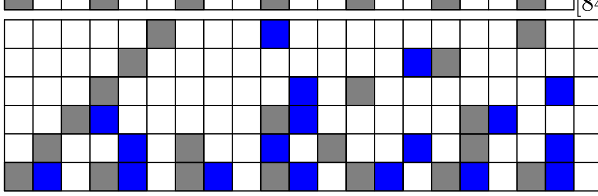

[76]

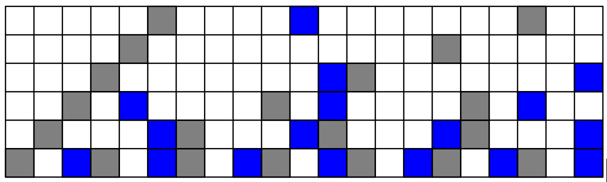

[78]

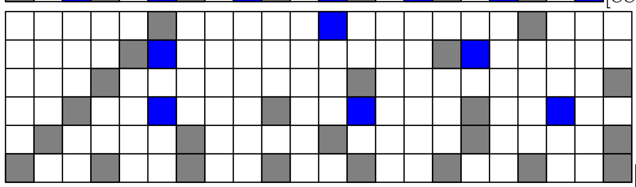

[80]

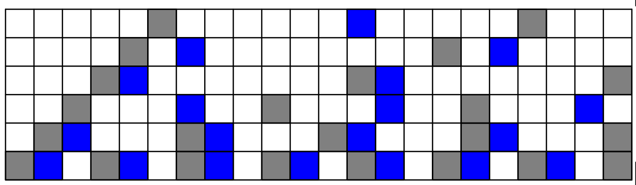

[82:P]

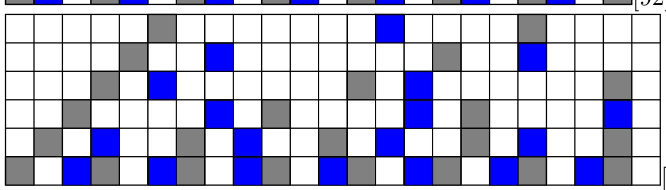

[84:J]

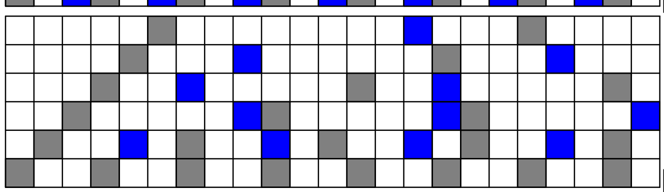

[86:P]

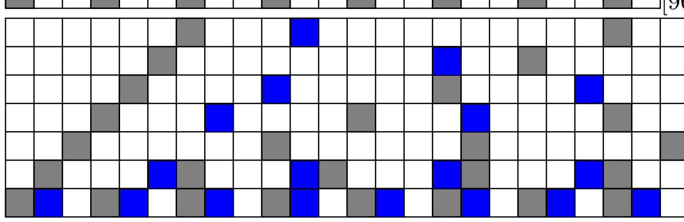

[88]

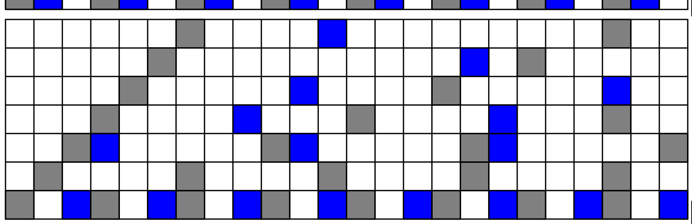

[90]


[92]


[94:P]


[96]


[98]


[100]

Annexe 8 : Conjecture de Legendre

La conjecture de Legendre stipule qu'il y a toujours un nombre premier entre n^2 et $(n+1)^2$. Cela est équivalent à démontrer qu'il y a toujours un double de premier entre $2n^2$ et $2(n+1)^2$. Dans la représentation présentée ici, le passage au carré suivant consiste à incrémenter de 1 le nombre de lignes des grilles. Il faudrait tester les produits de sinus de toutes les dernières colonnes des grilles ayant un même nombre de lignes. Ce que dit la conjecture de Legendre est équivalent à dire qur l'un de ses produits de sinus est non nul.

Conjecture de Goldbach
et Formule du Crible de Poincaré

Denise Vella-Chemla

3/6/9

1 Introduction

Dans cette note est présentée une méthode de calcul d'une borne inférieure pour le nombre de décomposants de Goldbach qui pourrait amener à une démonstration de la conjecture de Goldbach.

2 Présentation d'un exemple qui explicite la méthode de calcul d'une borne inférieure pour le nombre de décomposants de Goldbach

Intéressons nous au cas $2x = 60$ (ou bien $x = 30$). On va noter dans un tableau par des 0 le fait que certains nombres soient divisibles par les nombres impairs compris entre 3 et $2 * \lfloor\sqrt{30}\rfloor + 1$.

57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	
				0	−	−	−	−	−	−	−	0	−	*divisibilité par* 11
			0	−	−	0	−	−	−	−	−	0	−	*divisibilité par* 9
		0	−	0	−	−	−	−	0	−	0	−	−	*divisibilité par* 7
	0	−	−	−	−	0	−	−	−	−	0	−	−	*divisibilité par* 5
0	−	−	0	−	−	0	−	−	0	−	−	0	−	*divisibilité par* 3

Sur la dernière ligne, on constate que 3 divisant 30 (ou 60), les nombres dont la somme vaut 60 (comme 3 et 57, ou bien 9 et 51) sont simultanément divisibles par 3.
Même constat sur la ligne montrant la divisibilité par 5.
Par contre, 7, 9 et 11 ne divisant pas 30, la divisibilité des nombres a été codée en noir pour les nombres inférieurs à 30 et en bleu pour ceux supérieurs à 30.
Les colonnes ne contenant aucun zéro fournissent trivialement les décomposants de Goldbach les plus grands pour le nombre pair 60, puisque ces colonnes correspondent à des nombres qui ne sont divisibles par aucun des nombres impairs compris entre 3 et $2\sqrt{x} + 1$, i.e. des nombres premiers.

On calcule aisément le nombre $f(2x, j)$ de cases de la ligne j de la grille associée à $2x$ contenant un zéro. Pour cela, posons *impair* $= 2 * j + 1$ et

$moitie = \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$.
$f(2x,j)$ se calcule alors par la formule suivante :

$$f(2x,j) \;=\; \left\lceil \frac{(moitie - j + 1) * tempo}{impair} \right\rceil.$$

avec *tempo* qui vaut 1 si *impair* divise $2x$ ou qui vaut 2 si *impair* ne divise pas $2x$.

Pour chaque module impair $2 * j + 1$ pris indépendamment, la probabilité qu'une case de la ligne j contienne un zéro est égale à $\dfrac{f(2x,j)}{moitie}$.

En combinatoire, le principe d'inclusion-exclusion permet d'exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Il se traduit directement en termes de probabilités.

Il est attribué au mathématicien Abraham de Moivre, et connu également (lui ou sa version probabiliste) sous le nom de formule du crible de Poincaré. On applique cette formule lorsqu'on veut calculer la probabilité qu'au moins un événement, parmi plusieurs événements indépendants, se réalise.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, appelons $A1, ..., An$ les n ensembles finis contenant les indices des colonnes de chaque ligne contenant un zéro, la formule pour les ensembles finis s'écrit :

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \mid A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \mid \Big)$$

Appliquer la formule du crible de Poincaré nous permet d'obtenir une borne inférieure $f(2x)$ pour le nombre de colonnes de la grille associée à $2x$ qui ne contiennent aucun zéro. On note que le nombre calculé est d'ailleurs strictement inférieur au nombre de décomposants de Goldbach du nombre pair $2x$ que l'on considère puisque notre méthode ne permet d'obtenir que les décomposants de Goldbach de $2x$ les plus grands. On obtient une borne strictement inférieure au nombre de colonnes sans zéro car une observation simple des zéros noirs en diagonale à l'extrémité gauche des grilles montrent que ces probabilités ne sont pas indépendantes dans la réalité (dit autrement, le premier nombre non nul divisible par 5 est exactement égal au premier nombre non nul divisible par 3 augmenté de 2).

En annexe 1 est fourni le programme qui calcule les décomposants de Goldbach des nombres pairs compris entre 22 et 100 par la méthode des sinusoïdes présentée dans la note [6] ainsi que son résultat en annexe 2. En annexe 3 sont fournies les représentations graphiques par des grilles de la divisibilité des nombres de 3 à $2x - 3$ pour les nombres pairs $2x$ compris entre 22 et 100.

Le calcul du nombre de colonnes sans zéro estimé par ce calcul sommaire (voir programme en annexe 4 et son résultat en annexe 5) nous montre qu'il est toujours supérieur ou égal à 1 à partir du nombre pair 36. Dans l'annexe 3 sont fournis pour chaque nombre pair le nombre effectif de colonnes sans zéro ainsi que le nombre de colonnes sans zéro calculé par l'application de la formule du crible de Poincaré. Il doit être aisé de démontrer que la probabilité ainsi calculée ne sera jamais nulle pour tout nombre pair supérieur ou égal à 36.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, 20 mai 2009.
[6] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach, Conjecture des nombres premiers jumeaux, test de primalité et sinusoïdes, 27 mai 2009.
[7] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.

Annexe 1 : Source du programme de calcul des décomposants de Goldbach des nombres pairs de 22 à 100

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{
    const double pi=acos(-1) ;
    int x, ligne, colonne, moitie, decomp ;
    float tempo1, tempo2 ;
    int tab[100][100] ;

    for (x=13 ; x <= 50 ; x++)
    {
        std::cout << "\n" ;
        moitie = (x-1)/2 ;
        for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
            for (colonne = 1 ; colonne <= moitie ; colonne++)
            {
                tab[ligne][colonne] = 1 ;
                tempo1 = ((colonne-ligne)*pi)/(2*ligne+1) ;
                if ((sin(tempo1) < 0.00001) && (sin(tempo1) > -0.00001))
                    tab[ligne][colonne] = 0 ;
                tempo2 = ((colonne-((x % (2*ligne+1))+ligne))*pi)/(2*ligne+1) ;
                if ((sin(tempo2) < 0.00001) && (sin(tempo2) > -0.00001))
                    tab[ligne][colonne] = 0 ;
            }
        for (colonne = 1 ; colonne <= moitie ; colonne++)
        {
            decomp = 1 ;
            for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
                if (tab[ligne][colonne] == 0) decomp = 0 ;
            if (decomp == 1 )
            {
                std::cout << 2*colonne+1 << " est un décomposant de " ;
                std::cout << 2*x << "\n" ;
            }
        }
    }
}
```

Annexe 2 : Résultat du programme de calcul des décomposants de Goldbach des nombres pairs de 22 à 100

```
13 est un décomposant de 26

11 est un décomposant de 28

11 est un décomposant de 30
13 est un décomposant de 30

13 est un décomposant de 32

11 est un décomposant de 34
17 est un décomposant de 34

13 est un décomposant de 36
17 est un décomposant de 36

19 est un décomposant de 38

11 est un décomposant de 40
17 est un décomposant de 40

11 est un décomposant de 42
13 est un décomposant de 42
19 est un décomposant de 42

13 est un décomposant de 44

17 est un décomposant de 46
23 est un décomposant de 46

11 est un décomposant de 48
17 est un décomposant de 48
19 est un décomposant de 48

13 est un décomposant de 50
19 est un décomposant de 50

23 est un décomposant de 52

13 est un décomposant de 54
17 est un décomposant de 54
23 est un décomposant de 54

13 est un décomposant de 56
19 est un décomposant de 56

17 est un décomposant de 58
29 est un décomposant de 58

13 est un décomposant de 60
17 est un décomposant de 60
19 est un décomposant de 60
23 est un décomposant de 60
29 est un décomposant de 60

19 est un décomposant de 62
31 est un décomposant de 62

17 est un décomposant de 64
23 est un décomposant de 64

13 est un décomposant de 66
19 est un décomposant de 66
23 est un décomposant de 66
29 est un décomposant de 66

31 est un décomposant de 68

17 est un décomposant de 70
23 est un décomposant de 70
```

29 est un décomposant de 70

19 est un décomposant de 72
29 est un décomposant de 72
31 est un décomposant de 72

31 est un décomposant de 74
37 est un décomposant de 74

17 est un décomposant de 76
23 est un décomposant de 76
29 est un décomposant de 76

17 est un décomposant de 78
19 est un décomposant de 78
31 est un décomposant de 78
37 est un décomposant de 78

19 est un décomposant de 80
37 est un décomposant de 80

23 est un décomposant de 82
29 est un décomposant de 82
41 est un décomposant de 82

17 est un décomposant de 84
23 est un décomposant de 84
31 est un décomposant de 84
37 est un décomposant de 84
41 est un décomposant de 84

19 est un décomposant de 86
43 est un décomposant de 86

17 est un décomposant de 88
29 est un décomposant de 88
41 est un décomposant de 88

17 est un décomposant de 90
19 est un décomposant de 90
23 est un décomposant de 90
29 est un décomposant de 90
31 est un décomposant de 90
37 est un décomposant de 90
43 est un décomposant de 90

19 est un décomposant de 92
31 est un décomposant de 92

23 est un décomposant de 94
41 est un décomposant de 94
47 est un décomposant de 94

17 est un décomposant de 96
23 est un décomposant de 96
29 est un décomposant de 96
37 est un décomposant de 96
43 est un décomposant de 96

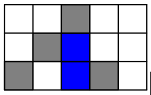
19 est un décomposant de 98
31 est un décomposant de 98
37 est un décomposant de 98

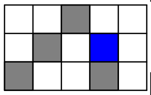
17 est un décomposant de 100
29 est un décomposant de 100
41 est un décomposant de 100
47 est un décomposant de 100

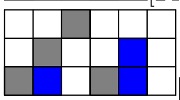
Annexe 3 : Représentation graphique de la divisibilité

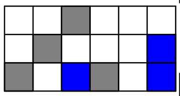
Les grilles suivantes sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 22 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$

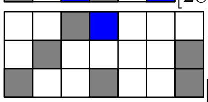
correspond à l'un des deux nombres impairs $2i+1$ et $2x-2i-1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\sqrt{x}+1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). A droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux. Puis est fourni le nombre effectif de colonnes sans zéro du tableau, qui correspondent aux décompositions de Goldbach du nombre pair considéré qui font intervenir les nombres premiers les plus grands, et enfin, le nombre calculé par la formule du crible de Poincaré, dont on voit qu'elle est systématiquement inférieure ou égale au nombre de colonnes sans zéro de la grille. Le problème est que ce second nombre est nul pour les nombres pairs 22, 26, 32 et 34 mais l'on pressent qu'il ne doit pas être difficile de démontrer qu'il ne s'annulera plus jamais pour tout nombre pair supérieur ou égal à 36.

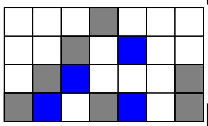

[22:P—1—0]

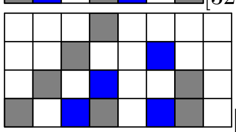

[24:J—1—1]

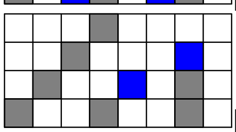

[26:P—1—0]

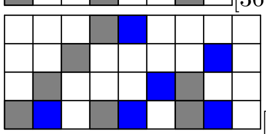

[28—1—1]

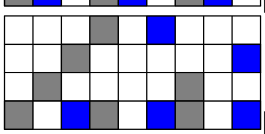

[30—2—2]

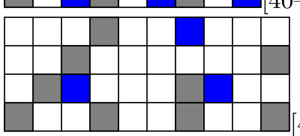

[32—1—0]

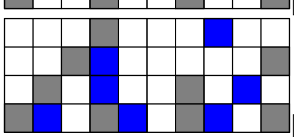

[34:P—2—0]

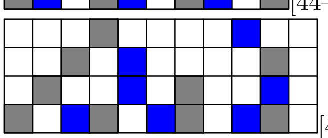

[36:J—2—2]

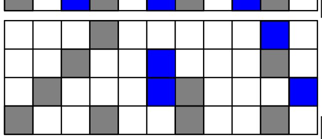

[38:P—1—1]

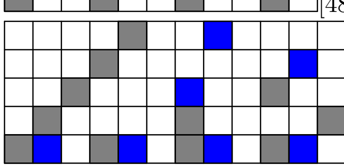

[40—2—1]

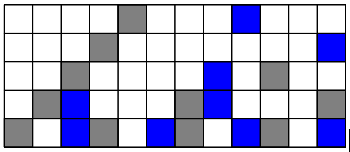

[42—3—2]

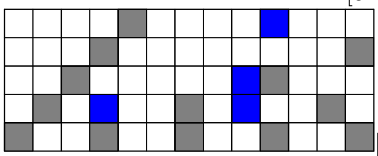

[44—1—1]

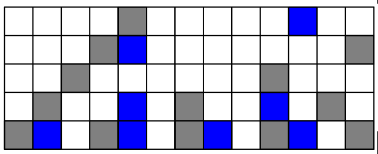

[46:P—2—1]

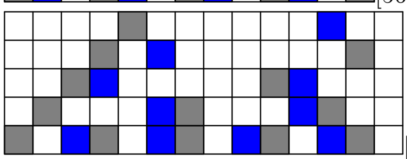

[48—3—2][1]

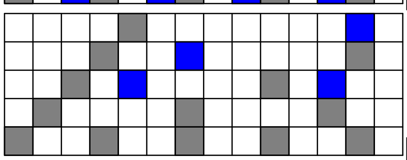

[50—2—1]

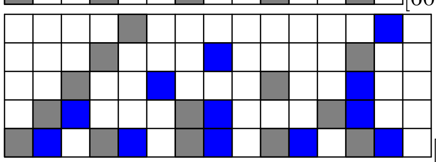

[52—1—1]

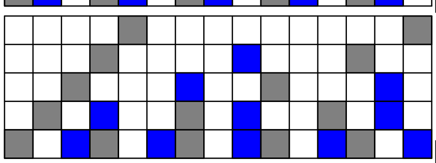

[54—3—2]

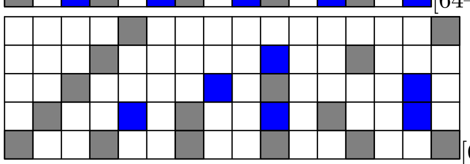

[56—2—1]

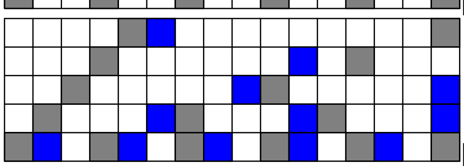

[58:P—2—1]

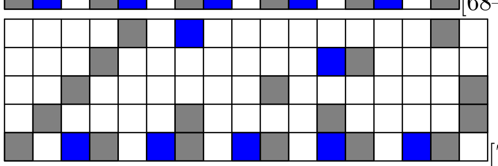

[60:J—5—3]

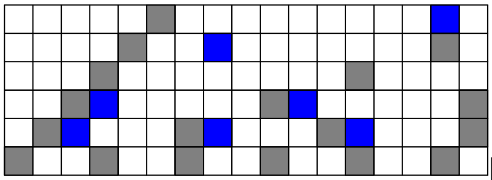

[62:P—2—1]

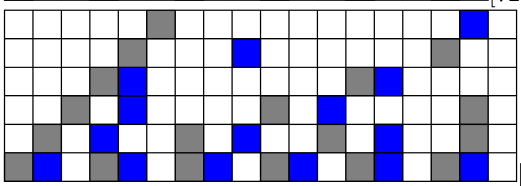

[64—2—1]

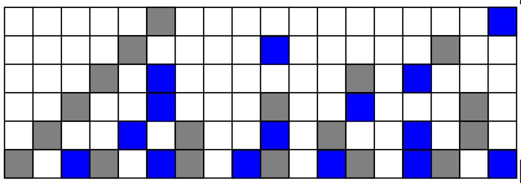

[66—4—3]

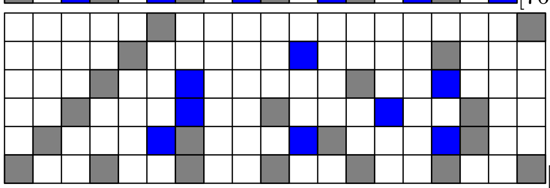

[68—1—1]

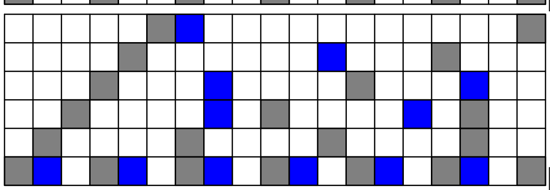

[70—3—1]

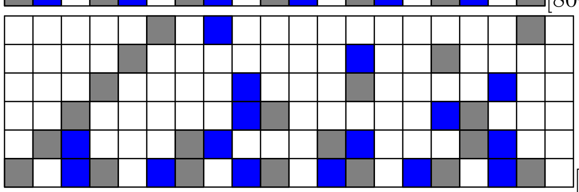

[72—3—2]

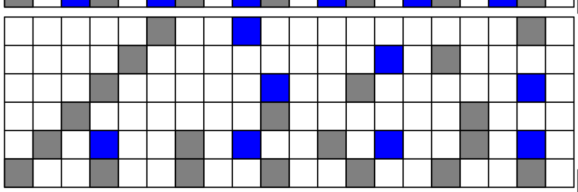

[74:P—2—1]

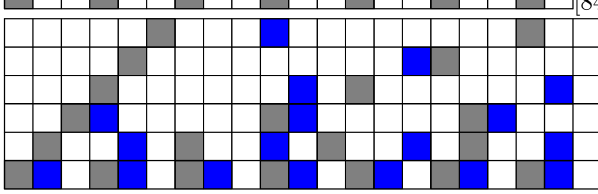

[76—2—1]

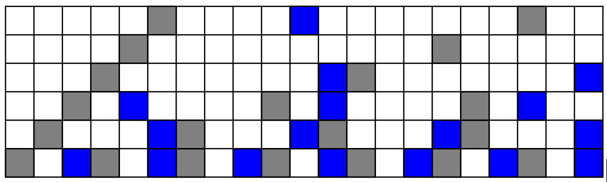

[78—4—3]

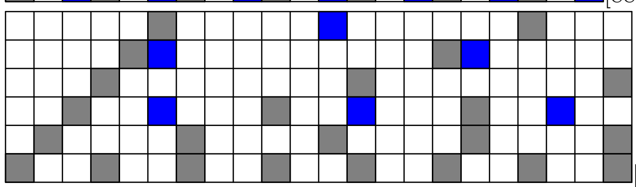

[80—2—1]

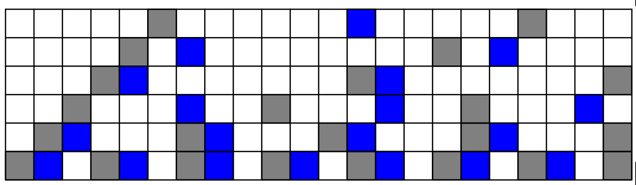

[82:P—3—1]

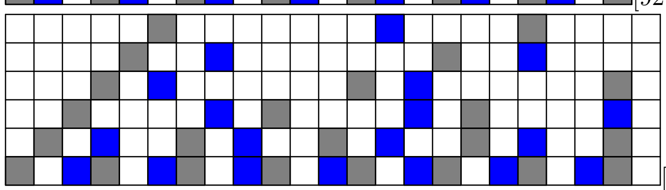

[84:J—5—3]

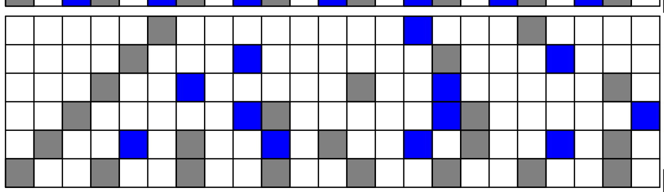

[86:P—2—1]

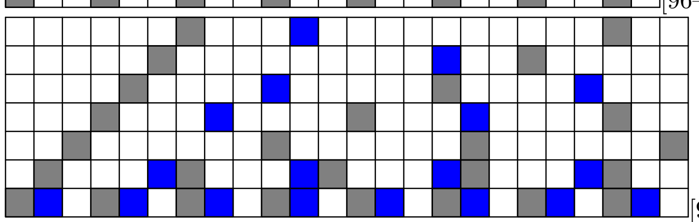

[88—3—1]

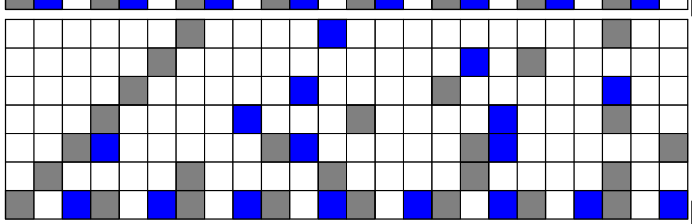

[90—7—4]


[92—2—1]


[94:P—3—1]


[96—4—3]


[98—3—1]


[100—4—2]

Annexe 4 : Programme de calcul d'une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach de 2x un nombre pair compris entre 22 et 100

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{
    int i, j, impair, moitie, racine ;
    double res, resglob, tempo ;

    for (i = 22 ; i <= 1000 ; i = i+2)
    {
        res = 0.0 ;
        resglob = 0.0 ;
        racine = sqrt(i/2) ;
        for (j = 1 ; j <= racine ; j++)
        {
            impair = 2*j+1 ;
            moitie = ((i/2)-1)/2 ;
            if (i % impair == 0) tempo = 1.0 ;
            else tempo = 2.0 ;
            res = ceil(((moitie-j+1)*(tempo/(double)(impair)))) ;
            res = res / moitie ;
            resglob = resglob+res-resglob*res ;
        }
        std::cout << "f(" << i << ") = " << floor(moitie*(1-resglob)) << "\n" ;
    }
}
```

Annexe 5 : Résultat du programme de calcul d'une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach de 2x un nombre pair compris entre 22 et 100

```
proba(26) = 0.851852   f(26) = 0
proba(28) = 0.814815   f(28) = 1
proba(30) = 0.708455   f(30) = 2
proba(32) = 0.900042   f(32) = 0
proba(34) = 0.912109   f(34) = 0
proba(36) = 0.743652   f(36) = 2
proba(38) = 0.887974   f(38) = 1
proba(40) = 0.843164   f(40) = 1
proba(42) = 0.7696     f(42) = 2
proba(44) = 0.8992     f(44) = 1
proba(46) = 0.896728   f(46) = 1
proba(48) = 0.759033   f(48) = 2
proba(50) = 0.869792   f(50) = 1
proba(52) = 0.898727   f(52) = 1
proba(54) = 0.812288   f(54) = 2
proba(56) = 0.895716   f(56) = 1
proba(58) = 0.921461   f(58) = 1
proba(60) = 0.757021   f(60) = 3
proba(62) = 0.898311   f(62) = 1
proba(64) = 0.898311   f(64) = 1
proba(66) = 0.791718   f(66) = 3
proba(68) = 0.903297   f(68) = 1
proba(70) = 0.883354   f(70) = 1
proba(72) = 0.827737   f(72) = 2
proba(74) = 0.91524    f(74) = 1
proba(76) = 0.91524    f(76) = 1
proba(78) = 0.839734   f(78) = 3
proba(80) = 0.897156   f(80) = 1
proba(82) = 0.927172   f(82) = 1
proba(84) = 0.808393   f(84) = 3
proba(86) = 0.917208   f(86) = 1
proba(88) = 0.907468   f(88) = 1
proba(90) = 0.781757   f(90) = 4
proba(92) = 0.925338   f(92) = 1
proba(94) = 0.923022   f(94) = 1
```

```
proba(96) = 0.835048   f(96) = 3
proba(98) = 0.918155   f(98) = 1
proba(100) = 0.905586  f(100) = 2
```

Etude de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

13 Juin 2009

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

Dans cette note est fournie une fonction récursive qui permet d'obtenir une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné.

2 Définition d'une fonction récursive

Soit la fonction récursive $f(i,k)$ définie de la façon suivante pour i et k variant de 1 à l'infini.

$$f(4(2k+1)i+2a,k) = \begin{cases} i & \text{si } a = 0 \\ f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } a = 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k) & \text{si } 1 \leq a < 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } 2k+1 < a < 4k+2 \end{cases}$$

Pour $k=1$, $f(i,k)$ prend les valeurs suivantes pour i un nombre pair compris entre 24 et 100.

[1] La conjecture ayant été vérifiée par ordinateur jusqu'à des nombres très grands, notre analyse considèrera les nombres pairs supérieurs ou égaux à 24. En référence à un article d'Euler qui nous a été très utile, on aurait pu appeler cette note *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport au nombre de leurs décomposants de Goldbach"*.

$$
\begin{array}{llll}
f(24,1)=2 & f(48,1)=4 & f(72,1)=6 & f(96,1)=8 \\
f(26,1)=4 & f(50,1)=8 & f(74,1)=12 & f(98,1)=16 \\
f(28,1)=4 & f(52,1)=8 & f(76,1)=12 & f(100,1)=16 \\
f(30,1)=3 & f(54,1)=5 & f(78,1)=7 & \\
f(32,1)=5 & f(56,1)=9 & f(80,1)=13 & \\
f(34,1)=5 & f(58,1)=9 & f(82,1)=13 & \\
f(36,1)=3 & f(60,1)=5 & f(84,1)=7 & \\
f(38,1)=6 & f(62,1)=10 & f(86,1)=14 & \\
f(40,1)=6 & f(64,1)=10 & f(88,1)=14 & \\
f(42,1)=4 & f(66,1)=5 & f(90,1)=8 & \\
f(44,1)=7 & f(68,1)=11 & f(92,1)=15 & \\
f(46,1)=7 & f(70,1)=11 & f(94,1)=15 &
\end{array}
$$

Pour $k = 2$, $f(i, k)$ prend les valeurs suivantes pour i un nombre pair compris entre 24 et 100.

$$
\begin{array}{lll}
f(24,1)=2 & f(50,1)=3 & f(76,1)=7 \\
f(26,1)=2 & f(52,1)=5 & f(78,1)=7 \\
f(28,1)=2 & f(54,1)=5 & f(80,1)=4 \\
f(30,1)=2 & f(56,1)=5 & f(82,1)=8 \\
f(32,1)=3 & f(58,1)=5 & f(84,1)=8 \\
f(34,1)=3 & f(60,1)=3 & f(86,1)=8 \\
f(36,1)=3 & f(62,1)=6 & f(88,1)=8 \\
f(38,1)=3 & f(64,1)=6 & f(90,1)=5 \\
f(40,1)=2 & f(66,1)=6 & f(92,1)=9 \\
f(42,1)=4 & f(68,1)=6 & f(94,1)=9 \\
f(44,1)=4 & f(70,1)=4 & f(96,1)=9 \\
f(46,1)=4 & f(72,1)=7 & f(98,1)=9 \\
f(48,1)=4 & f(74,1)=7 & f(100,1)=5
\end{array}
$$

Les valeurs successives apparaissent dans le même ordre pour tout k. Seul change le nombre d'éléments intermédiaires, qui font reconnaître des motifs de longueur $2(2k+1)$ pour les nombres pairs compris entre $4i(2k+1)$ et $4(i+1)(2k+1)$. Ces motifs sont de la forme suivante :

$$n \underbrace{2n \ldots 2n}_{2k \text{ fois}} n+1 \underbrace{2n+1 \ldots 2n+1}_{2k \text{ fois}}$$

Cette fonction est égale à la somme définie ainsi :

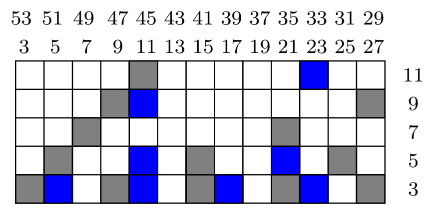
$$\sum_{\substack{i \ impair \\ 3 \leq i \leq \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}} (2k+1 \mid i) \vee (2k+1 \mid 2x-i)$$

Pour être plus explicite, fournissons un exemple, celui du nombre pair $2x = 56$.

Dans la grille ci-dessous sont représentés les caractères de divisibilité : si le nombre correspondant à la ligne i divise au moins l'un des deux nombres correspondant à la colonne j , la case (i, j) de la grille est colorée.

La colonne 1 correspond aux caractères de divisibilité des nombres 3 et $56-3 = 53$. La colonne 2 coorespond aux caractères de divisibilité des nombres 5 et

$56 - 5 = 51$... La colonne 13 correspond aux caractères de divisibilité des nombres 27 et $56 - 27 = 29$.



Le nombre de lignes d'une grille prend toujours la valeur $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Pour $2x = 56$, $\lfloor\sqrt{28}\rfloor = 5$

Le nombre de colonnes d'une grille prend toujours la valeur *moitié* $= \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$.

Ici, ce nombre est $\left\lfloor \dfrac{28-1}{2} \right\rfloor = 13$.

Les colonnes ne contenant aucune case colorée fournissent trivialement les décomposants de Goldbach de 56 les plus grands, puisque ces colonnes correspondent à des nombres qui ne sont divisibles par aucun des nombres impairs compris entre 3 et $2\sqrt{x}+1$, i.e. des nombres premiers.

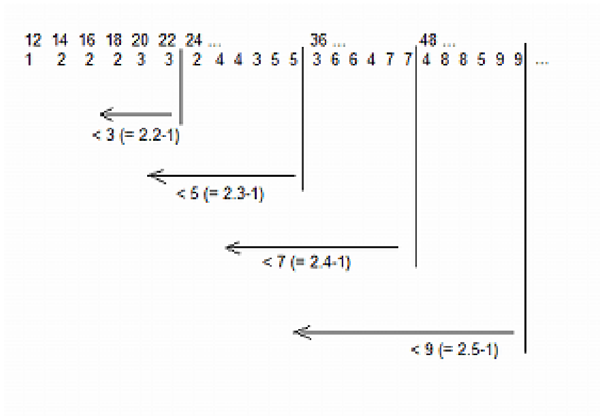
En annexe 1 sont fournies des représentations graphiques des $f(2x, k)$ pour les nombres pairs $2x$ compris entre 24 et 100 et pour k variant de 1 à $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ ainsi que les probabilités de divisibilité que ces nombres représentent.

3 Majoration des valeurs calculées par la fonction f

$2x$ étant fixé, pour tout i compris entre 1 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$, la valeur de $f(2x, i)$ est majorable ainsi :

$$f(2x, i) \leq 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1$$

Cette majoration sera bien visualisée par le dessin suivant :



On appellera $majorant(2x, i)$ le résultat du calcul ci-dessus $2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1$.

4 Appliquer le principe d'inclusion/exclusion pour minorer le nombre de décomposants de Goldbach

Selon i, la fonction $majorant$ est une fonction croissante de $2x$.

On va maintenant associer à chaque nombre pair un ensemble de fractions rationnelles que l'on appellera $Probas(2x)$, qui est de cardinal $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, et dont les éléments représentent des probabilités de divisibilité par les nombres impairs successifs.

$$Probas(2x) = \left\{ \frac{majorant(2x, k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \right\}.$$

Cela engendre pour les nombres pairs successifs l'obtention d'ensembles de probabilités $Probas(2x)$ qui contiennent des rationnels dont les numérateurs sont dans un ordre lexicographique croissant que nous allons définir maintenant.

$(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
On pose $\mathbb{N}uplets = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$, la réunion de tous les produits cartésiens finis construit sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$ contient uniquement le singleton vide).

On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets$ de la façon suivante.

Soient $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $b = (b_1, \ldots, b_q)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{N}uplets$, et soit m le plus petit des deux entiers p et q.

$$
\begin{array}{ll}
 & a < b \text{ si et seulement si} \\
 & (\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) < (b_1, \ldots, b_m) \text{ (pour l'ordre lexicographique sur } \mathbb{N}uplets_m) \\
ou & (\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_m) \text{ et } m < q \text{ (c'est-à-dire } p < q).
\end{array}
$$

En annexe 1 sont également notés, à droite des représentations graphiques, les ensembles de probabilités $Probas(2x)$ associés aux nombres pairs pour $2x$ compris entre 24 et 100.

Nous allons appliquer la formule du crible[2] à ces ensembles de probabilités pour trouver quelle est la probabilité qu'aucun de ces évènements (qui représentent les caractères de divisibilité par les impairs successifs, et donc la nature d'être composé pour un nombre) n'advienne et nous multiplierons le complémentaire à 1 de cette probabilité par $moiti\acute{e} = \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$, pour obtenir un nombre minorant le nombre de décomposants de Goldbach de $2x$.

Si les dénominateurs des rationnels intervenant dans la formule du crible étaient tous identiques, l'ordre lexicographique existant sur les n-uplets des numérateurs des fonctions rationnelles intervenant dans le calcul nous permettrait d'obtenir des résultats croissants.
Mais ce n'est pas le cas ici : une fois sur deux, le dénominateur des rationnels est augmenté de 1, ce qui nous fait appliquer la formule sur des nombres de plus en plus petits[3]. Du fait de ce changement des dénominateurs, on ne peut être sûr pour l'instant qu'on va bien avoir un résultat croissant, qui nous permettra au-delà d'un certain nombre pair, d'obtenir toujours au moins un décomposant de Goldbach.

Il faut expliquer maintenant pourquoi l'application de la formule du crible aux ensembles $Probas(2x)$ pour les nombres pairs successifs permet cependant d'obtenir une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach.
Dans un premier temps, on ne fait que constater qu'à partir du nombre pair 66, cette borne est supérieure ou égale à 1 et ne décroîtra plus jamais à 0.
Il faut expliquer précisément ce constat, en analysant la méthode proposée ici et en trouvant quel est l'écart séparant $Probas(2x)$ de $Probas(2x+2)$.

En analysant les calculs effectués, on comprend que les ensembles de rationnels varient de la manière suivante entre $2x$ et $2x+2$.

Tout d'abord, on a vu qu'on peut ajouter un rationnel de plus à l'ensemble, sous prétexte que $2x+2$ est le double d'un carré d'entier. L'analyse des numérateurs des rationnels obtenus dans un tel cas montre que le dernier rationnel est majorable par $2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil - 1$.

[2]Cette formule est attribuée à Abraham de Moivre. On lui donne également les noms de formule de Da Silva, formule de Sylvester ou formule de Poincaré.

[3]note : $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x)) + 1$ lorsque $2x+2$ est le double d'un carré, sinon $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x))$

D'autre part, à cause de l'ordre lexicographique croissant existant sur les n-uplets des numérateurs des rationnels, on voit que l'on peut majorer l'augmentation des rationnels lorsqu'on passe de l'ensemble $Probas(2x)$ à l'ensemble $Probas(2x+2)$ par le nombre

$$\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}.$$

Si l'on appelle poincare(2x) la fonction qui à $2x$ associé le résultat de l'application de la formule du crible à $Probas(2x)$, la formule de récurrence qui correspond à ces résultats s'écrit :

$$poincare(2x+2) < poincare(2x) + 2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil - 1 + \frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}$$

Le début de la récurrence consiste à fournir la probabilité associée par la formule du crible aux trois nombres rationnels 3/5, 3/5 et 1/5, qui sont les rationnels de l'ensemble $Probas(24)$. Cela nous fournit la valeur 0.872 pour initier les calculs.

$poincare(24) = 0.872$.
$\forall\ 2x\ >\ 24,\ poincare(2x) < 0.872 + 2\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \rceil - 1 + \frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}$

On a ainsi trouvé un minorant au nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair $2x$ qui est $\left\lfloor \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor (1 - poincare(2x)) \right\rfloor$.

C'est cette seconde majoration qui "coïncide" avec le résultat constaté initialement : à partir de 68, le nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné ne peut jamais être inférieur à 1.

Bibliographie

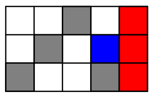
[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, 20 mai 2009.
[6] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach, Conjecture des nombres premiers jumeaux, test de primalité et sinusoïdes, 27 mai 2009.
[7] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.

Annexe 1 : Représentation graphique de certains décomposants de Goldbach

Les grilles ci-dessous sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 24 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$

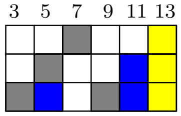
correspond à l'un des deux nombres impairs $2i+1$ et $2x-2i-1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\sqrt{x}+1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). A droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (cela est représenté également par la coloration en jaune ou rouge de la dernière colonne qui ne présente ni case noire, ni case bleue). Puis sont fournis à droite des grilles d'une part les fractions rationnelles représentant pour chaque ligne la proportion de cases colorées en noir ou bleu, rapportée au nombre de colonnes de la grille et d'autre part, la fraction rationnelle majorante. Enfin, à côté du nombre pair, on indique le nombre réel de décompositions de Goldbach de ce nombre, le nombre effectif de colonnes sans cases colorées de la grille, et le nombre de décomposants de Goldbach obtenu par minoration.

21 19 17 15 13
3 5 7 9 11



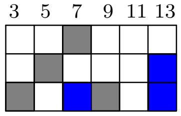
$1/5 \leq 1/5$
$2/5 \leq 3/5$
$2/5 \leq 3/5$ [24:J 3 1 0]

23 21 19 17 15 13
3 5 7 9 11 13



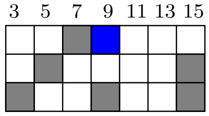
$1/6 \leq 1/6$
$2/6 \leq 3/6$
$4/6 \leq 5/6$ [26:P 3 1 0]

25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13



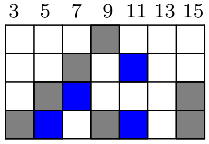
$1/6 \leq 1/6$
$2/6 \leq 3/6$
$4/6 \leq 5/6$ [28 2 1 0]

27 25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13 15



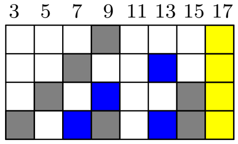
$2/7 \leq 3/7$
$2/7 \leq 3/7$
$3/7 \leq 5/7$ [30 3 2 0]

29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15



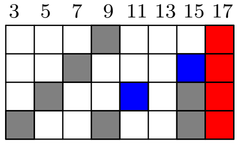
$1/7 \leq 1/7$
$2/7 \leq 3/7$
$3/7 \leq 3/7$
$5/7 \leq 5/7$ [32 2 0 0]

31 29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15 17



$1/8 \leq 1/8$
$2/8 \leq 3/8$
$3/8 \leq 3/8$
$5/8 \leq 5/8$ [34:P 4 1 1]

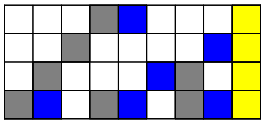
33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17



$1/8 \leq 1/8$
$2/8 \leq 3/8$
$3/8 \leq 3/8$
$3/8 \leq 5/8$ [36:J 4 2 1]

35 33 31 29 27 25 23 21 19

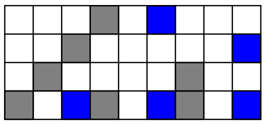
3 5 7 9 11 13 15 17 19



$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$3/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$ [38:P 2 1 0]

37 35 33 31 29 27 25 23 21

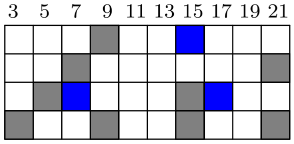
3 5 7 9 11 13 15 17 19



$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$ [40 3 1 0]

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21

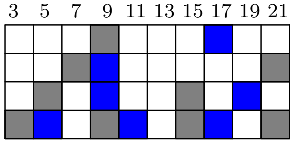
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



$2/10 \leq 3/10$
$2/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$4/10 \leq 7/10$ [42 4 2 0]

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

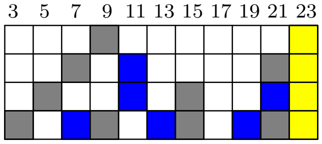
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



$2/10 \leq 3/10$
$3/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$7/10 \leq 7/10$ [44 3 1 0]

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

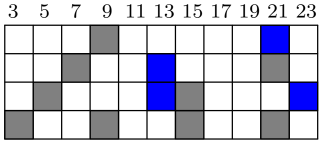
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$7/11 \leq 7/11$ [46:P 4 1 1]

45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25

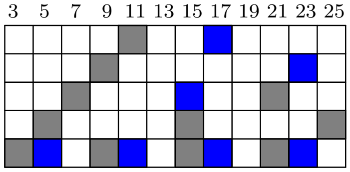
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$4/11 \leq 7/11$ [48 5 2 1]

47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25

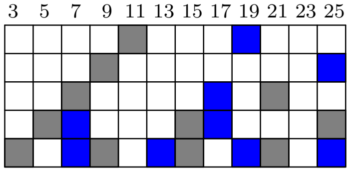
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



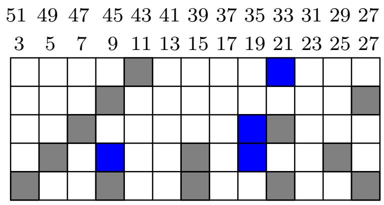
$2/12 \leq 3/12$
$2/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 5/12$
$8/12 \leq 9/12$ [50 4 1 0]

49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27

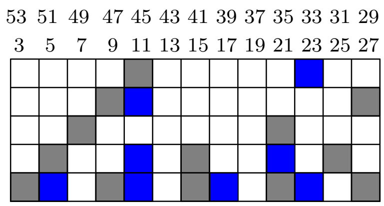
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



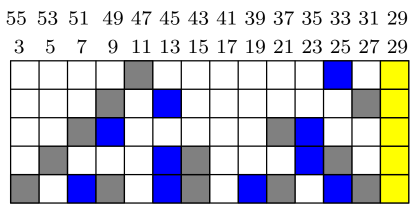
$2/12 \leq 3/12$
$2/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 3/12$
$5/12 \leq 5/12$
$8/12 \leq 9/12$ [52 3 1 0]



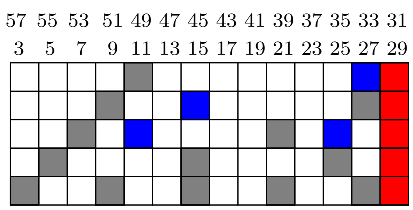
$2/13 \leq 3/13$
$2/13 \leq 3/13$
$3/13 \leq 3/13$
$5/13 \leq 5/13$
$5/13 \leq 9/13$ [54 5 2 1]



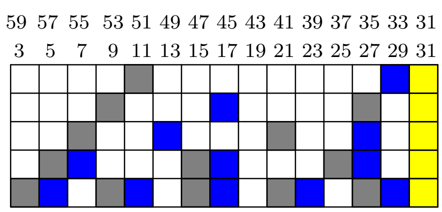
$2/13 \leq 3/13$
$3/13 \leq 3/13$
$2/13 \leq 3/13$
$5/13 \leq 5/13$
$9/13 \leq 9/13$ [56 3 1 1]



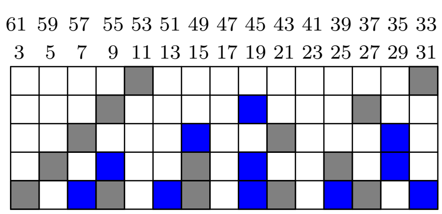
$2/14 \leq 3/14$
$3/14 \leq 3/14$
$4/14 \leq 5/14$
$5/14 \leq 5/14$
$9/14 \leq 9/14$ [58:P 4 1 1]



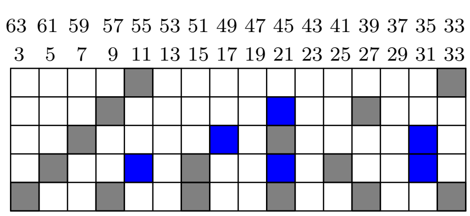
$2/14 \leq 3/14$
$3/14 \leq 3/14$
$4/14 \leq 5/14$
$3/14 \leq 5/14$
$5/14 \leq 9/14$ [60:J 6 3 1]



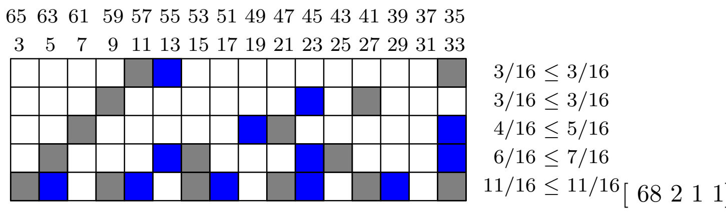
$2/15 \leq 3/15$
$3/15 \leq 3/15$
$4/15 \leq 5/15$
$6/15 \leq 7/15$
$10/15 \leq 11/15$ [62:P 3 1 0]

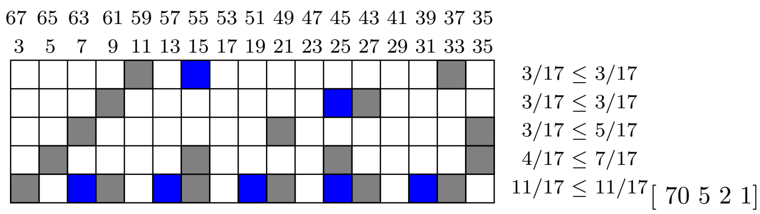


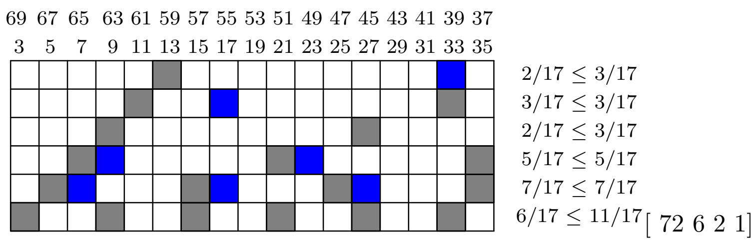
$2/15 \leq 3/15$
$3/15 \leq 3/15$
$4/15 \leq 5/15$
$6/15 \leq 7/15$
$10/15 \leq 11/15$ [64 5 1 0]

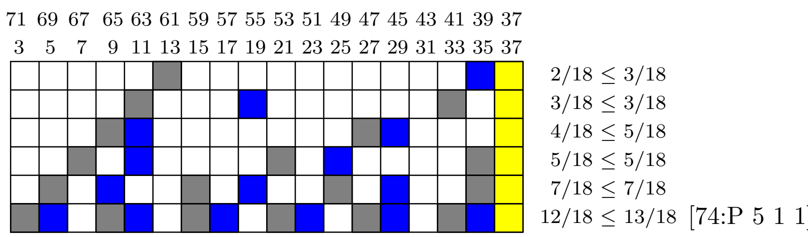


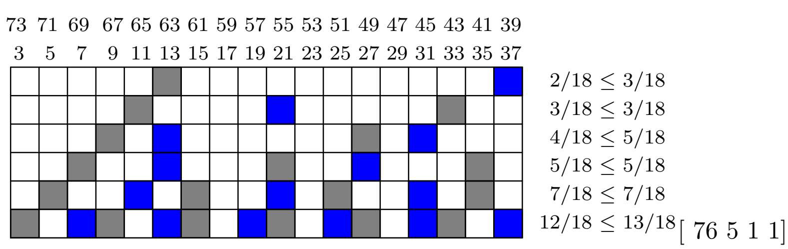
$2/15 \leq 3/15$
$3/15 \leq 3/15$
$4/15 \leq 5/15$
$6/15 \leq 7/15$
$6/15 \leq 11/15$ [66 6 3 1]

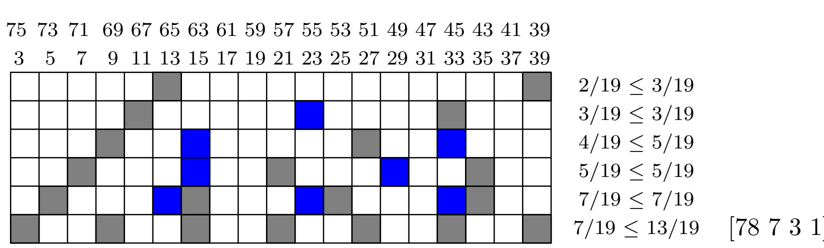

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
3/16 ≤ 3/16
3/16 ≤ 3/16
4/16 ≤ 5/16
6/16 ≤ 7/16
11/16 ≤ 11/16
[68 2 1 1]

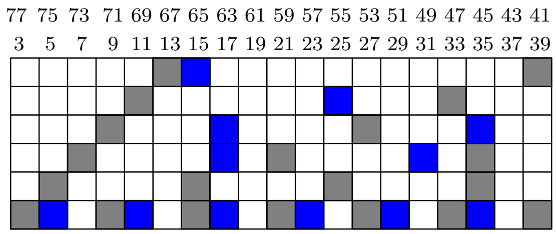

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
3/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 5/17
4/17 ≤ 7/17
11/17 ≤ 11/17
[70 5 2 1]


69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
2/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 3/17
2/17 ≤ 3/17
5/17 ≤ 5/17
7/17 ≤ 7/17
6/17 ≤ 11/17
[72 6 2 1]

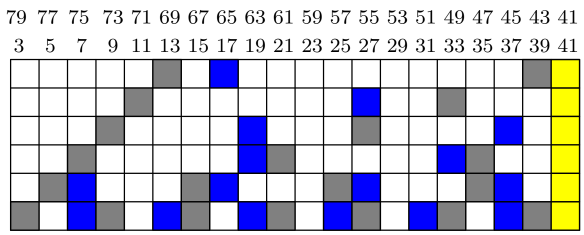

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18 ≤ 3/18
3/18 ≤ 3/18
4/18 ≤ 5/18
5/18 ≤ 5/18
7/18 ≤ 7/18
12/18 ≤ 13/18
[74:P 5 1 1]


73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18 ≤ 3/18
3/18 ≤ 3/18
4/18 ≤ 5/18
5/18 ≤ 5/18
7/18 ≤ 7/18
12/18 ≤ 13/18
[76 5 1 1]

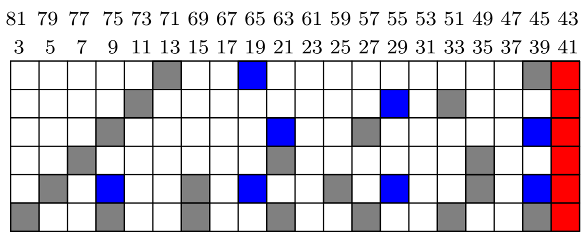

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
2/19 ≤ 3/19
3/19 ≤ 3/19
4/19 ≤ 5/19
5/19 ≤ 5/19
7/19 ≤ 7/19
7/19 ≤ 13/19
[78 7 3 1]



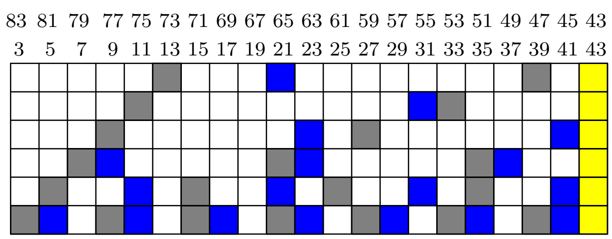
$3/19 \leq 3/19$
$3/19 \leq 3/19$
$4/19 \leq 5/19$
$5/19 \leq 5/19$
$4/19 \leq 7/19$
$13/19 \leq 13/19$ [80 4 1 1]



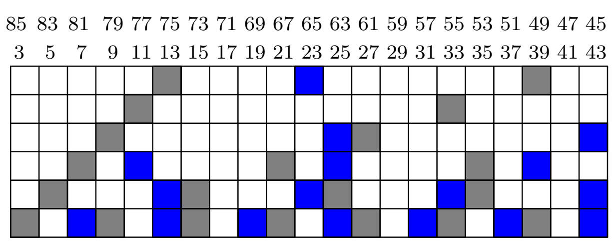
$3/20 \leq 3/20$
$3/20 \leq 3/20$
$4/20 \leq 5/20$
$5/20 \leq 5/20$
$8/20 \leq 9/20$
$13/20 \leq 13/20$ [82:P 5 1 1]



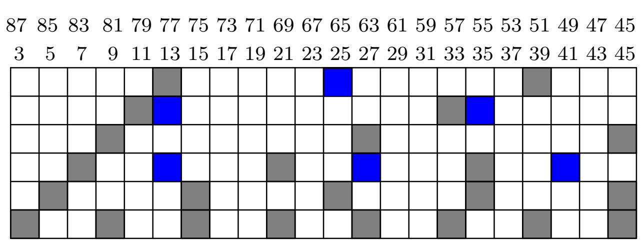
$3/20 \leq 3/20$
$3/20 \leq 3/20$
$4/20 \leq 5/20$
$3/20 \leq 5/20$
$8/20 \leq 9/20$
$7/20 \leq 13/20$ [84:J 3 1 1]



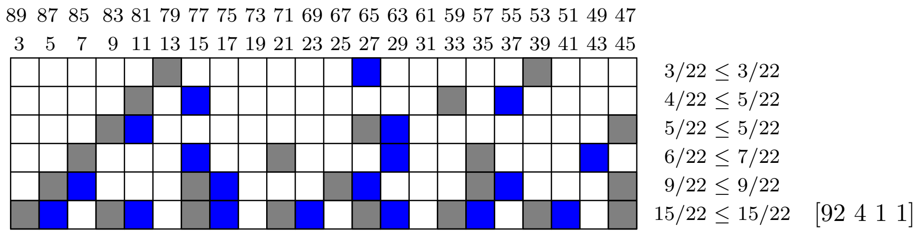
$3/21 \leq 3/21$
$3/21 \leq 3/21$
$4/21 \leq 5/21$
$6/21 \leq 7/21$
$8/21 \leq 9/21$
$14/21 \leq 15/21$ [86:P 5 1 1]

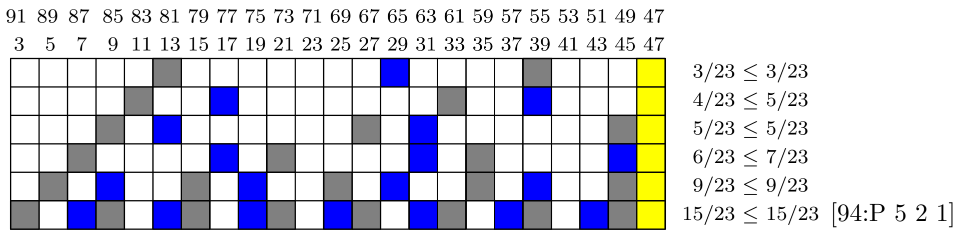


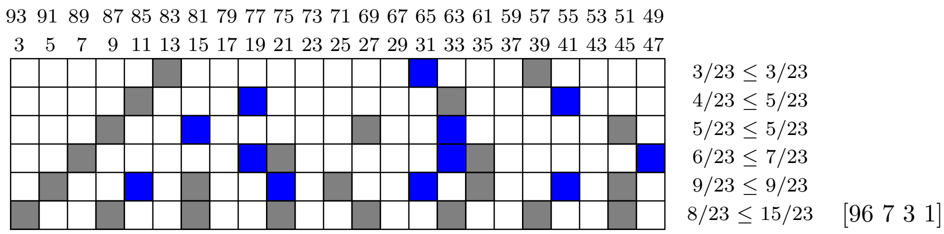
$3/21 \leq 3/21$
$2/21 \leq 3/21$
$4/21 \leq 5/21$
$6/21 \leq 7/21$
$8/21 \leq 9/21$
$14/21 \leq 15/21$ [88 4 1 1]

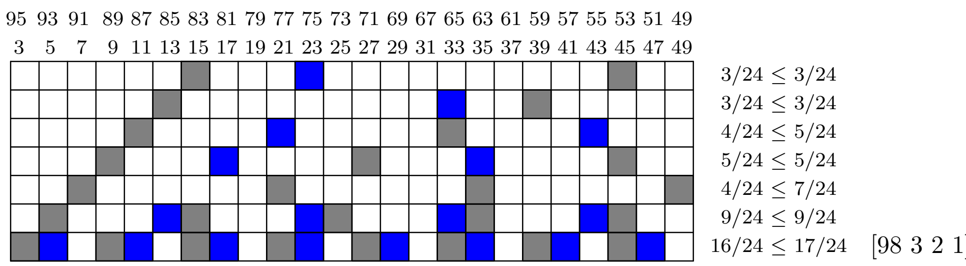


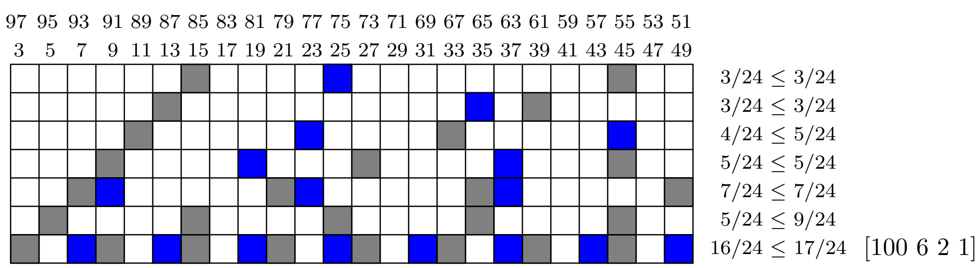
$3/22 \leq 3/22$
$4/22 \leq 5/22$
$3/22 \leq 5/22$
$6/22 \leq 7/22$
$5/22 \leq 9/22$
$8/22 \leq 15/22$ [90 9 4 1]


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
$3/22 \leq 3/22$
$4/22 \leq 5/22$
$5/22 \leq 5/22$
$6/22 \leq 7/22$
$9/22 \leq 9/22$
$15/22 \leq 15/22$
[92 4 1 1]


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
$3/23 \leq 3/23$
$4/23 \leq 5/23$
$5/23 \leq 5/23$
$6/23 \leq 7/23$
$9/23 \leq 9/23$
$15/23 \leq 15/23$
[94:P 5 2 1]


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
$3/23 \leq 3/23$
$4/23 \leq 5/23$
$5/23 \leq 5/23$
$6/23 \leq 7/23$
$9/23 \leq 9/23$
$8/23 \leq 15/23$
[96 7 3 1]


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
$3/24 \leq 3/24$
$3/24 \leq 3/24$
$4/24 \leq 5/24$
$5/24 \leq 5/24$
$4/24 \leq 7/24$
$9/24 \leq 9/24$
$16/24 \leq 17/24$
[98 3 2 1]


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
$3/24 \leq 3/24$
$3/24 \leq 3/24$
$4/24 \leq 5/24$
$5/24 \leq 5/24$
$7/24 \leq 7/24$
$5/24 \leq 9/24$
$16/24 \leq 17/24$
[100 6 2 1]

Note concernant une nouvelle manière de caractériser les nombres premiers : lorsqu'on étudie les numérateurs des fractions affectées à $2x$ et à $2x+2$ par la fonction que nous avons définie $f(2x, k)$ au début de cette note, si c'est la fonction Identité qui permet de passer de l'ensemble de numérateurs associé à $2x$ à celui associé à $2x+2$, alors $2x$ ou $2x+2$ est le double d'un nombre premier (celui des deux qui est le double d'un impair). Il en est de même si la fonction qui consiste à passer de l'ensemble des numérateurs associés à $2x$ à l'ensemble des numérateurs associés à $2x+2$ consiste à conserver un certain nombre de numérateurs et à multiplier les autres par 2.

Annexe 2 : Quelques écrits d'Henri Poincaré à propos de la démonstration par récurrence

Ces éléments sont extraits du numéro spécial Pour la Science consacré à Poincaré.
[Le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est-à-dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons les opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se retrouve à chaque pas, c'est la démonstration par récurrence... C'est là le raisonnement mathématique par excellence, déclare Poincaré. Sa particularité est qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes, et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général, mais uniquement des énoncés particuliers.
D'où nous vient ce raisonnement par récurrence, s'interroge Poincaré ?
Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. Cette règle [le raisonnement par récurrence], inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori, conclut Poincaré. L'irrésistible évidence avec laquelle ce principe s'impose n'est autre que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible... L'esprit a de cette puissance une intuition directe. L'expérience permet de prendre conscience de cette intuition et d'exploiter sa puissance. Voilà pourquoi, selon Poincaré, l'induction joue un rôle vital en mathématiques : c'est la base de l'un des procédés fondamentaux de démonstration. En physique, on pense que si une expérience a réussi un grand nombre de fois, elle réussira toujours... C'est ce que l'on dénomme l'induction dans les sciences empiriques, et il est vrai que l'induction mathématique lui ressemble... avec toutefois une différence essentielle : le processus d'induction qui s'applique par exemple en physique, est toujours incertain et se fonde sur un élément qui nous est extérieur, sur la croyance à un ordre général de l'Univers. Au contraire, l'induction mathématique, la méthode de démonstration par récurrence, s'impose nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. Elle ne peut donc pas être considérée comme une convention commode, tel que c'est le cas, en revanche, de certains postulats de la géométrie, conclut Poincaré.

La récurrence, auquel Poincaré ne s'intéressait que pour l'étude des propriétés des nombres, s'est révélée aussi très importante cent ans après en informatique. La notion de fonction récursive, fonction qu'un ordinateur peut calculer, se définit par la récurrence. En informatique, la récurrence est le fondement même du calcul.]

Etude de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

15 Juin 2009

1 Fondations

Dans cette section, nous commençons par définir une fonction récursive binaire sur les entiers f qui compte certains caractères de divisibilité, puis nous fournissons une fonction binaire *majorant* qui majore f, et nous étudions la croissance de la fonction *majorant*.

Soit la fonction récursive $f(i,k)$ définie de la façon suivante pour i et k variant de 1 à l'infini.

Définition 1.1 (Définition de la fonction binaire f)

$$f(4(2k+1)i+2a,k) = \begin{cases} i & \text{si } a \ = \ 0 \\ f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } a \ = \ 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k) & \text{si } 1 \ \leq \ a \ < \ 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } 2k+1 \ < \ a \ < \ 4k+2 \end{cases}$$

Théorème 1.1 (Calcul du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$\sum_{\substack{i \ impair \\ 3 \ \leq \ i \ \leq \ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}} (2k+1 \mid i) \vee (2k+1 \mid 2x-i)$$

$2x$ étant fixé, pour tout i compris entre 1 et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, la valeur de $f(2x,i)$ est majorable.

Théorème 1.2 (Majoration du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$f(2x,i) \leq 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1$$

Définition 1.2 (Définition de la fonction binaire $majorant$)

$$majorant(2x,i) = 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1.$$

Selon i, la fonction $majorant$ est une fonction croissante de $2x$.

Théorème 1.3 (Croissance de la fonction binaire $majorant$)

$$\forall\, x \;\geq\; 12,\; \forall\, y \;\geq\; 12,\; \forall\, 1 \;\leq\; i \;\leq\; \lfloor\sqrt{x}\rfloor,$$
$$2x \;\geq\; 2y \;\Rightarrow\; majorant(2x, i) \;\geq\; majorant(2y, i)$$

2 Ordre lexicographique sur les numérateurs des rationnels associés à $2x$

$(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
On pose $\mathbb{N}uplets = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$, la réunion de tous les produits cartésiens finis construit sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$ contient uniquement le singleton vide).

On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets$ de la façon suivante.

Soient $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $b = (b_1, \ldots, b_q)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{N}uplets$, et soit m le plus petit des deux entiers p et q.

$a < b$ si et seulement si
$(\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) < (b_1, \ldots, b_m)$ (pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets_m$)
ou $(\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_m)$ et $m < q$ (c'est-à-dire $p < q$).

Définition 2.1 (Définition du n-uplet des numérateurs associé à $2x$)

$Numérateurs(2x) \;=\; (n_1, \ldots, n_k)$ avec $1 \;\leq\; k \leq\; \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ et $n_i \;=\; majorant(2x, i)$.

Théorème 2.1 (Ordre lexicographique sur les n-uplets des numérateurs)

$$\forall\, x \;\geq\; 12,\; \forall\, y \;\geq\; 12,\; 2x \;\geq\; 2y \;\Rightarrow\; Numérateurs(2x) \;\geq\; Numérateurs(2y)$$

Définition 2.2 (Définition de l'ensemble de probabilités majorantes associé à $2x$)

$$ProbasMajorées(2x) = \left\{ \frac{majorant(2x, k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

On a $Card(ProbasMajorées(2x)) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

Et, de fait, $Card(ProbasMajorées(2x+2)) = Card(ProbasMajorées(2x)) + 1$ lorsque $2x+2$ est le double d'un carré, sinon $Card(ProbasMajorées(2x+2)) = Card(ProbasMajorées(2x))$.

Définition 2.3 (Définition de la fonction *poincaré***)**

$$poincaré(2x) = crible(ProbasMajorées(2x))$$

Définition 2.4 (Définition récursive de la formule du crible de Poincaré)

$$\begin{cases} crible(\emptyset) = 0. \\ crible(\left\{\dfrac{p}{q}\right\} \cup E) = \dfrac{p}{q} + crible(E) - \dfrac{p}{q}.crible(E). \end{cases}$$

On obtient une majoration du résultat de l'application de la formule du crible à l'ensemble $ProbasMajorées(2x)$, et ce pas à pas de 2x à 2x+2 selon la formule de récurrence :

Théorème 2.2 (Majoration de la formule du crible : formule de récurrence)

$$poincare(2x{+}2) < poincare(2x){+}2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor + 4}\right\rceil{-}1{+}\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor}$$

On en déduit une majoration pour tout $2x$ du résultat de l'application de la formule du crible de Poincaré à l'ensemble des probabilités majorées.

Théorème 2.3 (Majoration globale de la formule du crible)

$$poincare(2x)\begin{cases} = 0.872 & \text{si } x\ =\ 12 \\ < 0.872 + 2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4}\right\rceil - 1 + \frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor} & \text{si } x\ >\ 12 \end{cases}$$

Définissons $moitie = \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$.

Théorème 2.4 (minoration du nombre de décomposants de Goldbach)

$$\forall\ 2x\ \geq\ 24,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x)\ \geq\ (1{-}poincare(2x))moitie$$

Théorème 2.5 (Conclusion)

$$\forall\ 2x\ \geq\ 68,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x)\ \geq\ 1.$$

Annexe : nouvelle caractérisation des nombres premiers

On n'a pas utilisé les nombres exacts de divisibles pour étudier la conjecture de Goldbach mais on va les utiliser maintenant pour obtenir une nouvelle caractérisation des nombres premiers.

Définition 2.5 (Définition de l'ensemble des nombres exacts de divisibles associé à $2x$)

$$Exact(2x) = \left\{ f(2x, k), 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Définissons la fonction booléenne *double* qui renvoie *vrai* si l'un des n-uplets est "un peu" le double de l'autre

Définition 2.6 (Définition de la fonction *double*)

$$double(2x, 2y) \iff \begin{cases} Exact(2x) = (a_1, \ldots, a_m), \\ Exact(2y) = (b_1, \ldots, b_n), \\ \forall\, 1 \ \leq i \leq \ min(m, n), \ a_i \ = \ b_i \ ou \ a_i \ = \ 2.b_i. \end{cases}$$

$$Premier(x) \iff \exists\, k \ \geq \ 6, (\ x = 2k+1) \wedge (double(Exact(2x), Exact(2x-2))).$$

La Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

17 Juin 2009

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

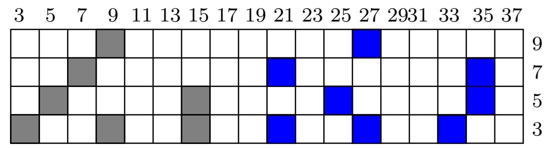
Les deux éléments essentiels qui nous ont permis d'aboutir aux idées qui sont présentées ici sont à rechercher tout d'abord dans l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* dans lequel celui-ci présente une fonction récursive qui permet de calculer la somme des diviseurs d'un entier. D'autre part, nous nous sommes appuyés sur un domaine habituellement appelé l'arithmétique des tissus, dont Edouard Lucas est à l'origine et qui consiste à représenter les caractères de divisibilités des nombres comme les mailles colorées de pièces de tissus (penser au Jacquard), ce qui en facilite la visualisation, l'appréhension. Il s'agissait de mettre au point une méthode qui permettrait de borner inférieurement le nombre des décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné[2].

2 Fondations

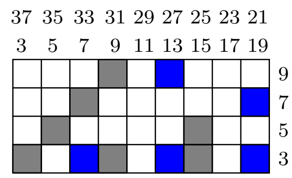
Présentons tout d'abord un exemple qui va montrer précisément ce que nous avions l'intention de compter. Considérons pour cela le nombre pair 40. Lorsque l'on cherche ses décomposants de Goldbach (i.e. les nombres premiers dont il est la somme), il suffit de s'intéresser aux nombres impairs dont il est la somme et étudier les caractères de divisibilité de chacun d'eux. On représente cela sur une "trame de tissu". On décide par convention de représenter la divisibilité des nombres inférieurs ou égaux à $x = 20$ par des cases grises et la divisibilité des nombres supérieurs à x par des cases bleues.

[1] La conjecture ayant été vérifiée par ordinateur jusqu'à des nombres très grands, notre analyse considèrera les nombres pairs supérieurs ou égaux à 24. En référence à cet article d'Euler qui nous a été très utile, on aurait pu appeler cette note *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport au nombre de leurs décomposants de Goldbach"*.

[2] Ici, on dira que le couple (p, q) est un décomposant de Goldbach de $2x$ si $2x = p + q$ avec p et q deux nombres premiers.



Choisissons maintenant de “plier le tissu” et d’en ramener toutes les cases sur un nombre de colonnes à peu près égal à x (ceci sera précisé car dans le cas d’un double de pair, la dernière colonne représente un seul nombre, alors qu’elle en représente deux dans le cas d’un double d’impair) en quelque sorte, on obtiendra par symétrie au tour de l’axe central le tissu suivant.



Il faut être attentif aux éléments suivants : notons la diagonale de cases grises à l’extrêmité gauche de la grille initiale (cette diagonale grise représente le fait qu’un nombre est divisible par lui-même) ; si, par pliage, des cases bleues se retrouvaient en-deçà de cette diagonale, on décide de les oublier (de ne pas colorer en bleu les cases qui, par symétrie, se seraient retrouvées à gauche de la diagonale de cases grises - ici par exemple, la dernière case bleue de la troisième ligne de la grille initiale). D’autre part, le pliage peut être amené à faire coïncider des cases bleues et des cases grises, le comptage que nous allons présenter maintenant les oubliera aussi.

On comprend immédiatement que les colonnes ne contenant aucune case colorée vont correspondre à certaines décompositions de Goldbach puisqu’elles sont indicées par des entêtes de colonne correspondant à deux nombres impairs dont ni l’un ni l’autre ne sont divisibles par l’un des nombres impairs compris entre 3 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

Si l’on s’intéresse maintenant à la suite des nombres pairs de 12 à 100 et que l’on associe à chacun d’eux un tissu plié, on va découvrir les régularités suivantes : intéressons-nous seulement aux cases colorées des premières lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 3, à partir du nombre 12, et comptons-les : on obtiendra la séquence de nombres suivante : 1,2,2,2,3,3,2,4,4,3,5,5,3,6,6,4,7,7,etc. On reconnaît un *motif* qui va pouvoir être défini très aisément par une fonction récursive. Intéressons-nous ensuite seulement aux cases colorées des deuxièmes lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 5, à partir du nombre 20 (au lieu du nombre 12). On obtient des valeurs identiques pour la séquence de nombres obtenue à celles de la première séquence (pour la divisibilité par 3) mais on n’a pas les mêmes occurences pour les nombres obtenus. On obtient : 1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,2,4,4,4,4,3,5,5,5,5,3,6,6,6,6,4,7,7,7,7,etc. Les nombres pour lesquels on trouve le nombre 1 qui initie la séquence sont identifiés comme étant de la forme $4(2k+1)$ (il s’agit des nombres 12, 20, 28, 36, etc).

Les valeurs successives apparaissent dans le même ordre pour tout k. Seul change le nombre d'éléments intermédiaires, qui font reconnaître des motifs de longueur $2(2k+1)$ pour les nombres pairs compris entre $4i(2k+1)$ et $4(i+1)(2k+1)$. Ces motifs sont de la forme suivante :

$$n\,\underbrace{2n\ldots 2n}_{2k \text{ fois}}\,n+1\,\underbrace{2n+1\ldots 2n+1}_{2k \text{ fois}}$$

En annexe 2 sont fournies toutes les grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100.

Les nombres de lignes et de colonnes de chaque grille sont définis de la façon suivante :

- nombre de lignes de la grille associée à 2x = $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ (il augmente de 1 à chaque fois que 2x est le double d'un carré)
- nombre de colonnes de la grille associée à 2x= $\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor$ (il augmente de 1 une fois sur deux)

Ces analyses nous ont permis de découvrir la fonction récursive binaire f.

Soit la fonction récursive $f(x,i)$ définie pour i et k variant de 1 à l'infini.

Définition 2.1 (Définition de la fonction binaire f)

$$f((8i+4)x+2a,k)=\begin{cases} x & \text{si } a \ = \ 0 \\ f((8i+4)x,k)+1 & \text{si } a \ = \ 2k+1 \\ 2.f((8i+4)x,k) & \text{si } 1 \ \leq \ a \ < \ 2k+1 \\ 2.f((8i+4)x,k)+1 & \text{si } 2k+1 \ < \ a \ < \ 4k+2 \end{cases}$$

Définition 2.2 (Calcul du nombre de divisibles par $2k+1$)

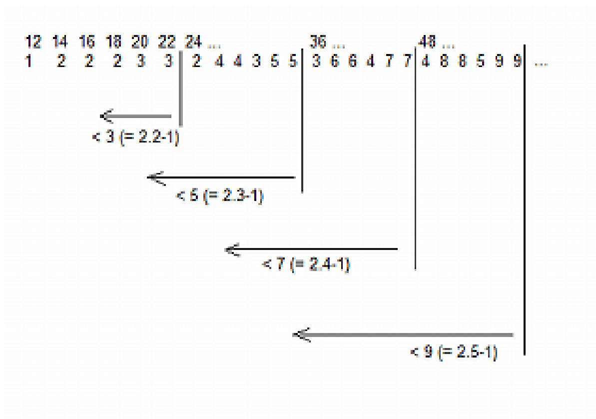
$$\sum_{\substack{i \ impair \\ 3 \ \leq \ i \ \leq \ \lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor \\ 2x-i\geq i}} (2k+1 \mid i)\vee(2k+1 \mid 2x-i)$$

C'est par définition même que l'on a :

$$f(2x,k)=\sum_{\substack{i \ impair \\ 3 \ \leq \ i \ \leq \ \lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor \\ 2x-i\geq i}} (2k+1 \mid i)\vee(2k+1 \mid 2x-i)$$

Il est important de bien noter deux choses : sous le signe Sigma de la somme, le $2x-i\geq i$ correspond à l'élimination des cases bleues qui par symétrie se retrouvent en-deçà de la diagonale de cases grises à l'extrême gauche. C'est d'autre part à cause du $\vee$ booléen que lorsque les cases bleues et les cases grises "coïncident" par pliage, sous prétexte que 2k+1 divise 2x, on ne compte qu'une case au lieu de deux (car $1\vee 1=1$ dans l'algèbre de Boole). Ces remarques sont importantes car elles expriment toute la distinction qu'il y a entre la méthode présentée ici et les méthodes habituelles telles que le crible d'Erathosthène.

$2x$ étant fixé, pour tout i compris entre 1 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$, la valeur de $f(2x,i)$ est majorable. Cela se comprend aisément sur le dessin suivant (qui ne se préoccupe que d'une portion de la suite numérique proche de son début (démarrant à 12) et de la divisibilité par 3 (premières lignes (lignes en bas) des grilles).



Théorème 2.1 (Majoration du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$f(2x,i) \leq 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1$$

Définition 2.3 (Définition de la fonction binaire $majorant$)

$$majorant(2x,i) = 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1.$$

Selon i, la fonction $majorant$ est une fonction croissante de $2x$.

Théorème 2.2 (Croissance de la fonction binaire $majorant$)

$$\forall\, x \geq 12,\ \forall\, y \geq 12,\ \forall\, 1 \leq i \leq \lfloor\sqrt{x}\rfloor,$$
$$2x \geq 2y \Rightarrow majorant(2x,i) \geq majorant(2y,i)$$

En annexes 3 et 4 sont fournies les valeurs de $f(2x,i)$ pour $2x$ compris entre 24 et 100, ainsi que les valeurs de $majorant(2x,i)$ pour ces mêmes nombres. Pour un nombre pair $2x$ fixé, on rappelle que $f(2x,i)$ et $majorant(2x,i)$ sont calculés pour i prenant toutes les valeurs de 1 à $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$; les parenthèses délimitant les n-uplets ainsi que les virgules en séparant les coordonnées ont été omises.

3 Ordre lexicographique sur les numérateurs des rationnels associés à $2x$

On a besoin de définir maintenant un ordre lexicographique sur des n-uplets d'entiers dont on ne connaît pas la taille.

Cet ordre doit être tel que par exemple, $(3,3,1) < (5,3,1)$ ou bien $(5,3,1) < (5,3,3)$ ou encore $(7,5,3,3) < (9,5,3,3,3)$.

$(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
On pose $\mathbb{N}uplets = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$, la réunion de tous les produits cartésiens finis construit sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$ contient uniquement le singleton vide).

On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets$ de la façon suivante.

Soient $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $b = (b_1, \ldots, b_q)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{N}uplets$ tels que $p \leq q$.

$$a \ < \ b \text{ si et seulement si } \forall \ i \ \leq \ p, \ a_i \ \leq \ b_i.$$

Définition 3.1 (Définition du n-uplet des numérateurs associé à $2x$)

$$Numérateurs(2x) \ = \ (n_1, \ldots, n_k) \text{ avec } 1 \ \leq \ k \leq \ \lfloor \sqrt{x} \rfloor \text{ et } n_i \ = \ majorant(2x, i).$$

Théorème 3.1 (Ordre lexicographique sur les n-uplets des numérateurs)

$$\forall \ x \ \geq \ 12, \ \forall \ y \ \geq \ 12, \ 2x \ \geq \ 2y \ \Rightarrow \ Numérateurs(2x) \ \geq \ Numérateurs(2y)$$

Définition 3.2 (Définition de l'ensemble de probabilités majorantes associé à $2x$)

$$Probas(2x) = \left\{ \frac{majorant(2x,k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Rapporter ainsi les nombres $majorant(2x, k)$ au nombre de colonnes de la grille associée à $2x$ représente la probabilité qu'a chaque colonne de contenir une case colorée dans la ligne k (lorsque la deuxième coordonnée de la fonction $majorant$ vaut k, on considère la divisibilité par $2k + 1$).

Par exemple, majorant(88,2) = 9. Le nombre de colonnes de la grille associée à 88 est 21. Le rationnel $\frac{9}{21}$ représente la probabilité que l'une des colonnes (chaque colonne, on le rappelle représente un couple d'impairs (p, q) supérieurs ou égaux à 3 dont la somme vaut 88) contienne au moins une case colorée, c'est à dire que p ou q soit un multiple de 5.

On a $Card(Probas(2x)) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Et, de fait, $Card(Probas(2x + 2)) = Card(Probas(2x)) + 1$ lorsque $2x + 2$ est le double d'un carré, sinon $Card(Probas(2x + 2)) = Card(Probas(2x))$.

Définition 3.3 (Définition récursive de la formule du crible de Poincaré)

$$\begin{cases} crible(\emptyset) = 0. \\ crible(\left\{ \frac{p}{q} \right\} \cup E) = \frac{p}{q} + crible(E) - \frac{p}{q}.crible(E). \end{cases}$$

Définition 3.4 (Définition de la fonction *poincaré***)**

$$poincaré(2x) = crible(Probas(2x))$$

La fonction *crible* qui a été définie ci-dessus correspond à ce que l'on a coutume d'appeler le principe d'inclusion / exclusion (ou formule de De Moivre, de Da Silva ou de Poincaré). La formulation mathématique de cette formule du crible est :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k) - \sum_{i<j}\mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

L'application de la formule du crible est nécessitée par le fait qu'on ne sait pas quelle case colorée d'une ligne se trouve partager une colonne avec une case colorée d'une autre ligne.

On va appliquer la formule du crible aux ensembles de probabilités que l'on a identifiés pour trouver quelle est la probabilité que l'un de ces événements (qui représentent les caractères de divisibilité par les impairs successifs, et donc la nature d'être composé pour un nombre) advienne et nous multiplierons le complémentaire à 1 de cette probabilité par $moitié = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$, pour obtenir un nombre minorant le nombre de décomposants de Goldbach de $2x$.

Si les dénominateurs des rationnels intervenant dans la formule du crible étaient tous identiques, l'ordre lexicographique existant sur les n-uplets des numérateurs des nombres rationnels représentant des probabilités d'événements intervenant dans le calcul nous permettrait d'obtenir des résultats croissants.
Mais ce n'est pas le cas ici : une fois sur deux, le dénominateur des rationnels est augmenté de 1, ce qui nous fait appliquer la formule sur des nombres de plus en plus petits. Du fait de ce changement des dénominateurs, on ne peut être sûr pour l'instant qu'on va bien avoir un résultat croissant, qui nous permettra au-delà d'un certain nombre pair, d'obtenir toujours au moins un décomposant de Goldbach.

Il faut expliquer maintenant pourquoi l'application de la formule du crible aux ensembles $Probas(2x)$ pour les nombres pairs successifs permet cependant d'obtenir une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach.
Dans un premier temps, on ne fait que constater qu'à partir du nombre pair 66, cette borne est supérieure ou égale à 1 et ne décroîtra plus jamais à 0.
Il faut expliquer précisément ce constat, en analysant la méthode proposée ici et en trouvant quel est l'écart maximum séparant $Probas(2x)$ de $Probas(2x+2)$.

En analysant les calculs effectués, on comprend que les ensembles de rationnels varient de la manière suivante entre $2x$ et $2x + 2$:

- Tout d'abord, on a vu qu'on peut ajouter un rationnel de plus à l'ensemble, sous prétexte que $2x + 2$ est le double d'un carré d'entier. L'analyse des numérateurs des rationnels obtenus dans un tel cas montre que le dernier rationnel ajouté à l'ensemble est majorable par $2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil - 1$.

- D'autre part, à cause de l'ordre lexicographique croissant existant sur les n-uplets des numérateurs des rationnels, on voit que l'on peut majorer l'augmentation associée à l'augmentation de certaines coordonnées des n-uplets lorsqu'on passe de l'ensemble $Probas(2x)$ à l'ensemble $Probas(2x+2)$ par le nombre

$$\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8i+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}.$$

On obtient une majoration du résultat de l'application de la formule du crible à l'ensemble $Probas(2x)$, et ce pas à pas de 2x à 2x+2 selon la formule de récurrence :

Théorème 3.2 (Majoration de la formule du crible : formule de récurrence)

$$poincare(2x+2) < poincare(2x)+2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil -1+\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8i+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}$$

On en déduit une majoration pour tout $2x$ du résultat de l'application de la formule du crible de Poincaré à l'ensemble des probabilités majorées.

Théorème 3.3 (Majoration globale de la formule du crible)

$$poincare(2x)\begin{cases} = 0.872 & \text{si } x = 12 \\ < 0.872+2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil -1+\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8i+4)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor} & \text{si } x > 12 \end{cases}$$

En annexe 5, sont fournis les ensembles de probabilités $Probas(2x)$ pour $2x$ compris entre 24 et 100 et les valeurs de $poincaré(2x)$ pour ces mêmes nombres pairs.

Définissons $moitie = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$.

Théorème 3.4 (minoration du nombre de décomposants de Goldbach)

$\forall\ 2x \geq 24,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x) \geq (1-poincare(2x))moitie$

Théorème 3.5 (Conclusion)

$$\forall\ 2x \geq 68,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x) \geq 1.$$

Annexe 1 : nouvelle caractérisation des nombres premiers

Dans la note ci-dessus, on n'a pas eu besoin d'utiliser les nombres exacts de divisibles (fournis par la fonction f) pour étudier la conjecture de Goldbach mais on va les utiliser maintenant pour obtenir une nouvelle caractérisation des nombres premiers.

Définition 3.5 (Définition de l'ensemble des nombres exacts de divisibles associé à $2x$)

$$Exact(2x) = \left\{ f(2x,k), 1 \le k \le \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Définissons la fonction booléenne *double* qui renvoie *vrai* si l'un des n-uplets est "un peu" le double de l'autre (i.e. les coordonnées de même position des deux n-uplets sont soit identiques, soit la seconde coordonnée est le double de la première).

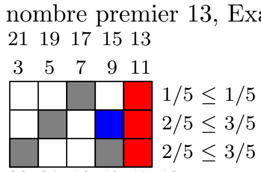
Définition 3.6 (Définition de la fonction *double*)

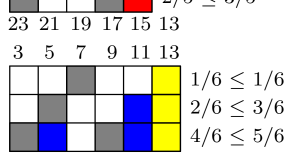
$$double(2x,2y) \iff \left\{ \begin{array}{l} Exact(2x) = (a_1, \dots, a_m), \\ Exact(2y) = (b_1, \dots, b_n), \\ \forall\, 1 \le i \le min(m,n),\ a_i = b_i \ ou\ a_i = 2.b_i. \end{array} \right.$$

$$Premier(x) \iff \exists\, k \ge 6, (\ x = 2k+1) \wedge (double(Exact(2x), Exact(2x-2))).$$

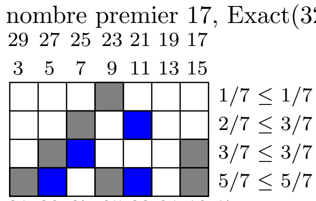
Observons tout d'abord les grilles associées aux doubles de nombres premiers conjointement à celles du double de leur prédécesseur.

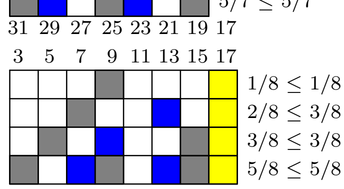
- nombre premier 13, Exact(24) = (2,2,1), Exact(26) = (4,2,1).





- nombre premier 17, Exact(32) = (5,3,2,1), Exact(34) = (5,3,2,1).

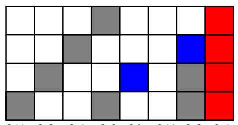




- nombre premier 19, Exact(36) = (3,3,2,1), Exact(38) = (6,3,2,2).

33 31 29 27 25 23 21 19

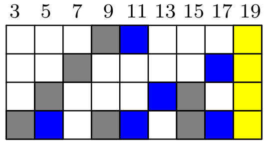
3 5 7 9 11 13 15 17



$1/8 \leq 1/8$
$2/8 \leq 3/8$
$3/8 \leq 3/8$
$3/8 \leq 5/8$

35 33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17 19

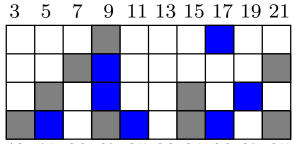


$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$3/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$

- nombre premier 23, Exact(44) = (7,4,3,2), Exact(46) = (7,4,3,2).

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

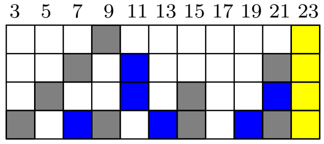
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



$2/10 \leq 3/10$
$3/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$7/10 \leq 7/10$

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

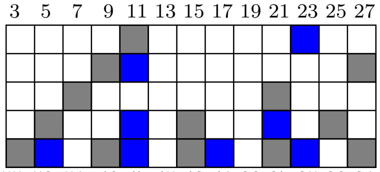


$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$7/11 \leq 7/11$

- nombre premier 29, Exact(56) = (9,5,2,3,2), Exact(58) = (9,5,4,3,2).

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

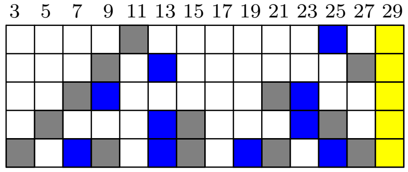
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



$2/13 \leq 3/13$
$3/13 \leq 3/13$
$2/13 \leq 3/13$
$5/13 \leq 5/13$
$9/13 \leq 9/13$

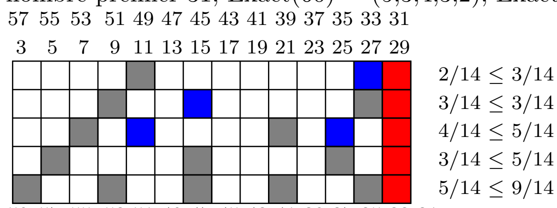
55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

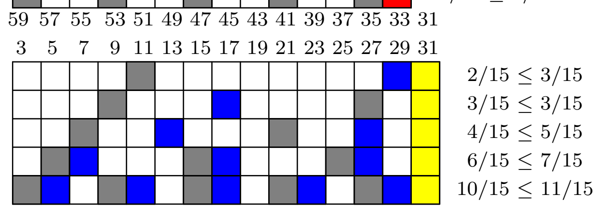
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



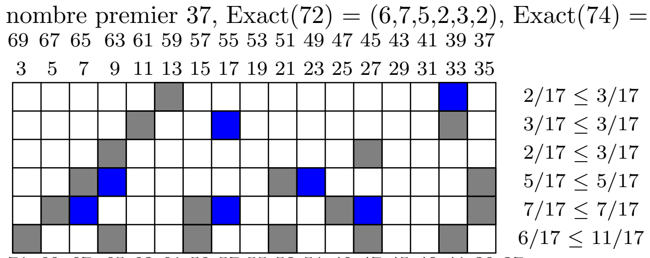
$2/14 \leq 3/14$
$3/14 \leq 3/14$
$4/14 \leq 5/14$
$5/14 \leq 5/14$
$9/14 \leq 9/14$

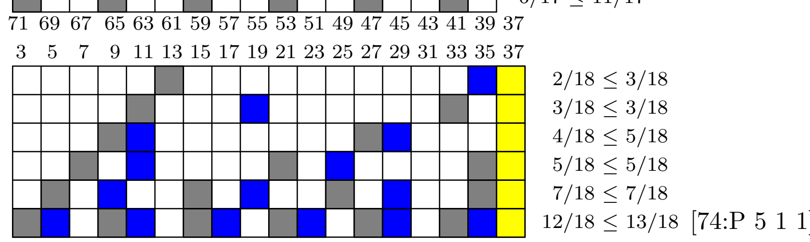
- nombre premier 31, Exact(60) = (5,3,4,3,2), Exact(62) = (10,6,4,3,2).



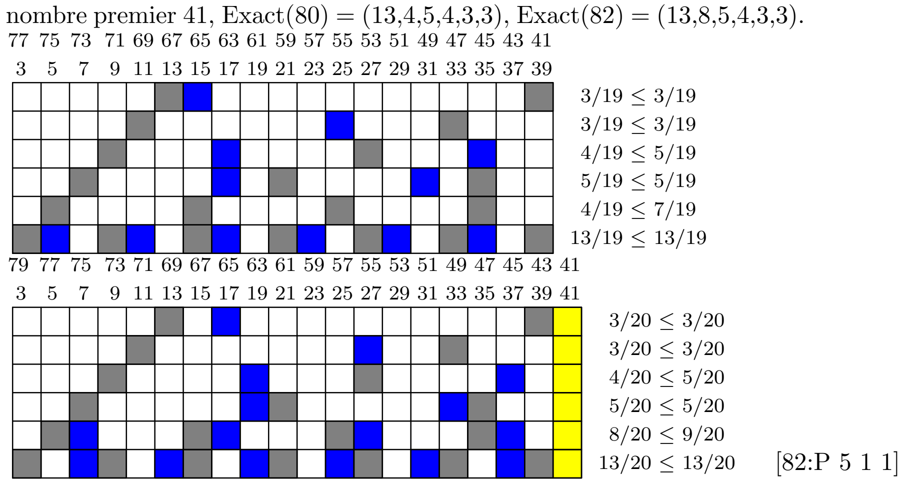


- nombre premier 37, Exact(72) = (6,7,5,2,3,2), Exact(74) = (12,7,5,4,3,2).

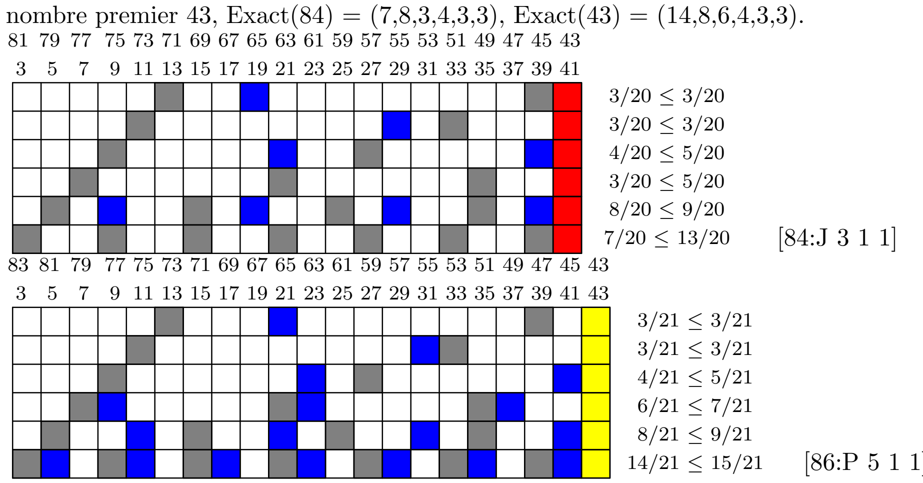




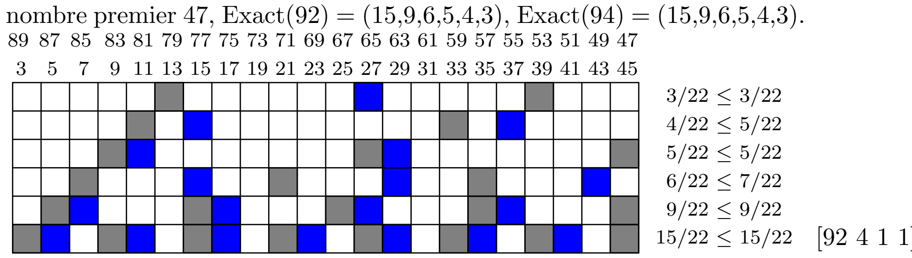
- nombre premier 41, Exact(80) = (13,4,5,4,3,3), Exact(82) = (13,8,5,4,3,3).

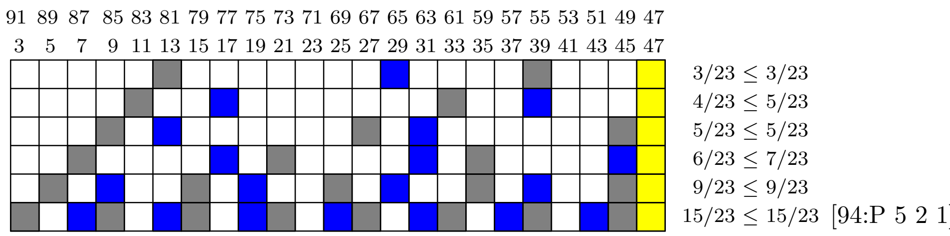


- nombre premier 43, Exact(84) = (7,8,3,4,3,3), Exact(43) = (14,8,6,4,3,3).



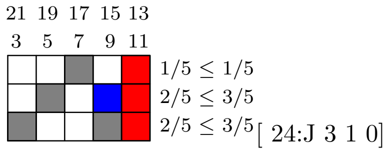
- nombre premier 47, Exact(92) = (15,9,6,5,4,3), Exact(94) = (15,9,6,5,4,3).

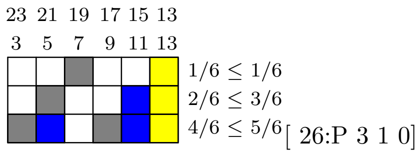


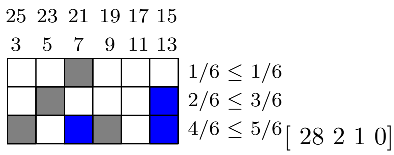


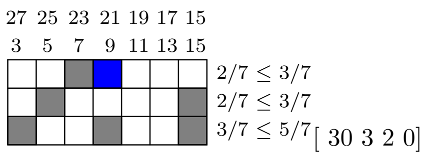
Annexe 2 : Représentation graphique de certains décomposants de Goldbach

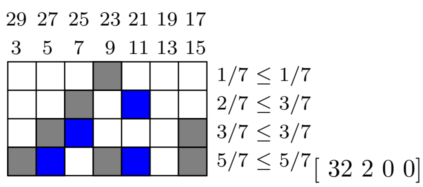
Les grilles ci-dessous sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 24 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$ correspond à l'un des deux nombres impairs $2i+1$ et $2x-2i-1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\lfloor\sqrt{x}\rfloor + 1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). A droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (cela est représenté également par la coloration en jaune ou rouge de la dernière colonne qui ne présente ni case noire, ni case bleue). Puis sont fournis à droite des grilles d'une part les fractions rationnelles représentant pour chaque ligne la proportion de cases colorées en noir ou bleu, rapportée au nombre de colonnes de la grille et d'autre part, la fraction rationnelle majorante. Enfin, à côté du nombre pair, on indique le nombre réel de décompositions de Goldbach de ce nombre, le nombre effectif de colonnes sans cases colorées de la grille, et le nombre de décomposants de Goldbach obtenu par minoration.

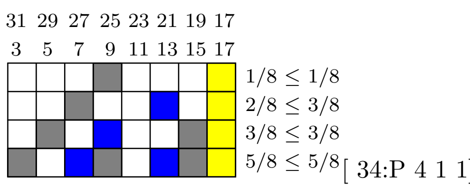

21 19 17 15 13
3 5 7 9 11
1/5 ≤ 1/5
2/5 ≤ 3/5
2/5 ≤ 3/5
[24:J 3 1 0]

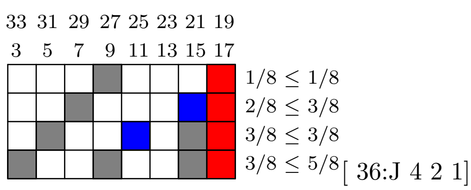

23 21 19 17 15 13
3 5 7 9 11 13
1/6 ≤ 1/6
2/6 ≤ 3/6
4/6 ≤ 5/6
[26:P 3 1 0]


25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13
1/6 ≤ 1/6
2/6 ≤ 3/6
4/6 ≤ 5/6
[28 2 1 0]

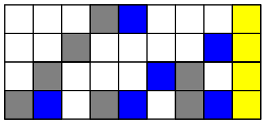

27 25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13 15
2/7 ≤ 3/7
2/7 ≤ 3/7
3/7 ≤ 5/7
[30 3 2 0]


29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15
1/7 ≤ 1/7
2/7 ≤ 3/7
3/7 ≤ 3/7
5/7 ≤ 5/7
[32 2 0 0]


31 29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15 17
1/8 ≤ 1/8
2/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 3/8
5/8 ≤ 5/8
[34:P 4 1 1]

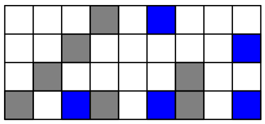

33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17
1/8 ≤ 1/8
2/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 5/8
[36:J 4 2 1]

35 33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17 19



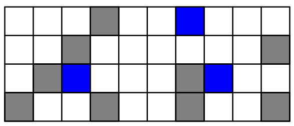
$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$3/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$ [38:P 2 1 0]

37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19



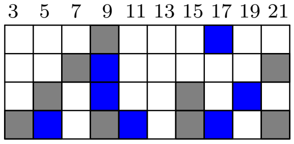
$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$ [40 3 1 0]

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



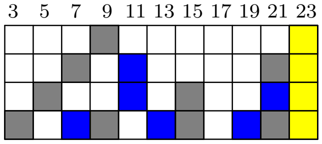
$2/10 \leq 3/10$
$2/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$4/10 \leq 7/10$ [42 4 2 0]

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



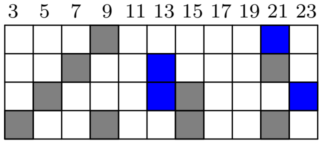
$2/10 \leq 3/10$
$3/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$7/10 \leq 7/10$ [44 3 1 0]

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



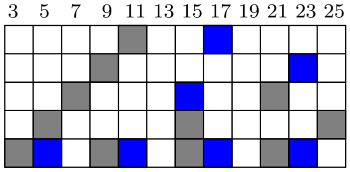
$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$7/11 \leq 7/11$ [46:P 4 1 1]

45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



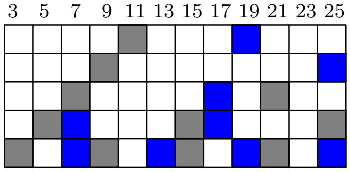
$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$4/11 \leq 7/11$ [48 5 2 1]

47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



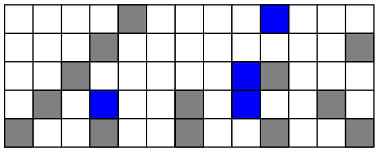
$2/12 \leq 3/12$
$2/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 5/12$
$8/12 \leq 9/12$ [50 4 1 0]

49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



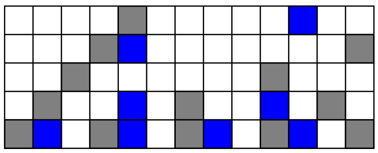
$2/12 \leq 3/12$
$2/12 \leq 3/12$
$3/12 \leq 3/12$
$5/12 \leq 5/12$
$8/12 \leq 9/12$ [52 3 1 0]

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



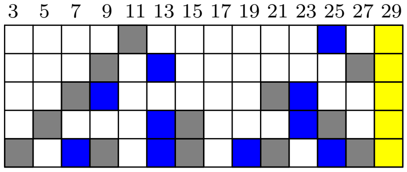
2/13 ≤ 3/13
2/13 ≤ 3/13
3/13 ≤ 3/13
5/13 ≤ 5/13
5/13 ≤ 9/13 [54 5 2 1]

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



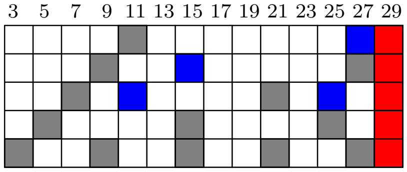
2/13 ≤ 3/13
3/13 ≤ 3/13
2/13 ≤ 3/13
5/13 ≤ 5/13
9/13 ≤ 9/13 [56 3 1 1]

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



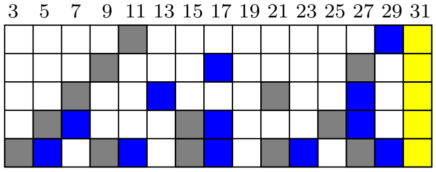
2/14 ≤ 3/14
3/14 ≤ 3/14
4/14 ≤ 5/14
5/14 ≤ 5/14
9/14 ≤ 9/14 [58:P 4 1 1]

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



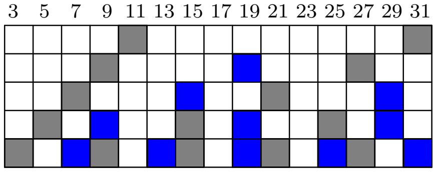
2/14 ≤ 3/14
3/14 ≤ 3/14
4/14 ≤ 5/14
3/14 ≤ 5/14
5/14 ≤ 9/14 [60:J 6 3 1]

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31



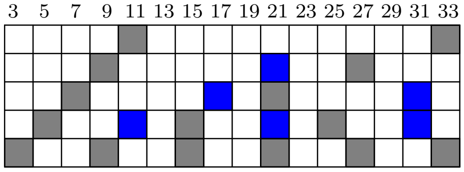
2/15 ≤ 3/15
3/15 ≤ 3/15
4/15 ≤ 5/15
6/15 ≤ 7/15
10/15 ≤ 11/15 [62:P 3 1 0]

61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

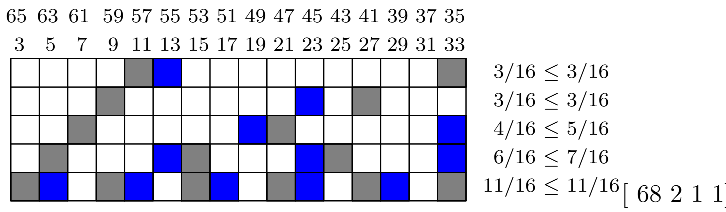


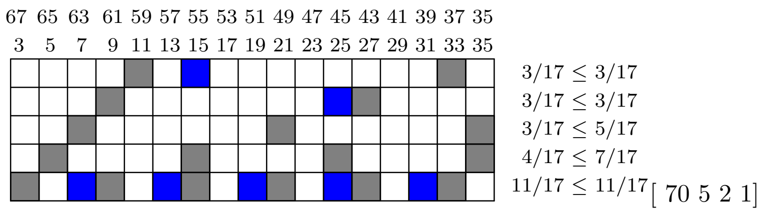
2/15 ≤ 3/15
3/15 ≤ 3/15
4/15 ≤ 5/15
6/15 ≤ 7/15
10/15 ≤ 11/15 [64 5 1 0]

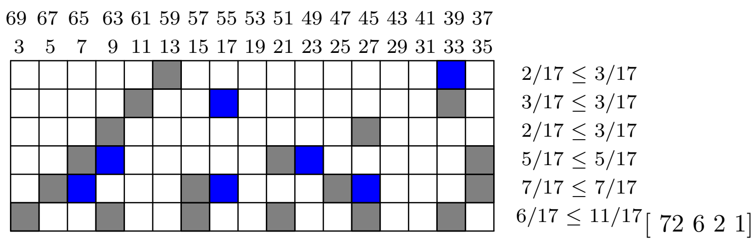
63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

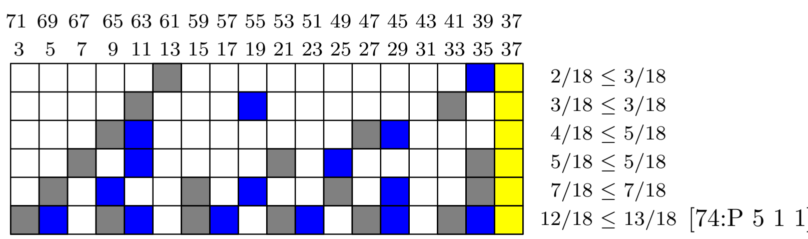


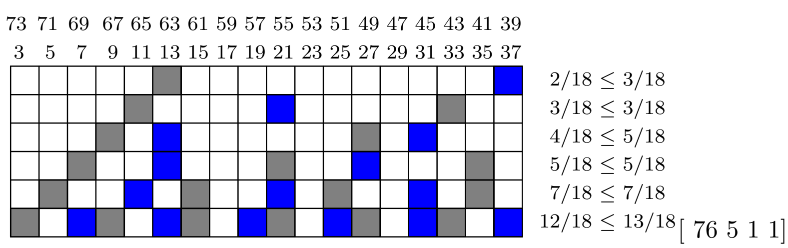
2/15 ≤ 3/15
3/15 ≤ 3/15
4/15 ≤ 5/15
6/15 ≤ 7/15
6/15 ≤ 11/15 [66 6 3 1]

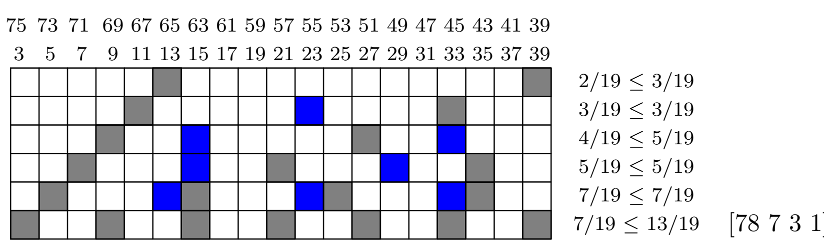

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
3/16 ≤ 3/16
3/16 ≤ 3/16
4/16 ≤ 5/16
6/16 ≤ 7/16
11/16 ≤ 11/16
[68 2 1 1]

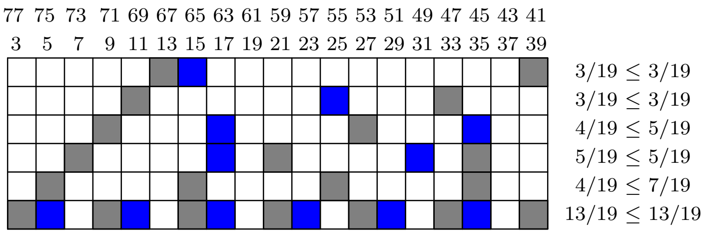

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
3/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 5/17
4/17 ≤ 7/17
11/17 ≤ 11/17
[70 5 2 1]


69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
2/17 ≤ 3/17
3/17 ≤ 3/17
2/17 ≤ 3/17
5/17 ≤ 5/17
7/17 ≤ 7/17
6/17 ≤ 11/17
[72 6 2 1]

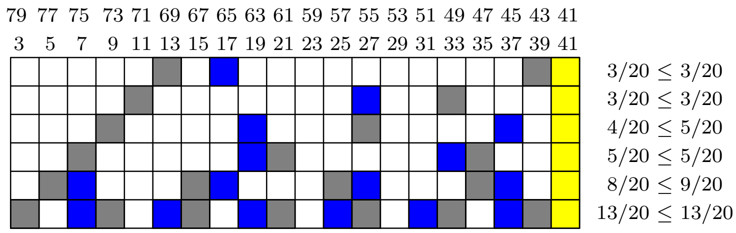

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18 ≤ 3/18
3/18 ≤ 3/18
4/18 ≤ 5/18
5/18 ≤ 5/18
7/18 ≤ 7/18
12/18 ≤ 13/18
[74:P 5 1 1]


73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18 ≤ 3/18
3/18 ≤ 3/18
4/18 ≤ 5/18
5/18 ≤ 5/18
7/18 ≤ 7/18
12/18 ≤ 13/18
[76 5 1 1]

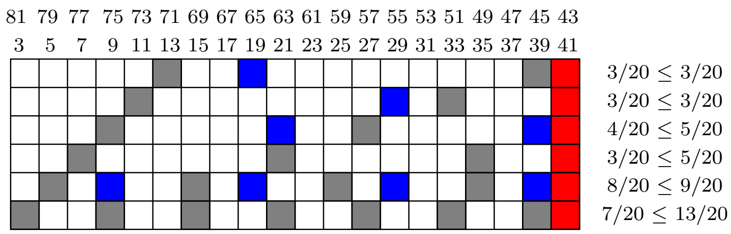

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
2/19 ≤ 3/19
3/19 ≤ 3/19
4/19 ≤ 5/19
5/19 ≤ 5/19
7/19 ≤ 7/19
7/19 ≤ 13/19
[78 7 3 1]



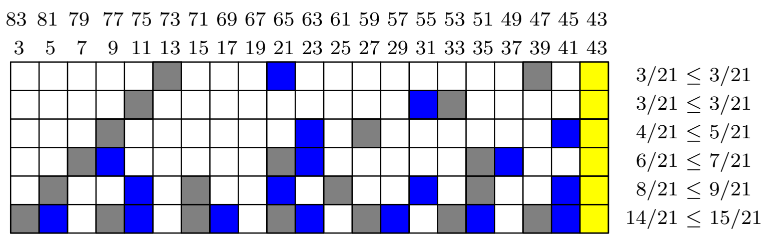
[80 4 1 1]



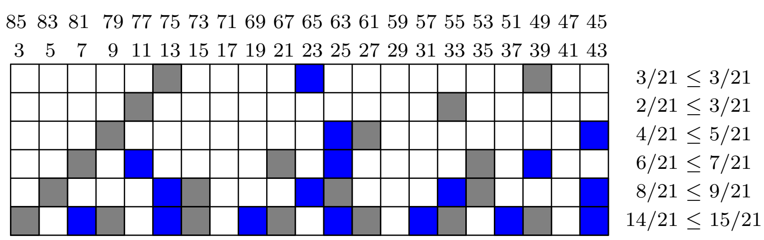
[82:P 5 1 1]



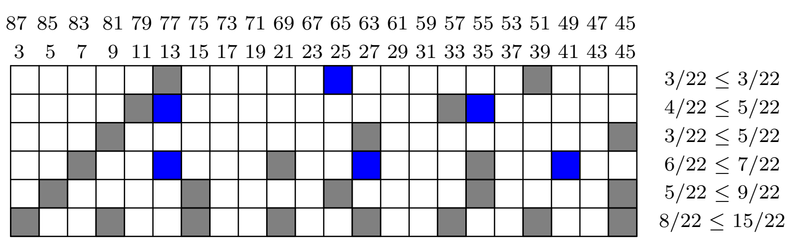
[84:J 3 1 1]



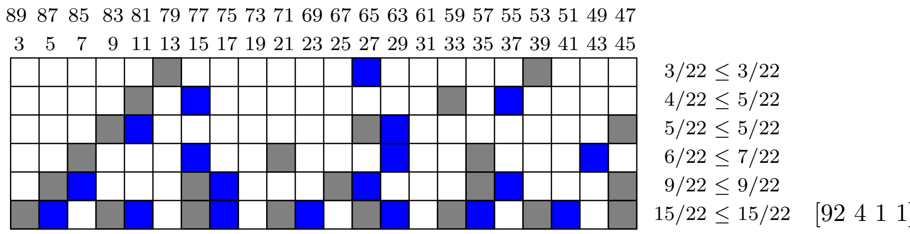
[86:P 5 1 1]

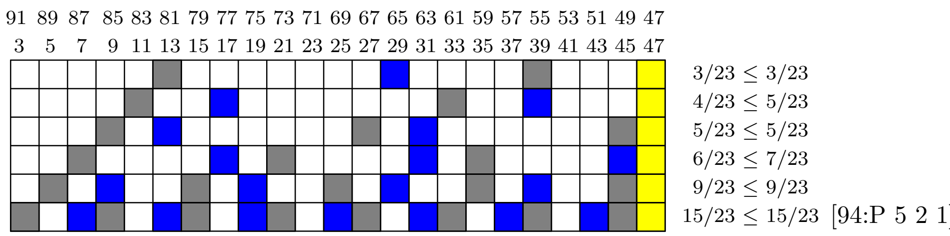


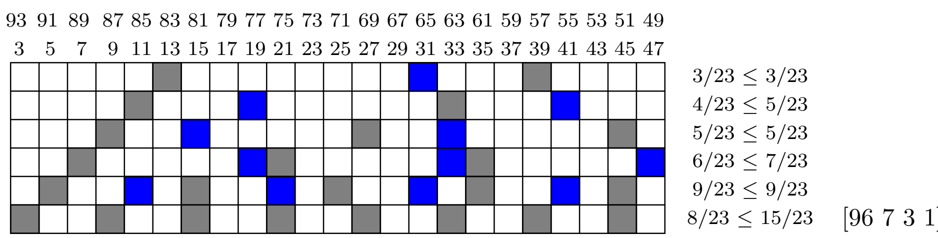
[88 4 1 1]

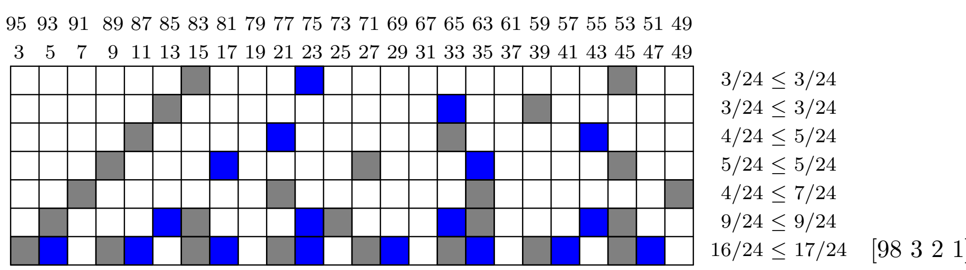


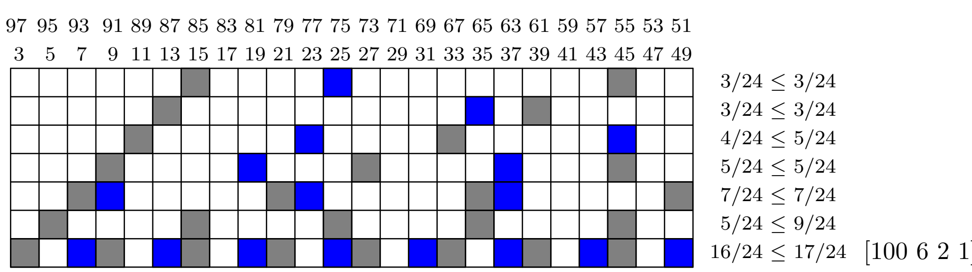
[90 9 4 1]


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3/22 ≤ 3/22
4/22 ≤ 5/22
5/22 ≤ 5/22
6/22 ≤ 7/22
9/22 ≤ 9/22
15/22 ≤ 15/22
[92 4 1 1]


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23 ≤ 3/23
4/23 ≤ 5/23
5/23 ≤ 5/23
6/23 ≤ 7/23
9/23 ≤ 9/23
15/23 ≤ 15/23
[94:P 5 2 1]


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23 ≤ 3/23
4/23 ≤ 5/23
5/23 ≤ 5/23
6/23 ≤ 7/23
9/23 ≤ 9/23
8/23 ≤ 15/23
[96 7 3 1]


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24 ≤ 3/24
3/24 ≤ 3/24
4/24 ≤ 5/24
5/24 ≤ 5/24
4/24 ≤ 7/24
9/24 ≤ 9/24
16/24 ≤ 17/24
[98 3 2 1]


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24 ≤ 3/24
3/24 ≤ 3/24
4/24 ≤ 5/24
5/24 ≤ 5/24
7/24 ≤ 7/24
5/24 ≤ 9/24
16/24 ≤ 17/24
[100 6 2 1]

Annexe 3 : résultat du calcul des $f(2x, k)$, k compris entre 1 et le nombre de lignes de la grille associée à $2x$

24 : 2 2 1	52 : 8 5 3 2 2	80 : 13 4 5 4 3 3
26 : 4 2 1	54 : 5 5 3 2 2	82 : 13 8 5 4 3 3
28 : 4 2 1	56 : 9 5 2 3 2	84 : 7 8 3 4 3 3
30 : 3 2 2	58 : 9 5 4 3 2	86 : 14 8 6 4 3 3
32 : 5 3 2 1	60 : 5 3 4 3 2	88 : 14 8 6 4 2 3
34 : 5 3 2 1	62 : 10 6 4 3 2	90 : 8 5 6 3 4 3
36 : 3 3 2 1	64 : 10 6 4 3 2	92 : 15 9 6 5 4 3
38 : 6 3 2 2	66 : 6 6 4 3 2	94 : 15 9 6 5 4 3
40 : 6 2 2 2	68 : 11 6 4 3 3	96 : 8 9 6 5 4 3
42 : 4 4 2 2	70 : 11 4 3 3 3	98 : 16 9 4 5 4 3 3
44 : 7 4 3 2	72 : 6 7 5 2 3 2	100 : 16 5 7 5 4 3 3
46 : 7 4 3 2	74 : 12 7 5 4 3 2	
48 : 4 4 3 2	76 : 12 7 5 4 3 2	
50 : 8 3 3 2 2	78 : 7 7 5 4 3 2	

Annexe 4 : résultat du calcul des $majorant(2x, k)$, k compris entre 1 et le nombre de lignes de la grille associée à $2x$

24 : 3 3 1	52 : 9 5 3 3 3	80 : 13 7 5 5 3 3
26 : 5 3 1	54 : 9 5 3 3 3	82 : 13 9 5 5 3 3
28 : 5 3 1	56 : 9 5 3 3 3	84 : 13 9 5 5 3 3
30 : 5 3 3	58 : 9 5 5 3 3	86 : 15 9 7 5 3 3
32 : 5 3 3 1	60 : 9 5 5 3 3	88 : 15 9 7 5 3 3
34 : 5 3 3 1	62 : 11 7 5 3 3	90 : 15 9 7 5 5 3
36 : 5 3 3 1	64 : 11 7 5 3 3	92 : 15 9 7 5 5 3
38 : 7 3 3 3	66 : 11 7 5 3 3	94 : 15 9 7 5 5 3
40 : 7 3 3 3	68 : 11 7 5 3 3	96 : 15 9 7 5 5 3
42 : 7 5 3 3	70 : 11 7 5 3 3	98 : 17 9 7 5 5 3 3
44 : 7 5 3 3	72 : 11 7 5 3 3 3	100 : 17 9 7 5 5 3 3
46 : 7 5 3 3	74 : 13 7 5 5 3 3	
48 : 7 5 3 3	76 : 13 7 5 5 3 3	
50 : 9 5 3 3 3	78 : 13 7 5 5 3 3	

Annexe 5 : Ensembles $Probas(2x)$ et valeur de poincaré$(2x)$ pour $2x$ compris entre 24 et 100

$Probas(24) = \left\{\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right\}.$
$poincaré(24) = 0.872.$

$\text{Probas}(26) = \left\{\frac{5}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right\}.$
$poincaré(26) = 0.930556.$

$\text{Probas}(28) = \left\{\frac{5}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right\}.$
$poincaré(28) = 0.930556.$

$\text{Probas}(30) = \left\{\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right\}.$
$poincaré(30) = 0.906706.$

$\text{Probas}(32) = \left\{\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right\}.$
$poincaré(32) = 0.920033.$

$\text{Probas}(34) = \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right\}.$
$poincaré(34) = 0.871826.$

$\text{Probas}(36) = \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right\}.$
$poincaré(36) = 0.871826.$

$\text{Probas}(38) = \left\{\frac{7}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}\right\}.$
$poincaré(38) = 0.934156.$

$\text{Probas}(40) = \left\{\frac{7}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}\right\}.$
$poincaré(40) = 0.934156.$

$\text{Probas}(42) = \left\{\frac{7}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right\}.$
$poincaré(42) = 0.9265.$

$\text{Probas}(44) = \left\{\frac{7}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right\}.$
$poincaré(44) = 0.9265.$

$\text{Probas}(46) = \left\{\frac{7}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right\}.$
$poincaré(46) = 0.895089.$

$\text{Probas}(48) = \left\{\frac{7}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right\}.$
$poincaré(48) = 0.895089.$

$\text{Probas}(50) = \left\{\frac{9}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}\right\}.$
$poincaré(50) = 0.938477.$

$\text{Probas}(52) = \left\{\frac{9}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}\right\}.$
$poincaré(52) = 0.938477.$

$\text{Probas}(54) = \left\{\frac{9}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right\}.$
$poincaré(54) = 0.913815.$

$\text{Probas}(56) = \left\{\frac{9}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right\}.$
$poincaré(56) = 0.913815.$

$\text{Probas}(58) = \left\{\frac{9}{14}, \frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right\}.$
$poincaré(58) = 0.908883.$

$\text{Probas}(60) = \left\{\frac{9}{14}, \frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right\}.$
$poincaré(60) = 0.908883.$

$\text{Probas}(62) = \left\{\frac{11}{15}, \frac{7}{15}, \frac{5}{15}, \frac{3}{15}, \frac{3}{15}\right\}.$
$poincaré(62) = 0.939319.$

$\text{Probas}(64) = \left\{\frac{11}{15}, \frac{7}{15}, \frac{5}{15}, \frac{3}{15}, \frac{3}{15}\right\}.$
$poincaré(64) = 0.939319.$

$\text{Probas}(66) = \left\{\frac{11}{16}, \frac{7}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right\}.$
$poincaré(66) = 0.92022.$

$\text{Probas}(68) = \left\{\frac{11}{16}, \frac{7}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right\}.$
$poincaré(68) = 0.92022.$

Probas(70) $= \left\{ \frac{11}{17}, \frac{7}{17}, \frac{5}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17} \right\}.$
poincaré(70) = 0.90061.

Probas(72) $= \left\{ \frac{11}{17}, \frac{7}{17}, \frac{5}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17} \right\}.$
poincaré(72) = 0.918149.

Probas(74) $= \left\{ \frac{13}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18}, \frac{3}{1}\ 8, \frac{3}{18}.\right.$
poincaré(74) = 0.938511.

Probas(76) $= \left\{ \frac{13}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18}, \frac{3}{18}, \frac{3}{18} \right\}.$
poincaré(76) = 0.938511.

Probas(78) $= \left\{ \frac{13}{19}, \frac{7}{19}, \frac{5}{19}, \frac{5}{19}, \frac{3}{19}, \frac{3}{19} \right\}.$
poincaré(78) = 0.92321.

Probas(80) $= \left\{ \frac{13}{19}, \frac{7}{19}, \frac{5}{19}, \frac{5}{19}, \frac{3}{19}, \frac{3}{19} \right\}.$
poincaré(80) = 0.92321.

Probas(82) $= \left\{ \frac{13}{20}, \frac{9}{20}, \frac{5}{20}, \frac{5}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20} \right\}.$
poincaré(82) = 0.921767.

Probas(84) $= \left\{ \frac{13}{20}, \frac{9}{20}, \frac{5}{20}, \frac{5}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20} \right\}.$
poincaré(84) = 0.921767.

Probas(86) $= \left\{ \frac{15}{21}, \frac{9}{21}, \frac{7}{21}, \frac{5}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21} \right\}.$
poincaré(86) = 0.939073.

Probas(88) $= \left\{ \frac{15}{21}, \frac{9}{21}, \frac{7}{21}, \frac{5}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21} \right\}.$
poincaré(88) = 0.939073.

Probas(90) $= \left\{ \frac{15}{22}, \frac{9}{22}, \frac{7}{22}, \frac{5}{22}, \frac{5}{22}, \frac{3}{22} \right\}.$
poincaré(90) = 0.933893.

Probas(92) $= \left\{ \frac{15}{22}, \frac{9}{22}, \frac{7}{22}, \frac{5}{22}, \frac{5}{22}, \frac{3}{22} \right\}.$
poincaré(92) = 0.933893.

Probas(94) $= \left\{ \frac{15}{23}, \frac{9}{23}, \frac{7}{23}, \frac{5}{23}, \frac{5}{23}, \frac{3}{23} \right\}.$
poincaré(94) = 0.921558.

Probas(96) $= \left\{ \frac{15}{23}, \frac{9}{23}, \frac{7}{23}, \frac{5}{23}, \frac{5}{23}, \frac{3}{23} \right\}.$
poincaré(96) = 0.921558.

Probas(98) $= \left\{ \frac{17}{24}, \frac{9}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24} \right\}.$
poincaré(98) = 0.938041.

Probas(100) $= \left\{ \frac{17}{24}, \frac{9}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24} \right\}.$
poincaré(100) = 0.938041.

Une fonction de comptage liée à la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

7/8/9

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

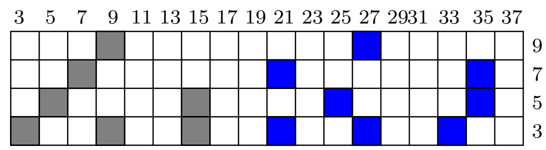
Les deux éléments essentiels qui nous ont permis d'aboutir aux idées qui sont présentées ici sont à rechercher tout d'abord dans l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* dans lequel celui-ci présente une fonction récursive qui permet de calculer la somme des diviseurs d'un entier. D'autre part, nous nous sommes appuyés sur un domaine habituellement appelé l'arithmétique des tissus, dont Edouard Lucas est à l'origine et qui consiste à représenter les caractères de divisibilité des nombres comme les mailles colorées de pièces de tissus (penser au Jacquard), ce qui en facilite la visualisation, l'appréhension. Il s'agissait de mettre au point une méthode qui permettrait de borner inférieurement le nombre des décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné[2].

2 Fondations

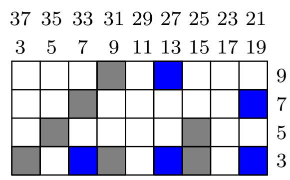
Présentons tout d'abord un exemple qui va montrer précisément ce que nous avions l'intention de compter. Considérons pour cela le nombre pair 40. Lorsque l'on cherche ses décomposants de Goldbach (i.e. les nombres premiers dont il est la somme), il suffit de s'intéresser aux nombres impairs dont il est la somme et étudier les caractères de divisibilité de chacun d'eux. On représente cela sur une "trame de tissu". On décide par convention de représenter la divisibilité des nombres inférieurs ou égaux à $x = 20$ par des cases grises et la divisibilité des nombres supérieurs à x par des cases bleues.

[1] La conjecture ayant été vérifiée par ordinateur jusqu'à des nombres très grands, notre analyse considèrera les nombres pairs supérieurs ou égaux à 24. En référence à cet article d'Euler qui nous a été très utile, on aurait pu appeler cette note *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport au nombre de leurs décomposants de Goldbach"*.

[2] Ici, on dira que le couple (p, q) est un décomposant de Goldbach de $2x$ si $2x = p + q$ avec p et q deux nombres premiers.



Choisissons maintenant de “plier le tissu en deux” et d’en ramener toutes les cases sur la moitié gauche du tissu, on obtiendra par symétrie autour de l’axe central le tissu suivant.



Il faut être attentif aux éléments suivants : notons la diagonale de cases grises à l’extrémité gauche de la grille initiale (cette diagonale grise représente le fait qu’un nombre est divisible par lui-même) ; si, par pliage, des cases bleues se retrouvaient en-deçà de cette diagonale, on décide de les oublier (de ne pas colorer en bleu les cases qui, par symétrie, se seraient retrouvées à gauche de la diagonale de cases grises - ici par exemple, la dernière case bleue de la troisième ligne de la grille initiale). D’autre part, le pliage peut être amené à faire coïncider des cases bleues et des cases grises, le comptage que nous allons présenter maintenant les oubliera aussi.

On comprend immédiatement que les colonnes ne contenant aucune case colorée vont correspondre à certaines décompositions de Goldbach puisqu’elles sont indicées par des entêtes de colonne correspondant à deux nombres impairs dont ni l’un ni l’autre ne sont divisibles par l’un des nombres impairs compris entre 3 et $2.\lfloor\sqrt{x}\rfloor + 1$.

Si l’on s’intéresse maintenant à la suite des nombres pairs de 12 à 100 et que l’on associe à chacun d’eux un tissu plié, on va découvrir les régularités suivantes : intéressons-nous seulement aux cases colorées des premières lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 3, à partir du nombre 12, et comptons-les : on obtiendra la séquence de nombres suivante : 1,2,2,2,3,3,2,4,4,3,5,5,3,6,6,4,7,7,etc. On reconnaît un *motif* qui va pouvoir être défini très aisément par une fonction récursive. Intéressons-nous ensuite seulement aux cases colorées des deuxièmes lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 5, à partir du nombre 20 (au lieu du nombre 12). On obtient des valeurs identiques pour la séquence de nombres obtenue à celles de la première séquence (pour la divisibilité par 3) mais on n’a pas les mêmes occurences pour les nombres obtenus. On obtient : 1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,2,4,4,4,4,3,5,5,5,5,3,6,6,6,6,4,7,7,7,7,etc. Les nombres pour lesquels on trouve le nombre 1 qui initie la séquence sont identifiés comme étant de la forme $4(2k + 1)$ (k étant strictement positif, il s’agit des nombres 12, 20, 28, 36, etc).

Les valeurs successives apparaissent dans le même ordre pour tout k. Seul change le nombre d’éléments intermédiaires, qui font reconnaître des motifs de longueur $2(2k+1)$ pour les nombres pairs compris entre $4i(2k+1)$ et $4(i+1)(2k+1)$. Ces motifs sont de la forme suivante :

$$n\,\underbrace{2n\ldots 2n}_{2k\ \text{fois}}\,n+1\,\underbrace{2n+1\ldots 2n+1}_{2k\ \text{fois}}$$

En annexe 2 sont fournies toutes les grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100. On observe que les lignes contiennent soit uniquement des cases grises, soit une alternance dans cet ordre de cases l'une grise, l'une bleue, la dernière case colorée d'une ligne pouvant être soit grise, soit bleue. Lors du passage d'une grille à la suivante, les cases grises ne changent pas de position alors qu'on a l'impression visuelle que les cases bleues se décalent d'un rang à droite, se "cachant" régulièrement derrière les cases grises, ce qui correspond au fait que les nombres impairs compris entre x et $2x$ se décalent d'un rang à droite dans les grilles.

Les nombres de lignes et de colonnes de chaque grille sont définis de la façon suivante :

- nombre de lignes de la grille associée à 2x = $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ (il augmente de 1 à chaque fois que 2x est le double d'un carré)
- nombre de colonnes de la grille associée à 2x= $\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor$ (il augmente de 1 une fois sur deux)

Ces analyses nous ont permis de découvrir la fonction récursive binaire $f(y,k)$ définie de la façon suivante pour k variant de 1 à l'infini :

Définition 2.1 (Définition de la fonction binaire f)

$$f(2x+2,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2x \ \leq \ 8k+4 \\ 2.f(2x,k) & \text{si } 2x \ \equiv \ 0 \ (mod\ 8k+4) \\ 2.f(2x,k)-1 & \text{si } 2x \ \equiv \ 4k+2 \ (mod\ 8k+4) \\ (f(2x,k)+1)/2 & \text{si } 2x+2 \ \equiv \ 0 \ (mod\ 8k+4) \\ (f(2x,k)+2)/2 & \text{si } 2x+2 \ \equiv \ 4k+2 \ (mod\ 8k+4) \\ f(2x,k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.2 (Calcul du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$\sum_{\substack{1 \ \leq \ i \ \leq \ \lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor \\ i\geq k}} (2k+1 \mid 2i+1) \vee (2k+1 \mid 2x-2i-1)$$

Il est important de bien noter deux choses : sous le signe Sigma de la somme, le $i \geq k$ correspond à l'élimination des cases bleues qui par symétrie se retrouvent en-deçà de la diagonale de cases grises à l'extrême gauche. C'est d'autre part à cause du $\vee$ booléen que, lorsque les cases bleues et les cases grises "coïncident" par pliage, sous prétexte que 2k+1 divise 2x, on ne compte qu'une case au lieu de deux (car $1 \vee 1 = 1$ dans l'algèbre de Boole). Ces remarques sont importantes car elles expriment toute la distinction qu'il y a entre la méthode présentée ici et les méthodes habituelles telles que le crible d'Erathosthène.

Pour améliorer la lisibilité de la démonstration à venir, on notera $Sigma_{2x}$ le résultat du calcul du nombre de divisibles effectué par la définition 2.2.

Théorème 2.1 (f compte bien les divisibles par $2k+1$)

$$\forall\ k\ tel\ que\ 1\ \leq\ k\ \leq\ \lfloor\sqrt{x}\rfloor, f(2x,k) = \sum_{\substack{1\ \leq\ i\ \leq\ \lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor \\ i\geq k}} (2k{+}1 \mid 2i{+}1)\vee(2k{+}1 \mid 2x{-}2i{-}1)$$

Démonstration par récurrence sur $2x$:
1) Vrai pour $2x = 24$.
2) Si vrai pour $2x$ alors vrai pour $2x+2$:
Pour chacun des 6 cas différents de valeurs pour $f(2x+2,k)$ identifiés seront fournis deux exemples pour fixer les idées.

- cas 1 :
  si $2x\ \leq\ 8k+4$ alors $f(2x+2,k)\ =\ 1$

  exemple 1 : $2x\ =\ 24,\ k\ =\ 3,\ f(24,3)\ =\ 1$, on compte là les divisibles par 7 ($=\ 2k+1\ =\ 2.3+1$) et 24 étant inférieur à $28\ =\ 4.7$, seul 7 est à compter (21 dont le complémentaire à 24 est 3 qui est inférieur à 7 n'est pas comptabilisé car il se retrouve en-deçà de la diagonale de cases grises).

21	19	17	15	13
3	5	7	9	11

  exemple 2 : $2x\ =\ 36,\ k\ =\ 4,\ f(36,4)\ =\ 1$, on compte là les divisibles par 9 ($=\ 2k+1\ =\ 2.4+1$) et $36\ =\ 4.9$, 9 et 27 sont divisibles par 9 et "coïncident".

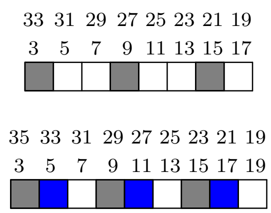
33	31	29	27	25	23	21	19
3	5	7	9	11	13	15	17

  Ce cas est utilisé seulement pour calculer f(24,3), f(26,3), f(28,3), f(32,4), f(34,4) et f(36,4). Pour les nombres pairs supérieurs ou égaux à 38, si $2x$ est de la forme $8k+4$ alors $\sqrt{x} \leq k$ et on n'utilise donc plus ce cas. On vérifie de manière évidente que pour les 6 images spécifiées, f calcule bien ce qu'elle doit calculer (se reporter aux grilles correspondantes en annexe 2).

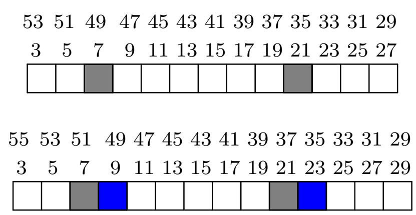
- cas 2 :
  Les cas 2 à 6 présentés ci-dessous sont, pour k fixé, exclusifs les uns des autres.

  si $2x\ \equiv\ 0\ (mod\ 8k+4)$ alors $f(2x+2,k)\ =\ 2.f(2x,k)$

exemple 3 : $2x = 36$, $k = 1$, $f(36,1) = 3$, on compte là les divisibles par 3 ($= 2k+1 = 2.1+1$). $f(2x+2,1) = f(38,2) = 6$.



exemple 4 : $2x = 56$, $k = 3$, $f(56,3) = 2$, on compte là les divisibles par 7 ($= 2k+1 = 2.3+1$). $f(2x+2,3) = f(58,3) = 4$.



Dans ce cas, le nombre de colonnes est toujours augmenté de 1 lors du passage de $2x$ à $2x+2$ car si $2x \equiv 0 \ (mod\ 8k+4)$, $2x$ est un double de pair, donc il est dans la dernière colonne somme de deux impairs dont la différence est 2 (et non de deux impairs égaux).

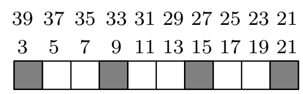
Lors du passage de $2x$ à $2x+2$, une case bleue qui "coïncidait" avec chaque case grise en "sort" par la droite, doublant ainsi le nombre de cases colorées de la ligne.

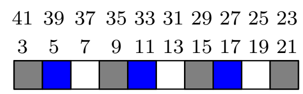
Le nombre de cases non colorées à l'extrémité droite de la ligne associée à $2x$ est la moitié k du nombre de cases non colorées que l'on trouve habituellement entre deux cases grises successives de la ligne de divisibilité associé à $2x+2$ qui vaut $2k$.

Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x}{4k+2}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x}{2k+1}$. Pour bien comprendre pourquoi les $Sigma$ prennent ces valeurs, amener mentalement à l'extrémité droite de la grille les cases blanches qui étaient au bout à l'extrémité gauche de la grille (en n'omettant pas une colonne fictive correspondant à la somme d'impairs $2x = 1 + (2x-1)$). Ces cases blanches sont alors au nombre de k. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x+2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = 2.Sigma_{2x}$.

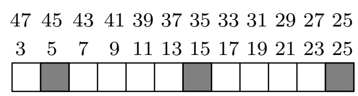
- cas 3 :
  si $2x \equiv 4k+2 \ (mod\ 8k+4)$ alors $f(2x+2,k) = 2.f(2x,k) - 1$

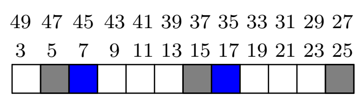
exemple 5 : $2x = 42$, $k = 1$, $f(42, 1) = 4$, on compte là les divisibles par 3 ($= 2k + 1 = 2.1 + 1$). $f(2x + 2, 1) = f(44, 1) = 7$.





exemple 6 : $2x = 50$, $k = 2$, $f(50, 2) = 3$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k + 1 = 2.2 + 1$). $f(2x + 2, 2) = f(52, 2) = 5$.





Dans ce cas, le nombre de colonnes reste le même lors du passage de $2x$ à $2x + 2$ car si $2x \equiv 4k + 2 \ (mod\ 8k + 4)$, $2x$ est un double d'impair, donc il est dans la dernière colonne somme de deux impairs égaux.

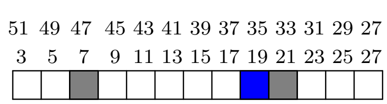
Il y a une case grise dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x$, qui est conservée dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x + 2$.

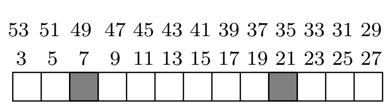
Une case bleue "sort" à droite de chaque case grise, sauf à droite de la dernière case grise de la ligne.

Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x+2k+1}{4k+2}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x}{2k+1}$. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x + 2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = 2.Sigma_{2x} - 1$.

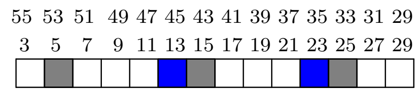
- cas 4 :

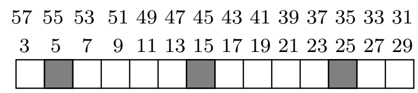
si $2x + 2 \equiv 0 \ (mod\ 8k + 4)$ alors $f(2x + 2, k) = (f(2x, k) + 1)/2$
exemple 9 : $2x = 54$, $k = 3$, $f(54, 3) = 3$, on compte là les divisibles par 7 ($= 2k + 1 = 2.3 + 1$). $f(2x + 2, 3) = f(56, 3) = 2$.





exemple 10 : $2x = 58$, $k = 2$, $f(58, 2) = 5$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k + 1 = 2.2 + 1$). $f(2x + 2, 2) = f(60, 2) = 3$.



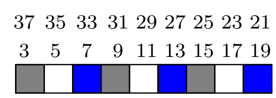


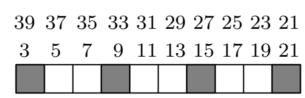
Dans ce cas, le nombre de colonnes reste le même lors du passage de $2x$ à $2x + 2$ car si $2x + 2 \equiv 0$ (mod $8k + 4$), $2x$ est un double d'impair, donc il est dans la dernière colonne somme de deux impairs égaux.

Le nombre de cases non colorées à l'extrémité droite de la ligne associée à $2x + 2$ est la moitié k du nombre de cases non colorées que l'on trouve habituellement entre deux cases grises successives de la ligne de divisibilité associé à $2x$ qui vaut $2k$.

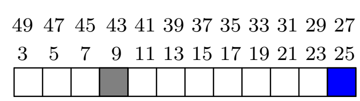
Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x-2k}{2k+1}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x+1}{4k+2}$. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x + 2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = (Sigma_{2x} + 1)/2$.

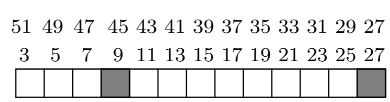
- cas 5 :
  si $2x + 2 \equiv 4k + 2$ (mod $8k + 4$) alors $f(2x + 2, k) = (f(2x, k) + 2)/2$
  exemple 7 : $2x = 40$, $k = 1$, $f(40, 1) = 6$, on compte là les divisibles par 3 ($= 2k + 1 = 2.1 + 1$). $f(2x + 2, 1) = f(42, 1) = 4$.





exemple 8 : $2x = 52$, $k = 4$, $f(52, 4) = 2$, on compte là les divisibles par 9 ($= 2k + 1 = 2.4 + 1$). $f(2x + 2, 4) = f(54, 4) = 2$.





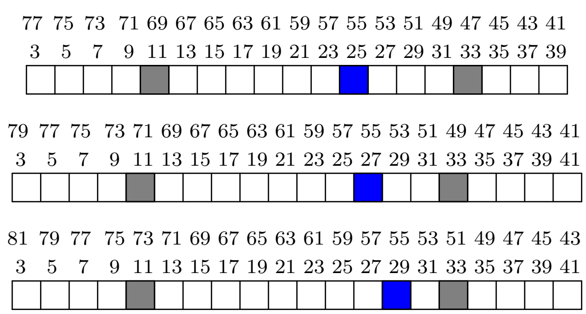
Dans ce cas, le nombre de colonnes est toujours augmenté de 1 lors du passage de $2x$ à $2x+2$ car si $2x+2 \equiv 4k+2 \ (mod\ 8k+4)$, $2x+2$ est un double d'impair, donc $2x$ est dans la dernière colonne somme de deux impairs dont la différence est 2.

Il y a une case bleue dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x$, qui devient une case grise dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x+2$.

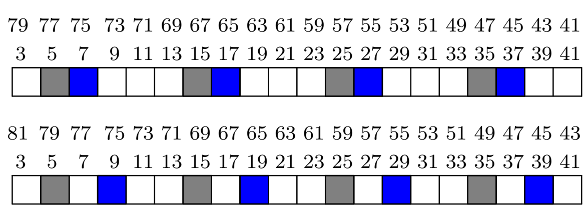
Lors du passage de $2x$ à $2x+2$, chaque case bleue à gauche d'une case grise "se cache" derrière la case grise en question. Il n'y a pas de case bleue à gauche de la première case grise de la ligne. Dans la ligne associée à $2x$, $2x+2 \equiv 4k+2 \ (mod\ 8k+4)$ a pour conséquence que la dernière colonne est occupée par une case bleue. La formule permet bien le compte exact de ce qui doit être compté.

Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x-2k}{2k+1}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x-2k}{4k+2}+1$. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x+2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = (Sigma_{2x}+2)/2$.

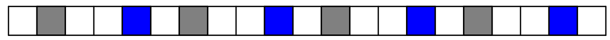
- cas 6 :
  si aucune des conditions spécifiées ci-dessus n'est vérifiée
  alors $f(2x+2,k) = f(2x,k)$
  exemple 11 : $2x = 80$, $k = 5$, $f(80,5) = 3$, on compte là les divisibles par 11 ($= 2k+1 = 2.5+1$). $f(2x+2,5) = f(82,5) = 3$.
  exemple 12 : $2x = 82$, $k = 5$, $f(82,5) = 3$, on compte là les divisibles par 11 ($= 2k+1 = 2.5+1$). $f(2x+2,5) = f(84,5) = 3$.



exemple 13 : $2x = 82$, $k = 2$, $f(82,2) = 8$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k+1 = 2.2+1$). $f(2x+2,5) = f(84,2) = 8$.
exemple 14 : $2x = 84$, $k = 2$, $f(84,2) = 8$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k+1 = 2.2+1$). $f(2x+2,5) = f(86,2) = 8$.



83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43



On n'est dans aucun des cas précédents : les cases bleues ne font qu'avancer dans les grilles, sans qu'aucune d'entre elles ne disparaissent ; le nombre de cases colorées reste constant.

3 Probabilités

Définition 3.1 (Définition de l'ensemble des probabilités associé à $2x$)

$$Probas(2x) = \left\{ \frac{f(2x,k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Rapporter ainsi les nombres $f(2x,k)$ au nombre de colonnes de la grille associée à $2x$ représente la probabilité qu'a chaque colonne de contenir une case colorée dans la ligne k (rappel : lorsque la deuxième coordonnée de la fonction f vaut k, on considère la divisibilité par $2k+1$).

Par exemple, f(88,2) = 8. Le nombre de colonnes de la grille associée à 88 est 21. Le rationnel $\frac{8}{21}$ représente la probabilité que l'une des colonnes (chaque colonne, on le rappelle, représente un couple d'impairs (p,q) supérieurs ou égaux à 3 dont la somme vaut 88) contienne au moins une case colorée, c'est à dire que p ou q soit un multiple de 5.

On a $Card(Probas(2x)) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Et, de fait, $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x)) + 1$ lorsque $2x+2$ est le double d'un carré, sinon $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x))$.

Définition 3.2 (Définition récursive de la formule de Poincaré)

$$\begin{cases} ProbaDisjonction(\emptyset) = 0. \\ ProbaDisjonction(\left\{\frac{p}{q}\right\} \cup E) = \frac{p}{q} + ProbaDisjonction(E) - \frac{p}{q}.ProbaDisjonction(E). \end{cases}$$

Définition 3.3 (Définition de la fonction *Poincaré*)

$$Poincaré(2x) = ProbaDisjonction(Probas(2x))$$

La fonction *ProbaDisjonction* qui a été définie ci-dessus correspond à ce que l'on a coutume d'appeler le principe d'inclusion / exclusion (ou formule de De Moivre, de Da Silva, du crible ou de Poincaré). La formulation mathématique de ce principe est :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

L'application de ce principe est nécessitée ici par le fait qu'on ne sait pas quelle case colorée d'une ligne se trouve partager une colonne avec une case colorée d'une autre ligne.

On va appliquer la formule aux ensembles de probabilités que l'on a identifiés pour trouver quelle est la probabilité que l'un de ces événements (qui représentent les caractères de divisibilité par les impairs successifs, et donc la nature d'être composé pour un nombre) advienne et nous multiplierons le complémentaire à 1 de cette probabilité par $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$, pour obtenir un nombre minorant le nombre de décomposants de Goldbach de $2x$.

La probabilité $Poincaré(2x)$ représente donc la probabilité qu'une décomposition de $2x$ comme somme de deux nombres impairs fasse intervenir un nombre composé et ne soit donc pas une décomposition de Goldbach de $2x$. En annexe 3, sont fournis les ensembles de probabilités $Probas(2x)$ pour $2x$ compris entre 24 et 100 et les valeurs de $Poincaré(2x)$ pour ces mêmes nombres pairs.

On note qu'une fois sur deux, le dénominateur des rationnels auxquels on applique la formule de Poincaré est augmenté de 1, ce qui nous fait appliquer la formule sur des nombres de plus en plus petits. On ne peut être sûr que le résultat ne croîtra pas trop, ce qui permettra, au-delà d'un certain nombre pair, d'obtenir toujours au moins un décomposant de Goldbach. On constate que pour les nombres pairs de 34 à 100, le résultat calculé est toujours supérieur ou égal à 1.

4 Spécificité de la formule de Poincaré dans le cas qui nous intéresse

Appliquons la formule de Poincaré à deux rationnels de même dénominateur : $\dfrac{p_1}{q}$ et $\dfrac{p_2}{q}$.
$\dfrac{p_1}{q} + \dfrac{p_2}{q} = \dfrac{p_1q + p_2q - p_1p_2}{q^2} = \dfrac{-p_1p_2 + (p_1 + p_2)q}{q^2}$. Si l'on note σ_2 le produit p_1p_2 et σ_1 la somme $p_1 + p_2$, le résultat s'écrit :

$$\frac{-\sigma_2 + q\sigma_1}{q^2}.$$

Effectuons un calcul similaire avec trois rationnels au lieu de deux : $\dfrac{p_1}{q}$, $\dfrac{p_2}{q}$ et $\dfrac{p_3}{q}$. Le résultat s'écrira :

$$\frac{+\sigma_3 - q\sigma_2 + q^2\sigma_1}{q^3}$$

avec σ_3 valant le produit des trois numérateurs, σ_2 valant la somme des produits des numérateurs pris deux à deux et σ_1 valant la somme des trois numérateurs.

Au niveau suivant, on a à effectuer le calcul :
$\frac{p_1p_2p_3 - q(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)+q^2(p_1+p_2+p_3)}{q^3} + \frac{p_4}{q} - \frac{p_4}{q} . \frac{p_1p_2p_3 - q(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)+q^2(p_1+p_2+p_3)}{q^3}$.

On obtient une somme de termes que l'on peut écrire symboliquement pour l'alléger de la manière suivante :

$$\frac{-\sigma_4 + q\sigma_3 - q^2\sigma_2 + q^3\sigma_1}{q^4}.$$

Au niveau 5, on aboutit à :

$$\frac{+\sigma_5 - q\sigma_4 + q^2\sigma_3 - q^3\sigma_2 + q^4\sigma_1}{q^5}.$$

On voit que si l'on souhaite majorer les résultats successifs des calculs, en ne se préoccupant que des termes des sommes qui sont précédés du signe $+$, ces termes sont toujours multipliés par des sommes de produits faisant intervenir un nombre impair de numérateurs.
Rappelons les connaissances dont on dispose :

- la définition récursive de la fonction f de calcul des divisibles qui fournit les numérateurs des fractions rationnelles représentant la probabilité de l'un des deux décomposants de $2x$ d'être composé (divisible par $2k+1$) ;
- le fait que les dénominateurs des fractions rationnelles sont augmentés de 1 tous les deux nombres pairs ;
- le fait que lorsque $2x$ est un carré, on ajoute à l'ensemble des probabilités une probabilité supplémentaire majorable par $2(\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4}\rceil) - 1$;
- les formules de calcul de la formule de Poincaré sur des ensembles de fractions rationnelles lorsqu'elles sont toutes de même dénominateur.

5 Conclusion

Si l'on arrive à démontrer[3] que $Poincaré(2x)$ est toujours inférieur ou égal à $\frac{x-4}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$, cela sera équivalent à $1 - Poincaré(2x) \geq \frac{2}{x-2}$ mais comme $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \geq \frac{x-2}{2}$, on aura alors $(1 - Poincaré(2x)\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \geq 1$, qui équivaut à $NombreDeDécomposantsDeGoldbach(2x) \geq 1$.

On arriverait alors à :

Théorème 5.1 (minoration du nombre de décomposants de Goldbach)

$$\forall\, 2x \geq 24,\ NombreDeDécomposantsDeGoldbach(2x) \geq (1 - Poincare(2x))\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$$

Théorème 5.2 (Conclusion)

$$\forall\, 2x \geq 34,\ NombreDeDécomposantsDeGoldbach(2x) \geq 1.$$

[3] ce que je ne sais pas faire.

Annexe 1 : Une nouvelle caractérisation des nombres premiers

Fournissons une nouvelle caractérisation des nombres premiers, qui est basée sur la fonction récursive f.

Définition 5.1 (Définition de l'ensemble des nombres exacts de divisibles associé à $2x$)

$$Exact(2x) = \left\{ f(2x,k), 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Définissons la fonction booléenne *Double* qui renvoie *vrai* si l'un des n-uplets est “un peu” le double de l'autre (i.e. les coordonnées de même position des deux n-uplets sont soit identiques, soit la seconde coordonnée est le double de la première).

Définition 5.2 (Définition de la fonction *Double*)

$$Double(2x,2y) \iff \begin{cases} Exact(2x) = (a_1,\ldots,a_m), \\ Exact(2y) = (b_1,\ldots,b_n), \\ \forall\ 1\ \leq i \leq\ min(m,n),\ a_i\ =\ b_i\ ou\ a_i\ =\ 2.b_i. \end{cases}$$

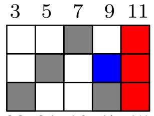
$Premier(x) \iff \exists\, k \geq 6, (\, x = 2k+1) \wedge (Double(Exact(2x), Exact(2x-2)))$.

Observons les grilles associées aux doubles de nombres premiers conjointement à celles du double de leur prédécesseur.

- nombre premier 13, Exact(24) = (2,2,1), Exact(26) = (4,2,1).

21 19 17 15 13

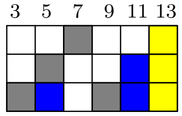
3 5 7 9 11



1/5
2/5
2/5

23 21 19 17 15 13

3 5 7 9 11 13

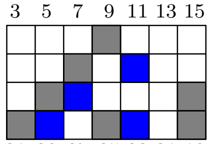


1/6
2/6
4/6

- nombre premier 17, Exact(32) = (5,3,2,1), Exact(34) = (5,3,2,1).

29 27 25 23 21 19 17

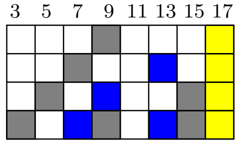
3 5 7 9 11 13 15



1/7
2/7
3/7
5/7

31 29 27 25 23 21 19 17

3 5 7 9 11 13 15 17

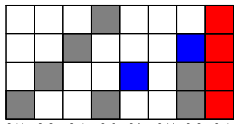


1/8
2/8
3/8
5/8

- nombre premier 19, Exact(36) = (3,3,2,1), Exact(38) = (6,3,2,2).

33 31 29 27 25 23 21 19

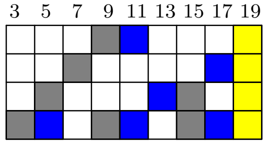
3 5 7 9 11 13 15 17



1/8
2/8
3/8
3/8

35 33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17 19

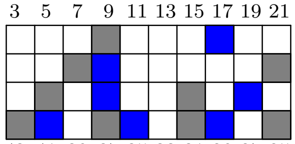


2/9
2/9
3/9
6/9

- nombre premier 23, Exact(44) = (7,4,3,2), Exact(46) = (7,4,3,2).

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

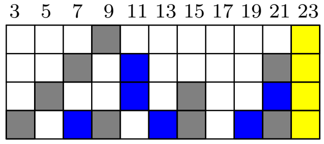
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



2/10
3/10
4/10
7/10

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

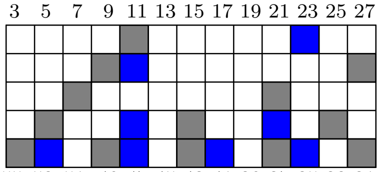


2/11
3/11
4/11
7/11

- nombre premier 29, Exact(56) = (9,5,2,3,2), Exact(58) = (9,5,4,3,2).

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

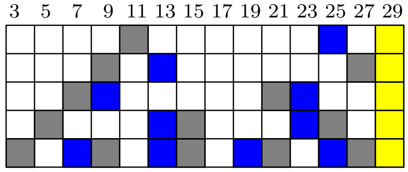
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



2/13
3/13
2/13
5/13
9/13

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

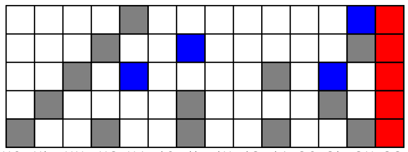


2/14
3/14
4/14
5/14
9/14

- nombre premier 31, Exact(60) = (5,3,4,3,2), Exact(62) = (10,6,4,3,2).

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

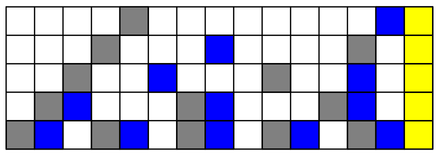
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



2/14
3/14
4/14
3/14
5/14

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

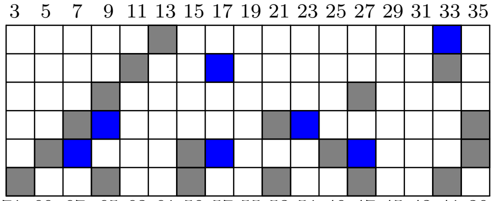


2/15
3/15
4/15
6/15
10/15

- nombre premier 37, Exact(72) = (6,7,5,2,3,2), Exact(74) = (12,7,5,4,3,2).

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37

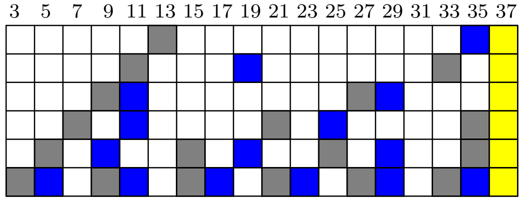
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35



2/17
3/17
2/17
5/17
7/17
6/17

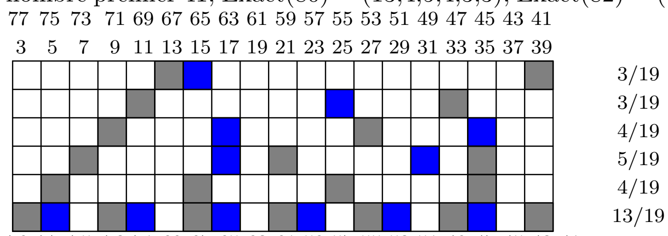
71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37

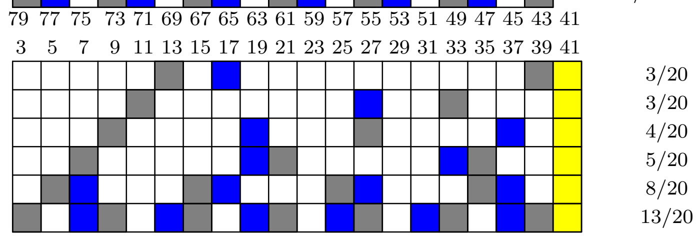
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37



2/18
3/18
4/18
5/18
7/18
12/18 [74:P 5 2 1]

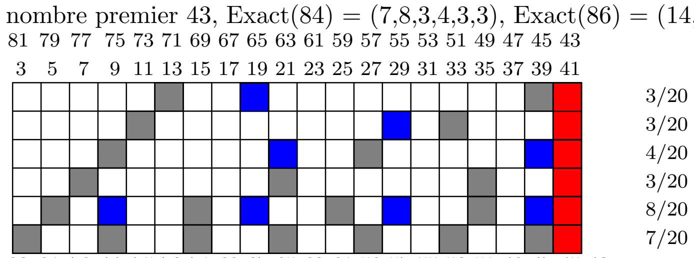
- nombre premier 41, Exact(80) = (13,4,5,4,3,3), Exact(82) = (13,8,5,4,3,3).



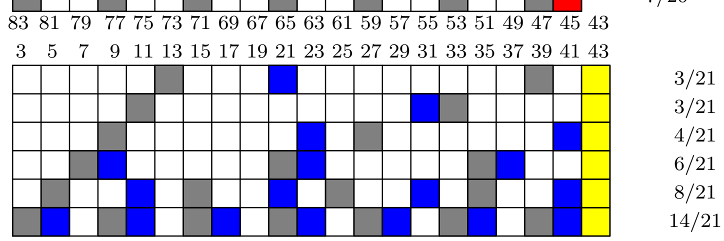


[82:P 5 3 1]

- nombre premier 43, Exact(84) = (7,8,3,4,3,3), Exact(86) = (14,8,6,4,3,3).

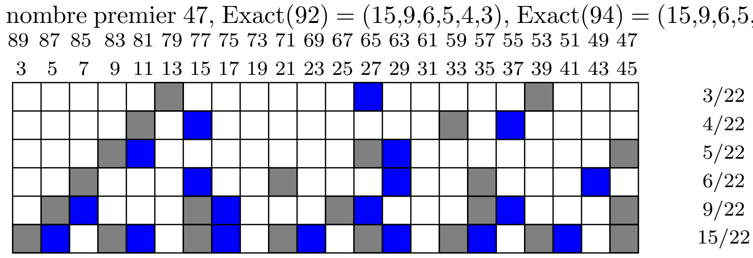


[84:J 6 5 3]

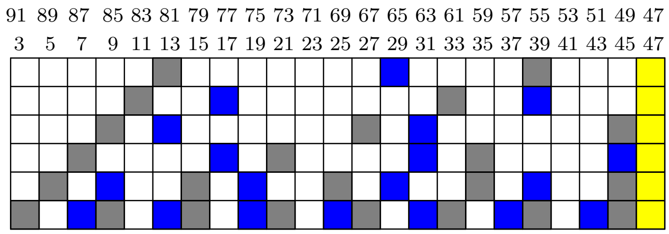


[86:P 5 2 1]

- nombre premier 47, Exact(92) = (15,9,6,5,4,3), Exact(94) = (15,9,6,5,4,3).



[92 4 2 1]



3/23
4/23
5/23
6/23
9/23
15/23 [94:P 5 3 2]

La caractérisation des nombres pairs compris entre deux nombres premiers jumeaux est similaire à la caractérisation des nombres premiers proposée ci-dessus : on définit une fonction $MoitiéDuSucc(2x, 2y)$ de la façon suivante :

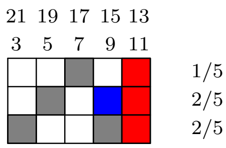
Définition 5.3 (Définition de la fonction $MoitiéDuSucc$)

$$MoitiéDuSucc(2x, 2y) \iff \begin{cases} Exact(2x) = (a_1, \ldots, a_m), \\ Exact(2y) = (b_1, \ldots, b_n), \\ \forall\, 1 \le i \le min(m, n),\ a_i = b_i \ ou\ a_i = \frac{1}{2}.(b_i + 1). \end{cases}$$

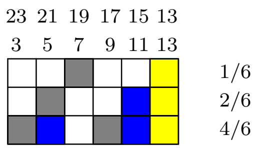
$$EntreJumeaux(x) \iff \exists\, k \ge 6, (\ x = 2k) \wedge (MoitiéDuSucc(Exact(2x), Exact(2x-2))).$$

Annexe 2 : Représentation graphique de certains décomposants de Goldbach

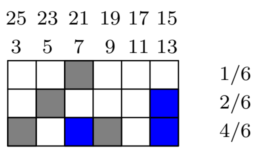
Les grilles ci-dessous sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 24 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ correspond à l'un des deux nombres impairs $2i+1$ et $2x-2i-1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). A droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (cela est représenté également par la coloration en jaune ou rouge de la dernière colonne qui ne présente ni case noire, ni case bleue). Puis sont fournies à droite des grilles d'une part les fractions rationnelles représentant pour chaque ligne la proportion de cases colorées en noir ou bleu, rapportée au nombre de colonnes de la grille. Enfin, à côté du nombre pair, on indique le nombre réel de décompositions de Goldbach de ce nombre, le nombre effectif de colonnes sans cases colorées de la grille, et le nombre de décomposants de Goldbach obtenu par minoration.



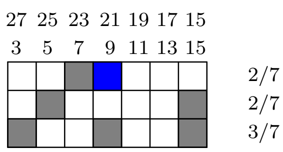
[24:J 3 1 1]



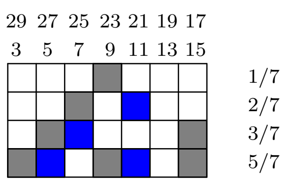
[26:P 3 1 1]



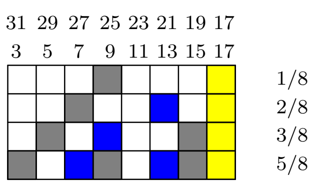
[28 2 1 1]



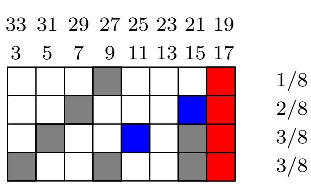
[30 3 2 2]



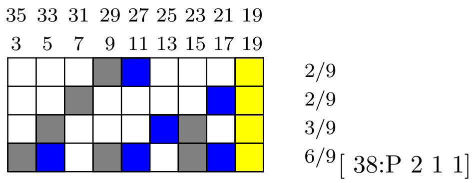
[32 2 1 0]

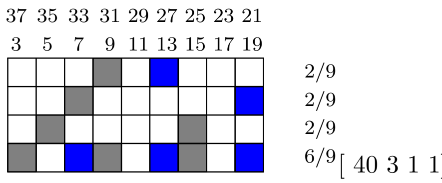


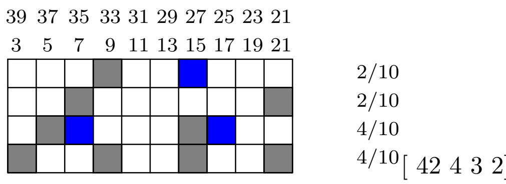
[34:P 4 2 1]

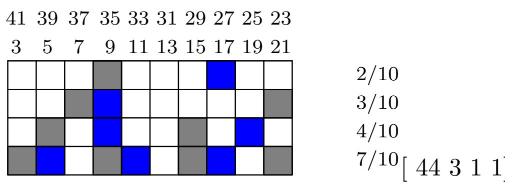


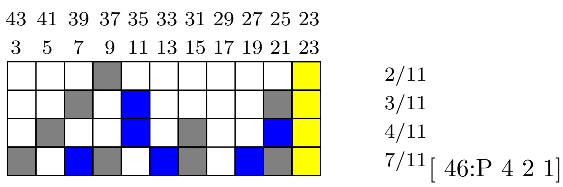
[36:J 4 2 2]

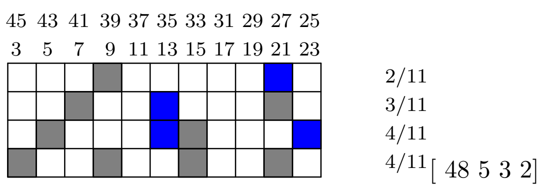

35 33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17 19
2/9
2/9
3/9
6/9 [38:P 2 1 1]

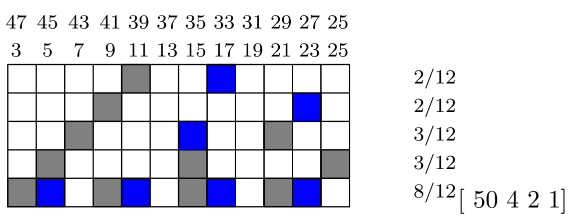

37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19
2/9
2/9
2/9
6/9 [40 3 1 1]

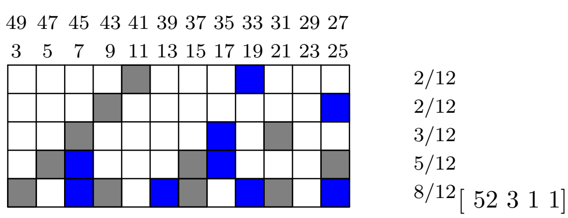

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21
2/10
2/10
4/10
4/10 [42 4 3 2]


41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21
2/10
3/10
4/10
7/10 [44 3 1 1]

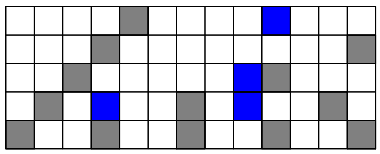

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23
2/11
3/11
4/11
7/11 [46:P 4 2 1]


45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23
2/11
3/11
4/11
4/11 [48 5 3 2]


47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
2/12
2/12
3/12
3/12
8/12 [50 4 2 1]

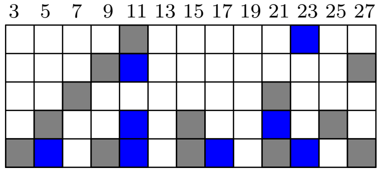

49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
2/12
2/12
3/12
5/12
8/12 [52 3 1 1]

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



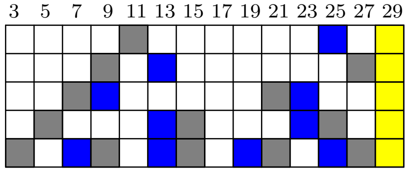
2/13
2/13
3/13
5/13
5/13[54 5 3 2]

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



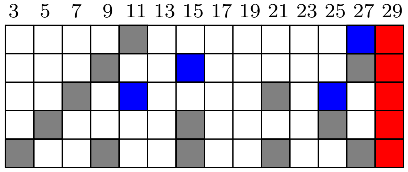
2/13
3/13
2/13
5/13
9/13[56 3 2 1]

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



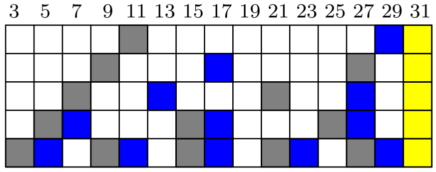
2/14
3/14
4/14
5/14
9/14[58:P 4 2 1]

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



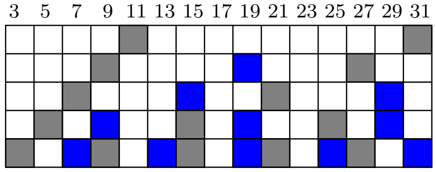
2/14
3/14
4/14
3/14
5/14[60:J 6 4 3]

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31



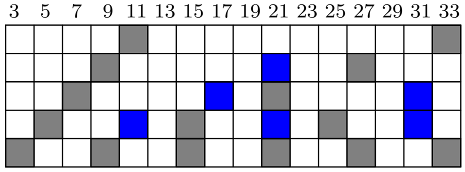
2/15
3/15
4/15
6/15
10/15[62:P 3 2 1]

61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

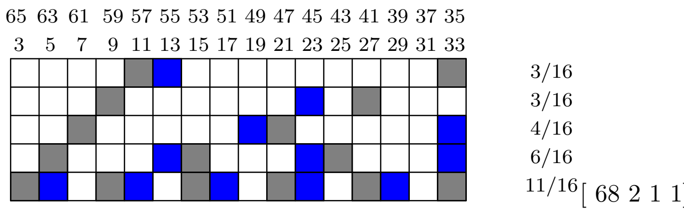


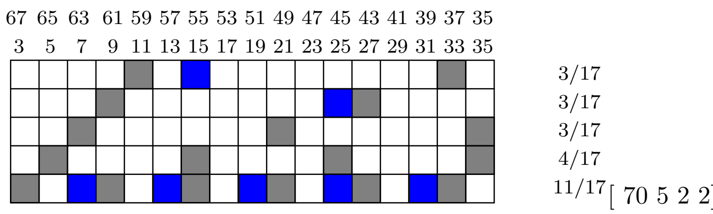
2/15
3/15
4/15
6/15
10/15[64 5 2 1]

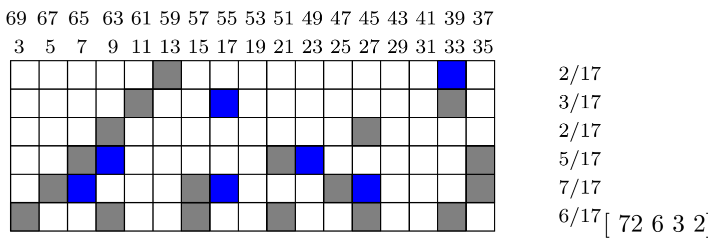
63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

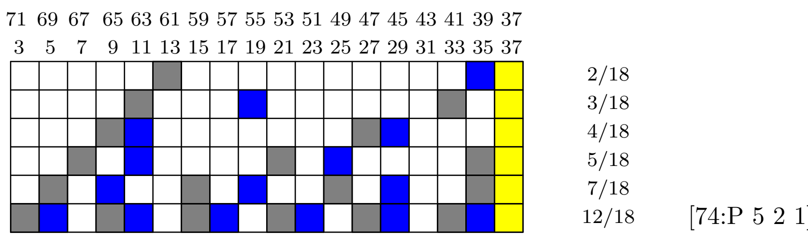


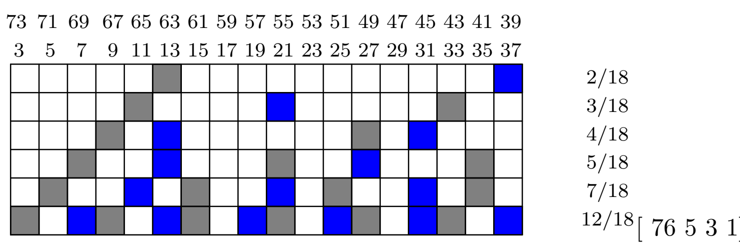
2/16
3/16
4/16
6/16
6/16[66 6 4 3]

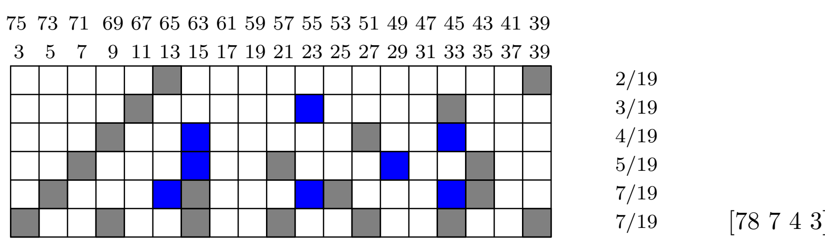

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
3/16
3/16
4/16
6/16
11/16 [68 2 1 1]


67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
3/17
3/17
3/17
4/17
11/17 [70 5 2 2]


69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
2/17
3/17
2/17
5/17
7/17
6/17 [72 6 3 2]

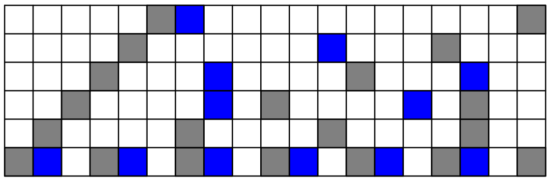

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18
3/18
4/18
5/18
7/18
12/18 [74:P 5 2 1]


73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18
3/18
4/18
5/18
7/18
12/18 [76 5 3 1]


75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
2/19
3/19
4/19
5/19
7/19
7/19 [78 7 4 3]

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41

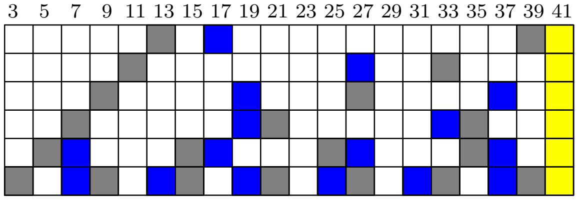
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39



3/19
3/19
4/19
5/19
4/19
13/19 [80 4 2 1]

79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41

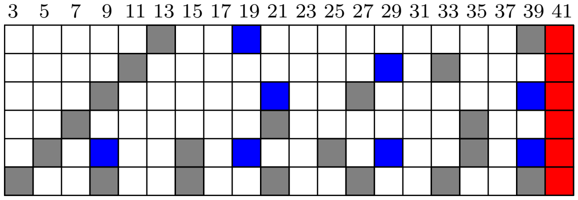
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41



3/20
3/20
4/20
5/20
8/20
13/20 [82:P 5 3 1]

81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43

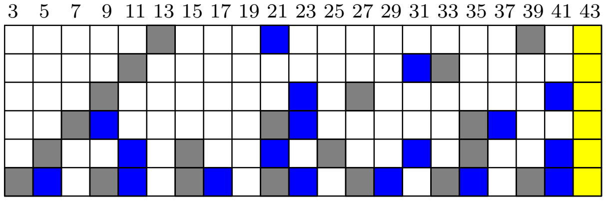
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41



3/20
3/20
4/20
3/20
8/20
7/20 [84:J 6 5 3]

83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43

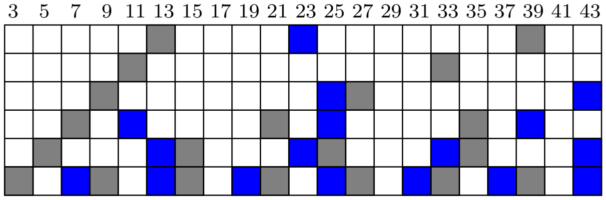
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43



3/21
3/21
4/21
6/21
8/21
14/21 [86:P 5 2 1]

85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45

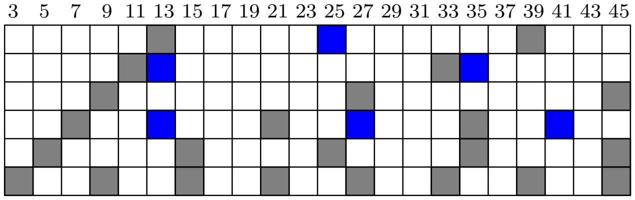
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43



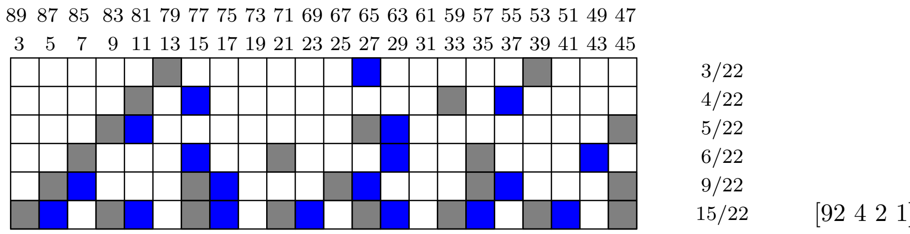
3/21
2/21
4/21
6/21
8/21
14/21 [88 4 3 1]

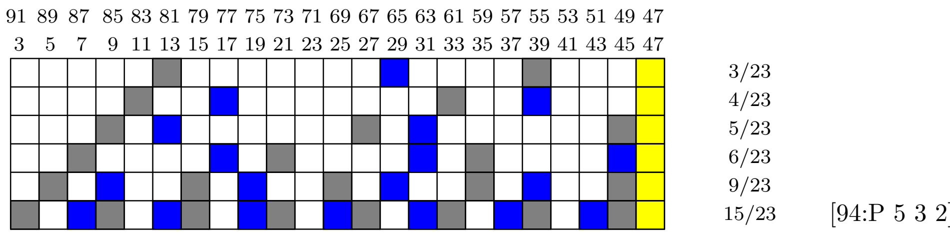
87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45

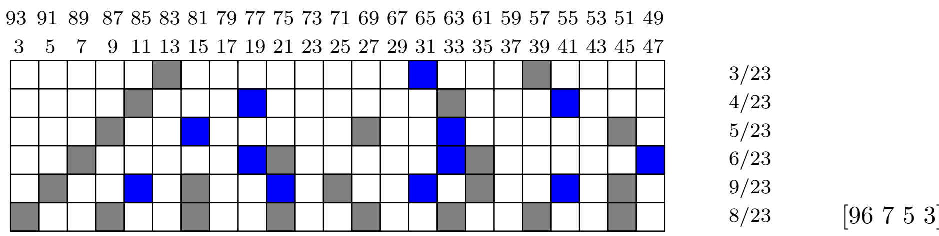
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45

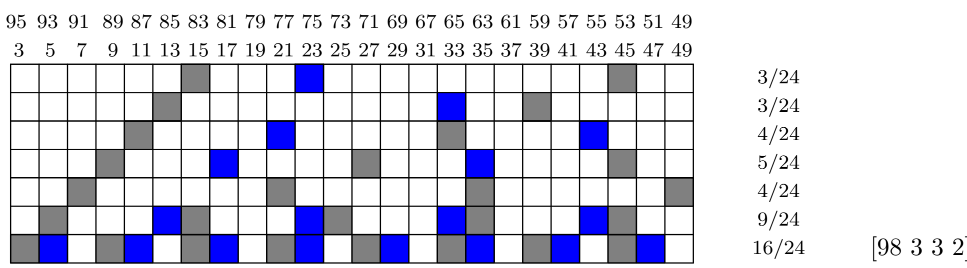


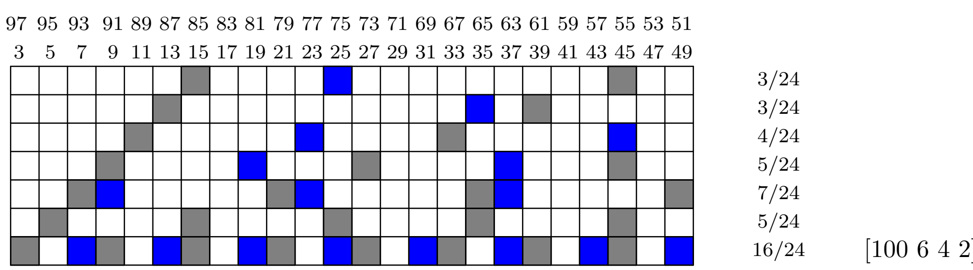
3/22
4/22
3/22
6/22
5/22
8/22 [90 9 6 4]


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3/22
4/22
5/22
6/22
9/22
15/22
[92 4 2 1]


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23
4/23
5/23
6/23
9/23
15/23
[94:P 5 3 2]


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23
4/23
5/23
6/23
9/23
8/23
[96 7 5 3]


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24
3/24
4/24
5/24
4/24
9/24
16/24
[98 3 3 2]


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24
3/24
4/24
5/24
7/24
5/24
16/24
[100 6 4 2]

Annexe 3 : Ensembles $Probas(2x)$, et leur valeur de Poincaré$(2x)$ comparée à $\frac{x-4}{x-2})pour\mathbf{2x}comprisentre\mathbf{24}et\mathbf{100}$

$Probas(24) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$.
$Poincaré(24) = 0.712$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{8}{10} = 0.8$.

Probas(26) $= \left\{\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right\}$.
$Poincaré(26) = 0.814815$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{9}{11} = 0.8181$.

Probas(28) $= \left\{\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right\}$.
$Poincaré(28) = 0.814815$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{10}{12} = 0.8333$.

Probas(30) $= \left\{\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right\}$.
$Poincaré(30) = 0.708455$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{11}{13} = 0.846153$.

Probas(32) $= \left\{\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right\}$.
$Poincaré(32) = 0.900042$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{12}{14} = 0.85714$.

Probas(34) $= \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.
$Poincaré(34) = 0.846191$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{13}{15} = 0.8666$.

Probas(36) $= \left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.
$Poincaré(36) = 0.743652$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{14}{16} = 0.875$.

Probas(38) $= \left\{\frac{6}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right\}$.
$Poincaré(38) = 0.865569$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{15}{17} = 0.8823$.

Probas(40) $= \left\{\frac{6}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right\}$.
$Poincaré(40) = 0.843164$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{16}{18} = 0.888888$.

Probas(42) $= \left\{\frac{4}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}\right\}$.
$Poincaré(42) = 0.7696$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{17}{19} = 0.894736$.

Probas(44) $= \left\{\frac{7}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right\}$.
$Poincaré(44) = 0.8992$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{18}{20} = 0.9$.

Probas(46) $= \left\{\frac{7}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right\}$.
$Poincaré(46) = 0.862304$.

$\frac{x-4}{x-2} = \frac{19}{21} = 0.904761.$

$\text{Probas}(48) = \left\{ \frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11} \right\}.$
$Poincaré(48) = 0.759033.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{20}{22} = 0.9090.$

$\text{Probas}(50) = \left\{ \frac{8}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{2}{12} \right\}.$
$Poincaré(50) = 0.869792.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{21}{23} = 0.913043.$

$\text{Probas}(52) = \left\{ \frac{8}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{2}{12} \right\}.$
$Poincaré(52) = 0.898727.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{22}{24} = 0.916666.$

$\text{Probas}(54) = \left\{ \frac{5}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13} \right\}.$
$Poincaré(54) = 0.791432.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{23}{25} = 0.92.$

$\text{Probas}(56) = \left\{ \frac{9}{13}, \frac{5}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13} \right\}.$
$Poincaré(56) = 0.895716.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{24}{26} = 0.923076.$

$\text{Probas}(58) = \left\{ \frac{9}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}, \frac{3}{14}, \frac{2}{14} \right\}.$
$Poincaré(58) = 0.889555.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{25}{27} = 0.925925.$

$\text{Probas}(60) = \left\{ \frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{4}{14}, \frac{3}{14}, \frac{2}{14} \right\}.$
$Poincaré(60) = 0.757021.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{26}{28} = 0.928571.$

$\text{Probas}(62) = \left\{ \frac{10}{15}, \frac{6}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15} \right\}.$
$Poincaré(62) = 0.898311.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{27}{29} = 0.931034.$

$\text{Probas}(64) = \left\{ \frac{10}{15}, \frac{6}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15} \right\}.$
$Poincaré(64) = 0.898311.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{28}{30} = 0.933333.$

$\text{Probas}(66) = \left\{ \frac{6}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16} \right\}.$
$Poincaré(66) = 0.791718.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{29}{31} = 0.935483.$

$\text{Probas}(68) = \left\{ \frac{11}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16} \right\}.$
$Poincaré(68) = 0.903297.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{30}{32} = 0.9375.$

$\text{Probas}(70) = \left\{ \frac{11}{17}, \frac{4}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17} \right\}.$
$Poincaré(70) = 0.849258.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{31}{33} = 0.939393.$

Probas(72) $= \left\{\frac{6}{17}, \frac{7}{17}, \frac{5}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \frac{2}{17}\right\}$.
$Poincaré(72) = 0.827737$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{32}{34} = 0.941176$.

Probas(74) $= \left\{\frac{12}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18}, \frac{2}{18}\right\}$.
$Poincaré(74) = 0.91524$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{33}{35} = 0.942857$.

Probas(76) $= \left\{\frac{12}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18}, \frac{2}{18}\right\}$.
$Poincaré(76) = 0.91524$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{34}{36} = 0.944444$.

Probas(78) $= \left\{\frac{7}{19}, \frac{7}{19}, \frac{5}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}, \frac{2}{19}\right\}$.
$Poincaré(78) = 0.825165$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{35}{37} = 0.945945$.

Probas(80) $= \left\{\frac{13}{19}, \frac{4}{19}, \frac{5}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}, \frac{3}{19}\right\}$.
$Poincaré(80) = 0.897156$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{36}{38} = 0.947368$.

Probas(82) $= \left\{\frac{13}{20}, \frac{8}{20}, \frac{5}{20}, \frac{4}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right\}$.
$Poincaré(82) = 0.908965$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{37}{39} = 0.948717$.

Probas(84) $= \left\{\frac{7}{20}, \frac{8}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right\}$.
$Poincaré(84) = 0.808393$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{38}{40} = 0.95$.

Probas(86) $= \left\{\frac{14}{21}, \frac{8}{21}, \frac{6}{21}, \frac{4}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21}\right\}$.
$Poincaré(86) = 0.912338$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{39}{41} = 0.951219$.

Probas(88) $= \left\{\frac{14}{21}, \frac{8}{21}, \frac{6}{21}, \frac{4}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}\right\}$.
$Poincaré(88) = 0.907468$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{40}{42} = 0.9523$.

Probas(90) $= \left\{\frac{8}{22}, \frac{5}{22}, \frac{6}{22}, \frac{3}{22}, \frac{4}{22}, \frac{3}{22}\right\}$.
$Poincaré(90) = 0.781757$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{41}{43} = 0.953488$.

Probas(92) $= \left\{\frac{15}{22}, \frac{9}{22}, \frac{6}{22}, \frac{5}{22}, \frac{4}{22}, \frac{3}{22}\right\}$.
$Poincaré(92) = 0.925338$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{42}{44} = 0.954545$.

Probas(94) $= \left\{\frac{15}{23}, \frac{9}{23}, \frac{6}{23}, \frac{5}{23}, \frac{4}{23}, \frac{3}{23}\right\}$.
$Poincaré(94) = 0.912026$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{43}{45} = 0.955555$.

Probas(96) $= \left\{\frac{8}{23}, \frac{9}{23}, \frac{6}{23}, \frac{5}{23}, \frac{4}{23}, \frac{3}{23}\right\}$.
$Poincaré(96) = 0.835048$.

$\frac{x-4}{x-2} = \frac{44}{46} = 0.956521.$

Probas(98) $= \left\{ \frac{16}{24}, \frac{9}{24}, \frac{4}{24}, \frac{5}{24}, \frac{4}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24} \right\}.$
$Poincaré(98) = 0.912309.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{45}{47} = 0.957446.$

Probas(100) $= \left\{ \frac{16}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{4}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24} \right\}.$
$Poincaré(100) = 0.905586.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{46}{48} = 0.958333.$

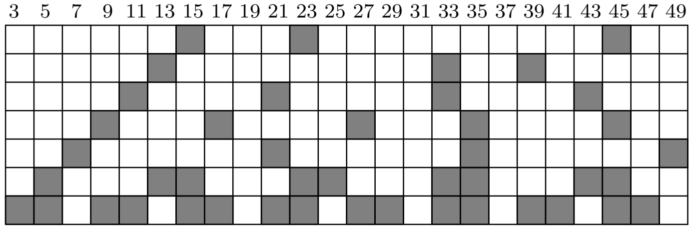
Dans la note du 7/8/9, d'une part, j'exhibe une fonction de comptage $f(2x, k)$ dont il faudrait démontrer que sa définition est correcte et d'autre part, je propose deux idées :

- l'une concerne une manière d'utiliser cette fonction de comptage f pour minorer le nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair ;
- l'autre concerne une manière d'utiliser f pour caractériser la primalité d'une nouvelle manière, originale (c'est l'objet de l'annexe 1 de la note du 7/8/9).

Prenons l'exemple du nombre pair $2x = 98$.

Les caractères de divisibilité des couples de décomposants impairs possibles pour 98 sont représentés dans la table d'appartenance suivante :

q	95	93	91	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49
p	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49



divisible par	
15	Card(E7)=3
13	Card(E6)=3
11	Card(E5)=4
9	Card(E4)=5
7	Card(E3)=4
5	Card(E2)=9
3	Card(E1)=16

Chaque colonne représente un élément, i.e. un couple de deux entiers impairs compris au sens large entre 3 et x.
Chaque ligne représente un ensemble : l'ensemble E_i est l'ensemble des couples (p, q) tels que $2i + 1$ divise p ou $2i + 1$ divise q.
Le fait de griser une case correspond au fait que l'élément associé à la colonne de la case appartient à l'ensemble associé à la ligne de la case.

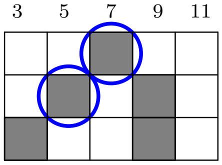
Pour "combiner" les appartenances des éléments aux différents ensembles des lignes, j'ai fait le choix d'appliquer le principe d'inclusion/exclusion aux fréquences d'appartenance observées.

J'ai choisi de considérer les résultats de la fonction f rapportés au nombre de colonnes de chaque grille comme des probabilités et d'appliquer récursivement la formule $g(a, b) = a + b - ab$ à ces nombres.
Cette idée présentait deux erreurs de raisonnement.
D'abord, j'appliquais la formule même si le caractère de divisibilité considéré était la divisibilité par un nombre composé. Or trivialement, les lignes correspondant à cette divisibilité n'ajoute pas de colonnes colorées supplémentaires, il ne faudrait donc pas les considérer. Cependant, comme $g(a, b)$ croît strictement quand on l'applique inutilement, cette "erreur" ne devait pas avoir de conséquence préjudiciable sur le résultat.
L'autre erreur est par contre plus grave : considérons les 3 premiers impairs premiers que sont 3, 5 et 7.
Si j'applique g aux nombres de cases colorées des 3 premières lignes, j'obtiens :
(a+b-ab)+c-(a+b-ab)*c

Mais cette formule présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte du tout le fait qu'il faut s'intéresser d'une part au cardinal de l'ensemble des nombres à la fois divisibles par 3 et 7 et d'autre part au cardinal de l'ensemble des nombres à la fois divisibles par 5 et 7 et enfin, au cardinal de l'ensemble des nombres qui sont divisibles à la fois par 3, 5 et 7 et ceci est comme “gommé” par cette formule trop générale.
Du coup, j'ai eu l'idée d'essayer de compter les cases colorées qui “ajoutent” des colonnes qui n'étaient pas déjà colorées. Je les ai entourées en bleu dans les grilles ci-dessous.
Problème, de très grosse taille : je ne sais pas compter ces cases précisément...

21 19 17 15 13

3 5 7 9 11



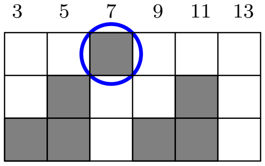
1 5 [24]

2

2

23 21 19 17 15 13

3 5 7 9 11 13



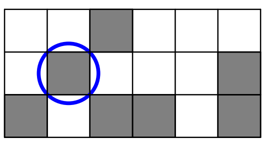
1 6 [26]

2

4

25 23 21 19 17 15

3 5 7 9 11 13



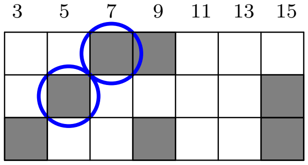
1 6 [28]

2

4

27 25 23 21 19 17 15

3 5 7 9 11 13 15 [30]



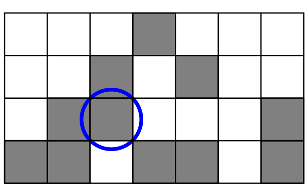
2 7

2

3

29 27 25 23 21 19 17

3 5 7 9 11 13 15



1 7 [32]

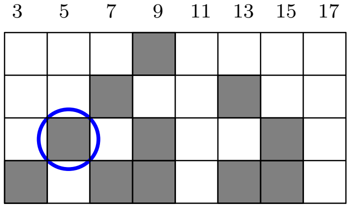
2

3

5

31 29 27 25 23 21 19 17

3 5 7 9 11 13 15 17



1 8 [34]

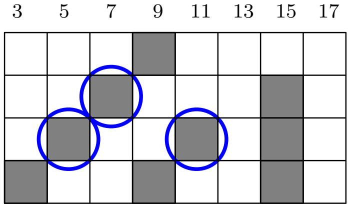
2

3

5

33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17

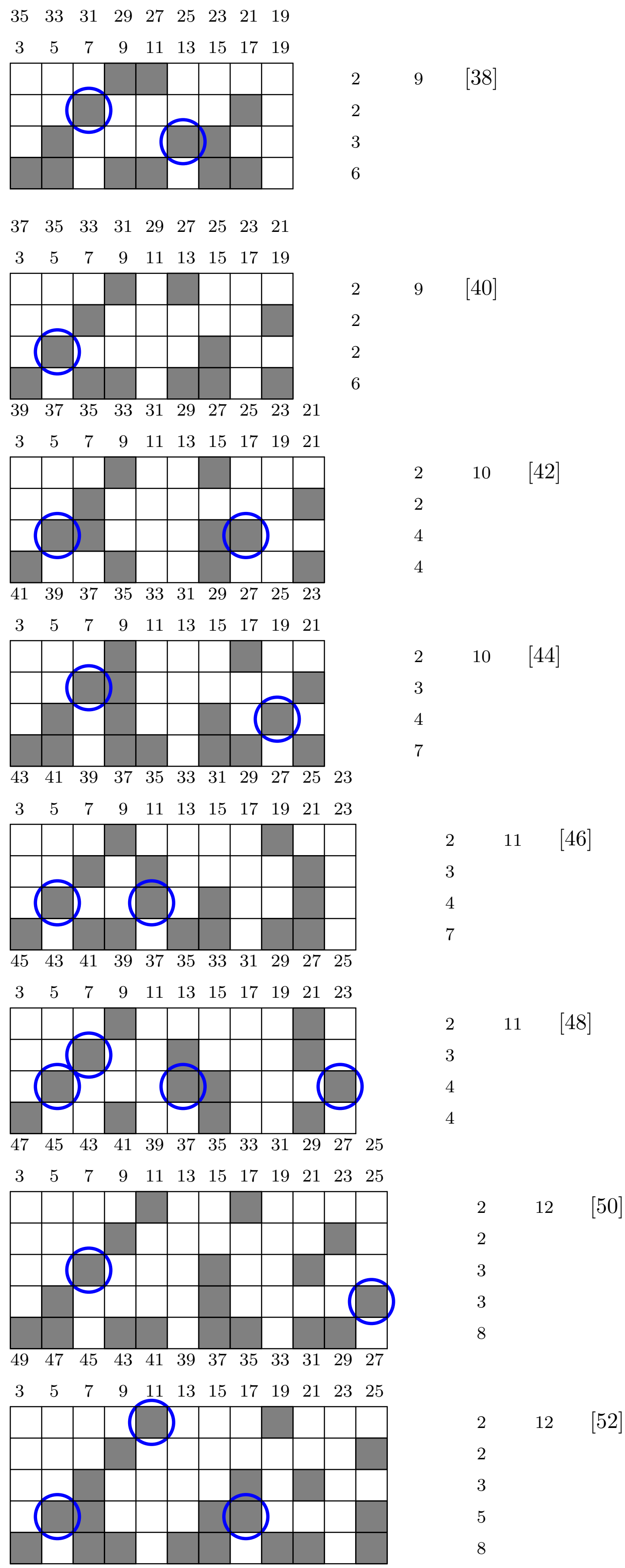


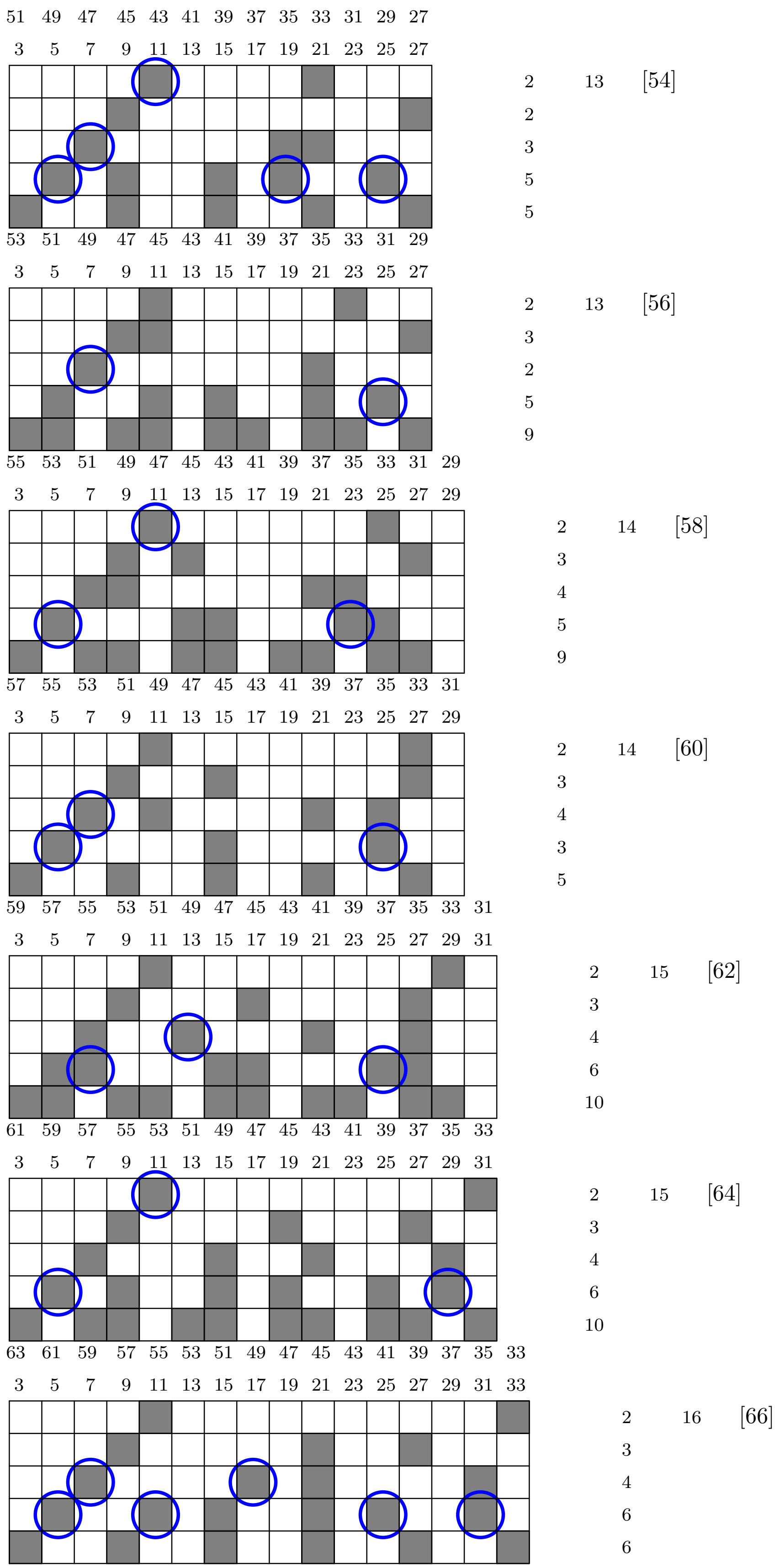
1 8 [36]

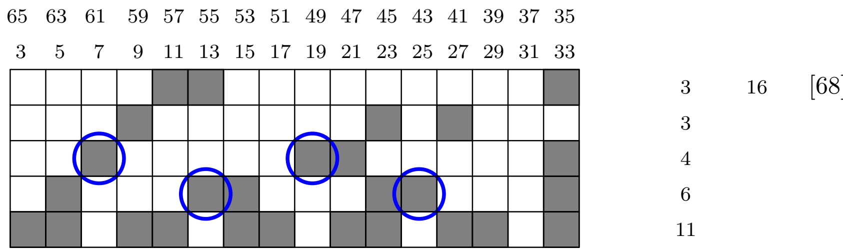
2

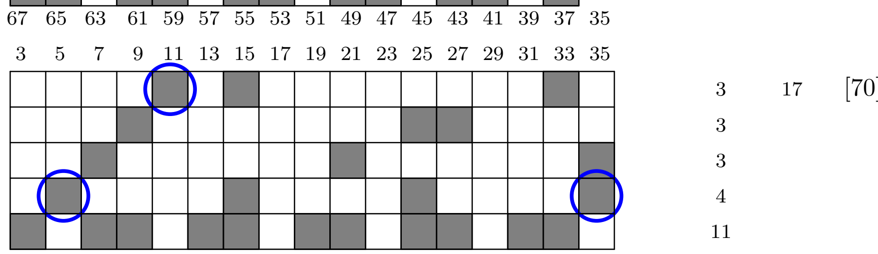
3

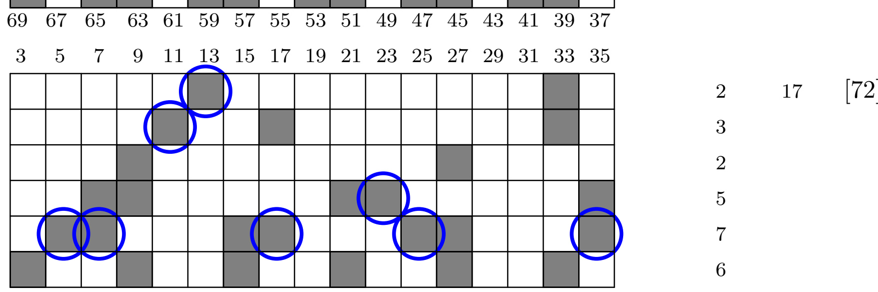
3

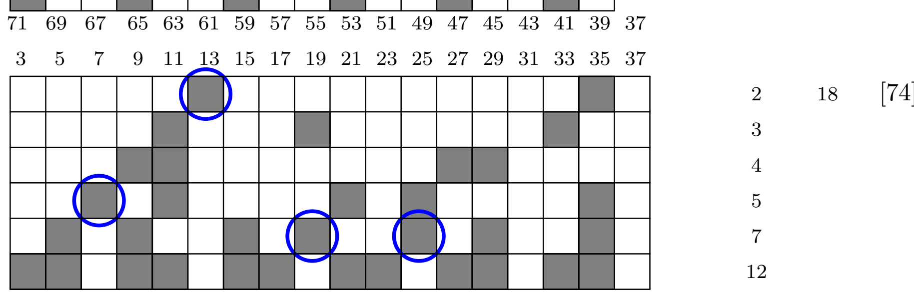

35 33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17 19
2 9 [38]
2
3
6
37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19
2 9 [40]
2
2
6
39 37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21
2 10 [42]
2
4
4
41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21
2 10 [44]
3
4
7
43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23
2 11 [46]
3
4
7
45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23
2 11 [48]
3
4
4
47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
2 12 [50]
2
3
3
8
49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
2 12 [52]
2
3
5
8

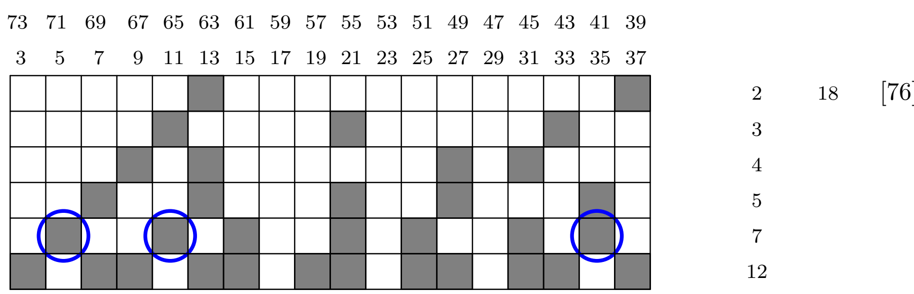

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27
2 13 [54]
2
3
5
5
53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27
2 13 [56]
3
2
5
9
55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29
2 14 [58]
3
4
5
9
57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29
2 14 [60]
3
4
3
5
59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
2 15 [62]
3
4
6
10
61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
2 15 [64]
3
4
6
10
63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
2 16 [66]
3
4
6
6

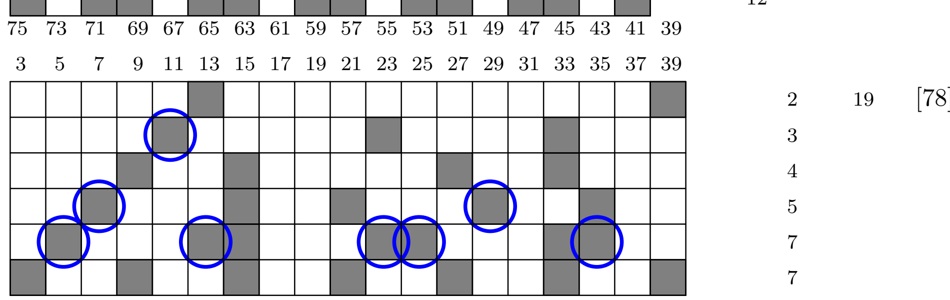

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
3 16 [68]
3
3
4
6
11

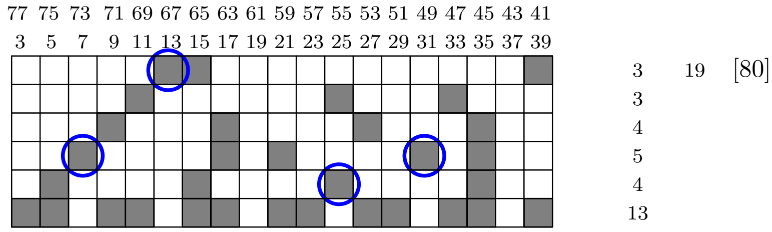

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
3 17 [70]
3
3
4
11

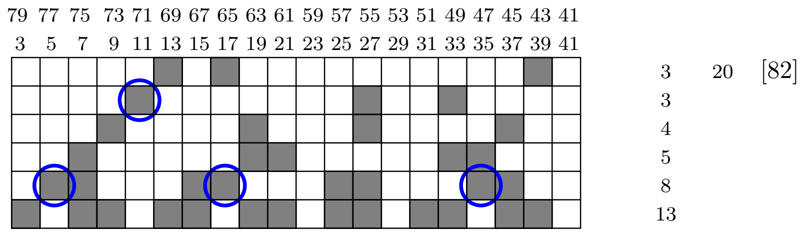

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
2 17 [72]
3
2
5
7
6

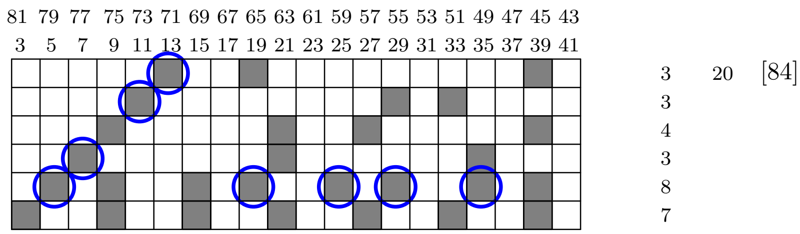

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2 18 [74]
3
4
5
7
12

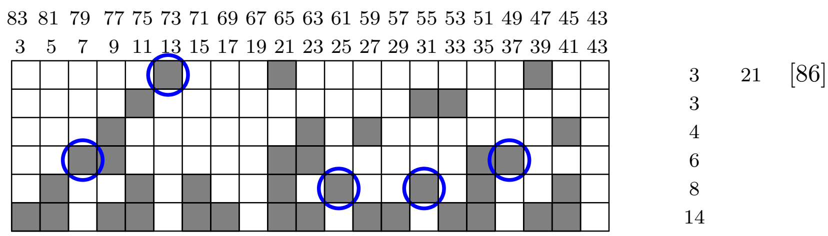

73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2 18 [76]
3
4
5
7
12

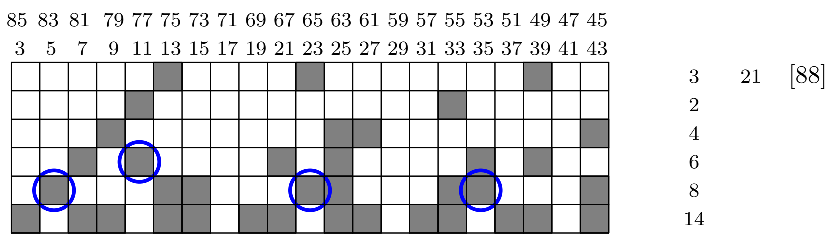

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
2 19 [78]
3
4
5
7
7

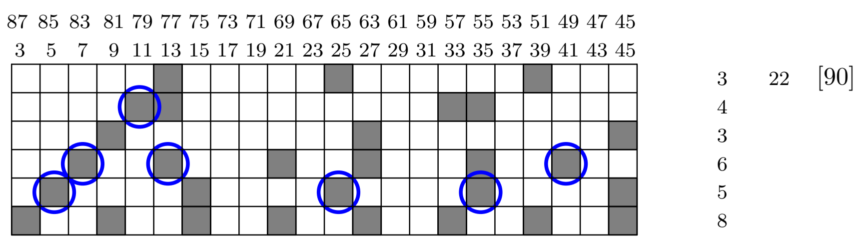

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
3 19 [80]
3
4
5
4
13

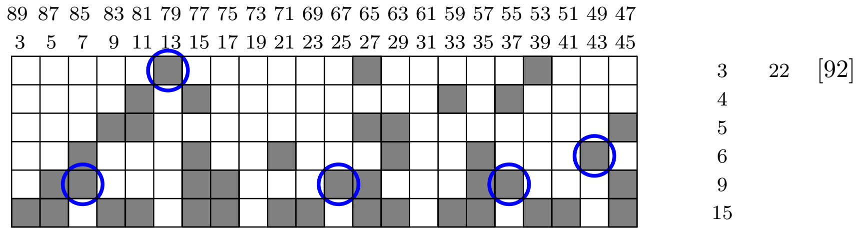

79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
3 20 [82]
3
4
5
8
13

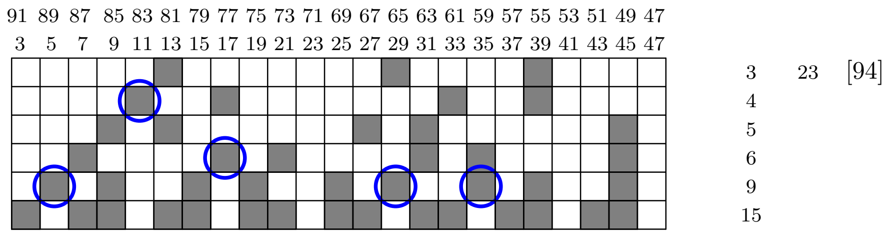

81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
3 20 [84]
3
4
3
8
7

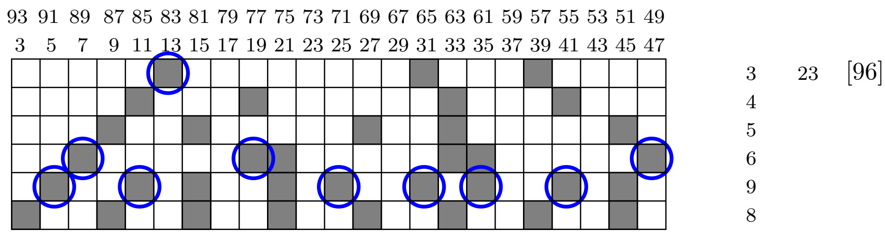

83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
3 21 [86]
3
4
6
8
14

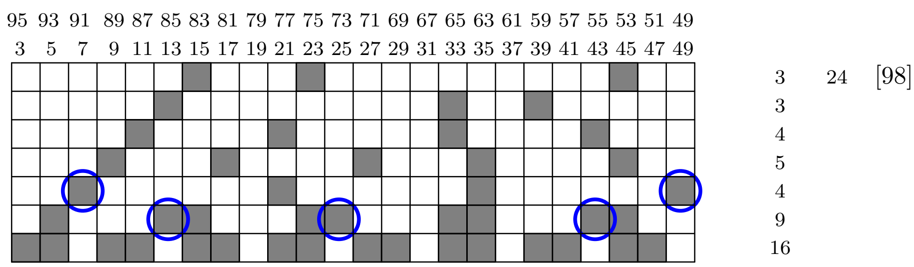

85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
3 21 [88]
2
4
6
8
14

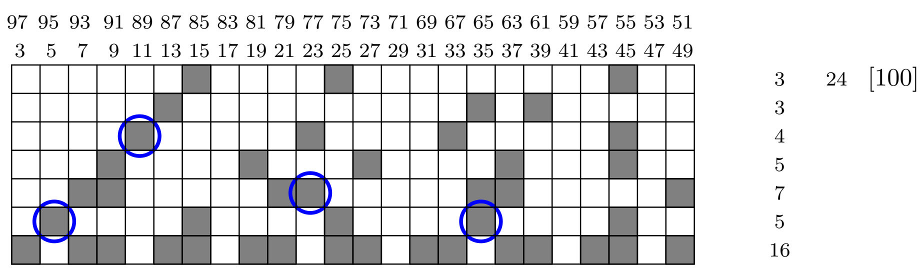

87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3 22 [90]
4
3
6
5
8


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3 22 [92]
4
5
6
9
15


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3 23 [94]
4
5
6
9
15


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3 23 [96]
4
5
6
9
8


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3 24 [98]
3
4
5
4
9
16


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3 24 [100]
3
4
5
7
5
16

Conjecture de Goldbach,
Jacquard et réécriture

Denise Vella

Mars 2010

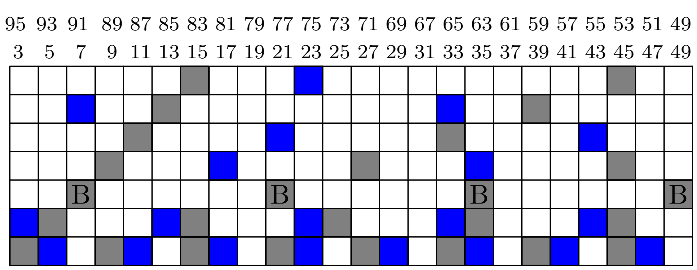
1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à 2 soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.
Une nouvelle façon d'étudier la conjecture de Goldbach est présentée ici. Elle est basée sur l'arithmétique des tissus, d'Edouard Lucas, qui consiste à représenter les caractères de divisibilité des nombres comme les mailles colorées de pièces de Jacquard, et sur la notion de réécriture, qui est utilisée dans la théorie des langages.

Il s'agit de mettre à jour un raisonnement qui assurerait l'existence d'au moins un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair.

2 Présentation de la modélisation choisie

A chaque nombre pair, nous avons associé une *grille de divisibilité*, telle que celle présentée ci-dessous, qui est associée au nombre pair 98 :



On a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres intervenant dans les décompositions de $2x$, un nombre pair donné, en deux nombres impairs compris au sens large entre 3 et x selon le code couleur suivant (remarque : on ne colorie que les cases (i, j) telles que $j \leq i$) :

- la case (i, j) est colorée en gris si $2j + 1$ divise p (le $i^{ème}$ nombre impair à partir de 3) sans diviser $q = 2x - p$;
- la case (i, j) est colorée en bleu si $2j + 1$ divise q sans diviser p ;
- la case (i, j) est colorée en gris et contient un B (on la dit *mixte*) si $2j + 1$ divise à la fois p et q ;
- la case (i, j) est colorée en blanc sinon.

Quelques remarques :

- notre choix de modélisation ne permet pas le repérage des décompositions de Goldbach de $2x$ qui font intervenir un "petit premier" (i.e. les décompositions de $2x$ en $p + q$ avec p nombre premier impair inférieur à $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$) ;
- les lignes associées aux nombres composés n'ajoutent pas d'information supplémentaire (si un nombre composé x divise y, tout diviseur premier de x divise y également) mais dans la mesure où elles nous ont permis le repérage de certaines régularités, on les a conservées dans les grilles fournies en annexe ;
- les cases grises et mixtes "ne bougent pas" dans les grilles (i.e. ne changent pas de position) alors que les cases bleues avancent systématiquement d'une colonne vers la droite.

Puis, on associe à chaque colonne une lettre, selon les couleurs des cases qu'elle contient et on obtient ainsi pour chaque nombre pair un mot (selon la théorie des langages), constitué de différentes lettres. L'association d'une lettre à chaque colonne s'effectue de la façon suivante :

- on associe la lettre V à une colonne ne contenant que des cases blanches ;
- on associe la lettre G à une colonne ne contenant que des cases grises ou blanches ;
- on associe la lettre B à une colonne ne contenant que des cases bleues ou blanches ;
- on associe la lettre M à une colonne contenant soit au moins une case grise et une case bleue, soit au moins une case mixte.

En annexe 2 sont fournis les mots associés aux nombres pairs compris entre 24 et 100.
On comprend aisément que les colonnes auxquelles est associée la lettre V correspondent aux décompositions de Goldbach de $2x$ en une somme $p + q$, avec $p \geq \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

3 Réécriture des mots

Puisqu'on a choisi une modélisation à quatre couleurs, on obtient 16 possibilités d'associations de couleurs pour deux colonnes successives et on va étudier s'il existe des règles de réécriture qui permettent de déduire les couleurs de deux colonnes successives de la grille associée au nombre pair $2x + 2$ à partir de celles des mêmes colonnes de la grille associée au nombre pair $2x$. Ces règles de réécriture sont les suivantes :

$$\begin{array}{lllllllll}
GG & \to & MG & & & & & & \\
GB & \to & GV & ou & GG & ou & MV & ou & MG \\
GM & \to & GG & ou & MG & & & & \\
GV & \to & MV & & & & & & \\
BG & \to & VM & ou & BM & ou & MM & & \\
BB & \to & VB & ou & BB & & & & \\
BM & \to & VM & ou & GM & ou & BM & ou & MM \\
BV & \to & BB & ou & MB & ou & VB & & \\
MG & \to & GM & ou & MM & & & & \\
MB & \to & GB & ou & GM & ou & MB & ou & MM \\
MM & \to & GM & ou & MM & & & & \\
MV & \to & GB & ou & GM & ou & MB & ou & MM \\
VG & \to & BG & & & & & & \\
VB & \to & BV & & & & & & \\
VM & \to & BG & ou & VG & & & & \\
VV & \to & BV & ou & MV & & & &
\end{array}$$

Le gros problème est qu'il y a non-déterminisme quant au résultat obtenu par la plupart des règles.

Après analyse de ces règles de réécriture, on peut envisager deux raisonnements qui permettraient de déduire que le mot associé à tout nombre pair contient au moins un V (i.e. que le nombre pair en question admet au moins une décomposition de Goldbach) :

- on peut constater que les paires de lettres GV, VB et VV assurent d'obtenir un V dans le mot transformé ; on pourrait essayer de démontrer qu' à partir d'un certain rang, le mot associé à un nombre pair contient toujours l'une de ces configurations au moins ;

- on peut également réaliser que toutes les règles de réécriture sauf celles concernant 4 paires de lettres ne font pas diminuer strictement le nombre de V (les règles de réécriture "risquant la diminution du nombre de V" sont celles des paires BV, MV, VG et VM). Il faudrait être capable de démontrer que les mots ne peuvent contenir uniquement ces 4 configurations "problématiques", en ce sens qu'elles pourraient entraîner une diminution du nombre de V qui pourrait alors s'annuler.

Annexe 1 : Grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100

	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11
24					
	B			B	

	23	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11	13
26						

	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13
28			B			

	27	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13	15
30							
		B					B
	B			B			B

	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15
32							

	31	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15	17
34								

	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17
36				B				
	B			B			B	

	35	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
38									

	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
40									
		B					B		

	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
42										
			B							B
	B			B			B			B

	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
44										

	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
46											

	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
48											
	B			B			B			B	

	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
50												
		B					B					B

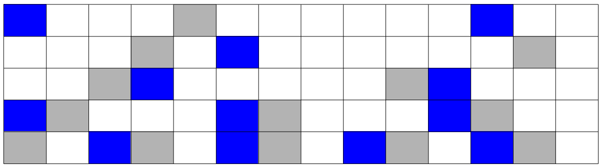
	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
52												

	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
54													
				B									B
	B			B			B			B			B

	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
56													
			B							B			

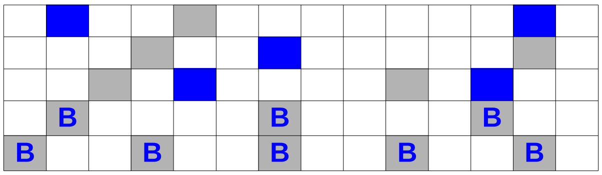
55 53 51 49 47 45 4 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

58



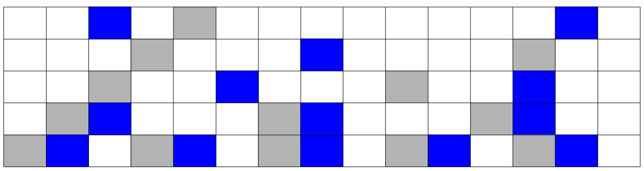
57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

60



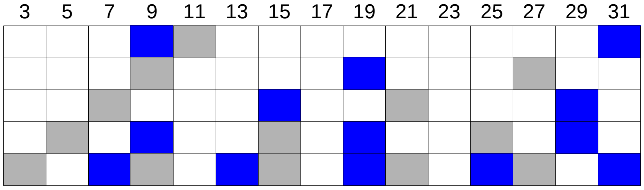
59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

62



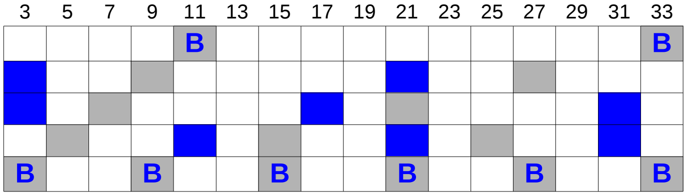
61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

64



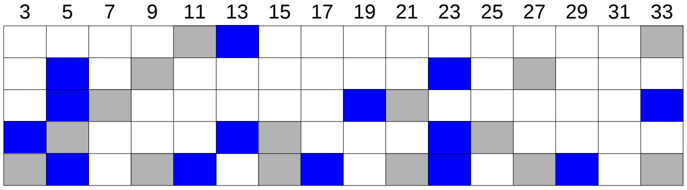
63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

66



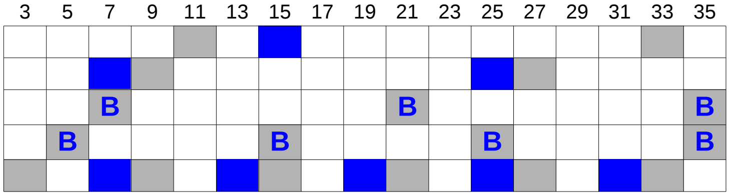
65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

68



67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35

70



	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
72																	
				B									B				
	B			B			B			B			B			B	

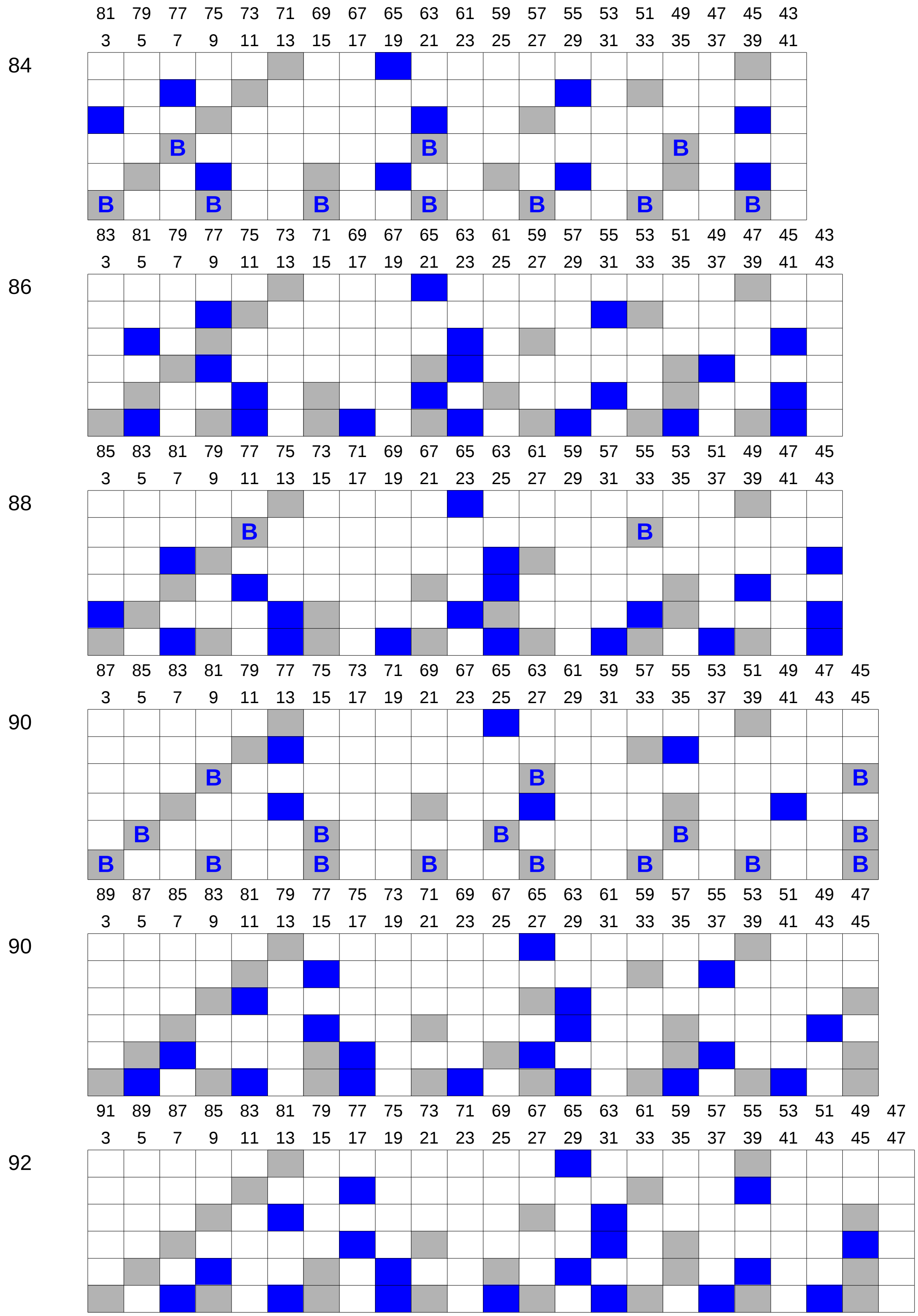
	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
74																		

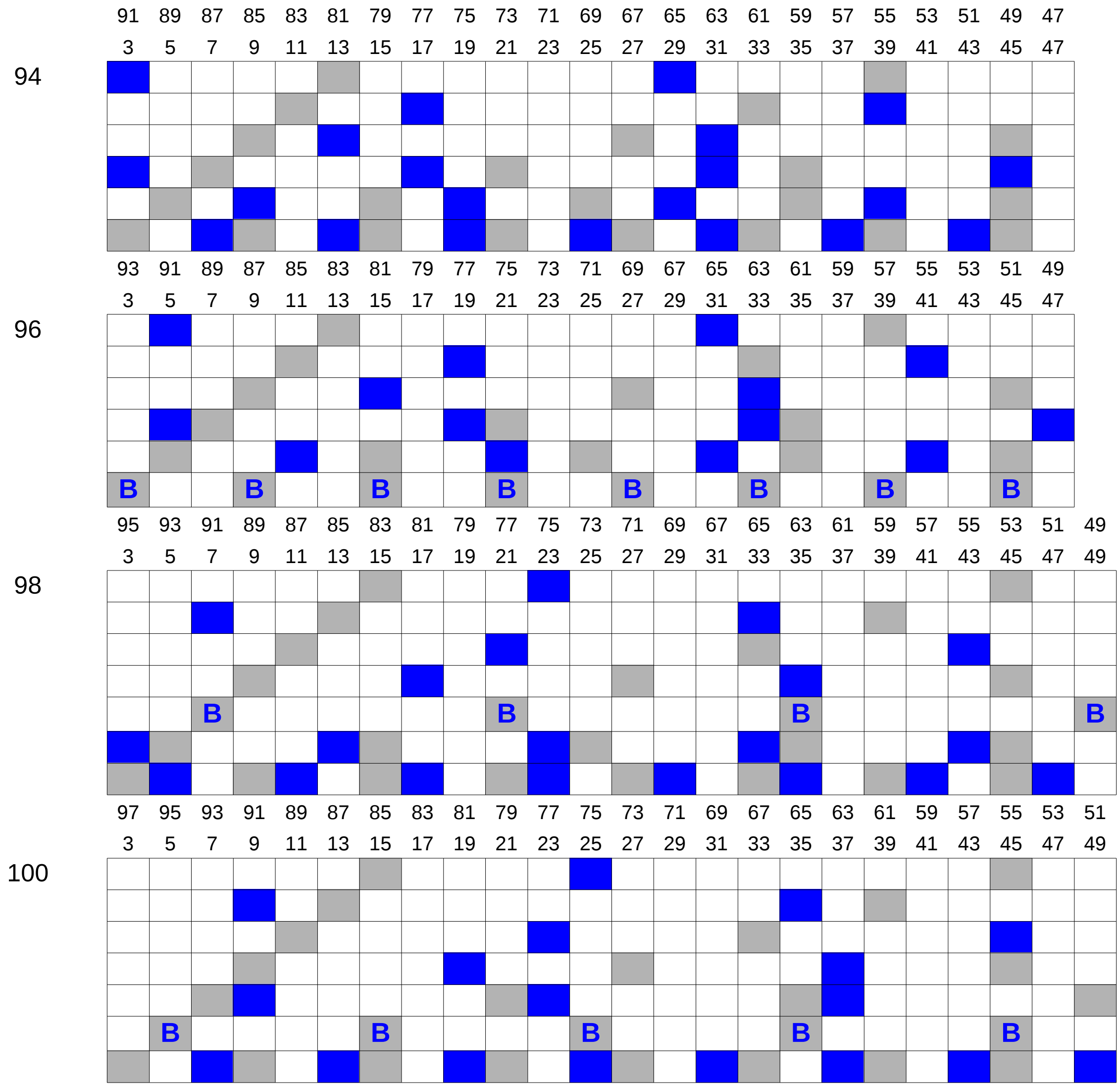
	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
76																		

	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
78						B													B
	B			B			B			B			B			B			B

	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
80																			
		B					B					B					B		

	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
82																				


81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
84
83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
86
85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
88
87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
90
89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
90
91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
92


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
94
93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
96
B B B B B B B B
95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
98
B B B B
97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
100
B B B B B

Annexe 2 : mots associés aux nombres pairs de 24 à 100

24 :	*M*	*G*	*G*	*M*	*V*																			
26 :	*G*	*M*	*G*	*G*	*B*	*V*																		
28 :	*M*	*G*	*M*	*G*	*V*	*B*																		
30 :	*M*	*M*	*G*	*M*	*V*	*V*	*M*																	
32 :	*G*	*M*	*M*	*G*	*B*	*V*	*G*																	
34 :	*G*	*G*	*M*	*M*	*V*	*B*	*G*	*V*																
36 :	*M*	*G*	*G*	*M*	*B*	*V*	*M*	*V*																
38 :	*M*	*M*	*G*	*G*	*B*	*B*	*G*	*B*	*V*															
40 :	*G*	*M*	*M*	*G*	*V*	*B*	*M*	*V*	*B*															
42 :	*M*	*G*	*M*	*M*	*V*	*V*	*M*	*B*	*V*	*M*														
44 :	*G*	*M*	*G*	*M*	*B*	*V*	*G*	*B*	*B*	*G*														
46 :	*G*	*G*	*M*	*G*	*B*	*B*	*G*	*V*	*B*	*M*	*V*													
48 :	*M*	*G*	*G*	*M*	*V*	*B*	*M*	*V*	*V*	*M*	*B*													
50 :	*G*	*M*	*G*	*G*	*M*	*V*	*M*	*B*	*V*	*G*	*B*	*M*												
52 :	*M*	*G*	*M*	*G*	*G*	*B*	*G*	*B*	*B*	*G*	*V*	*M*												
54 :	*M*	*M*	*G*	*M*	*G*	*V*	*M*	*V*	*B*	*M*	*V*	*G*	*M*											
56 :	*G*	*M*	*M*	*G*	*M*	*V*	*G*	*B*	*V*	*M*	*B*	*G*	*G*											
58 :	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*B*	*G*	*V*	*B*	*G*	*B*	*M*	*G*	*V*										
60 :	*M*	*M*	*G*	*M*	*M*	*V*	*M*	*V*	*V*	*M*	*V*	*M*	*M*	*V*										
62 :	*G*	*M*	*M*	*G*	*M*	*B*	*G*	*B*	*V*	*G*	*B*	*G*	*M*	*B*	*V*									
64 :	*G*	*G*	*M*	*M*	*G*	*B*	*M*	*V*	*B*	*G*	*V*	*M*	*G*	*B*	*B*									
66 :	*M*	*G*	*G*	*M*	*M*	*V*	*M*	*B*	*V*	*M*	*V*	*G*	*M*	*V*	*B*	*M*								
68 :	*M*	*M*	*G*	*G*	*M*	*B*	*G*	*B*	*B*	*G*	*B*	*G*	*G*	*B*	*V*	*M*								
70 :	*G*	*M*	*M*	*G*	*G*	*B*	*M*	*V*	*B*	*M*	*V*	*M*	*G*	*V*	*B*	*G*	*M*							
72 :	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*G*	*M*	*B*	*V*	*M*	*B*	*G*	*M*	*V*	*V*	*M*	*G*							
74 :	*G*	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*G*	*B*	*B*	*G*	*B*	*M*	*G*	*B*	*V*	*G*	*M*	*V*						
76 :	*G*	*G*	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*V*	*B*	*M*	*V*	*M*	*M*	*V*	*B*	*G*	*G*	*B*						
78 :	*M*	*G*	*G*	*M*	*G*	*M*	*M*	*V*	*V*	*M*	*B*	*G*	*M*	*B*	*V*	*M*	*G*	*V*	*M*					
80 :	*M*	*M*	*G*	*G*	*M*	*G*	*M*	*B*	*V*	*G*	*B*	*M*	*G*	*B*	*B*	*G*	*M*	*V*	*G*					
82 :	*G*	*M*	*M*	*G*	*G*	*M*	*G*	*B*	*B*	*G*	*V*	*M*	*M*	*V*	*B*	*M*	*G*	*B*	*G*	*V*				
84 :	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*G*	*M*	*V*	*B*	*M*	*V*	*G*	*M*	*B*	*V*	*M*	*M*	*V*	*M*	*V*				
86 :	*G*	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*G*	*B*	*V*	*M*	*B*	*G*	*G*	*B*	*B*	*G*	*M*	*B*	*G*	*B*	*V*			
88 :	*M*	*G*	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*V*	*B*	*G*	*B*	*M*	*G*	*V*	*B*	*M*	*G*	*B*	*M*	*V*	*B*			
90 :	*M*	*M*	*G*	*M*	*G*	*M*	*M*	*V*	*V*	*M*	*V*	*M*	*M*	*V*	*V*	*M*	*M*	*V*	*M*	*B*	*V*	*M*		
92 :	*G*	*M*	*M*	*G*	*M*	*G*	*M*	*B*	*V*	*G*	*B*	*G*	*M*	*B*	*V*	*G*	*M*	*B*	*G*	*B*	*B*	*G*		
94 :	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*M*	*G*	*B*	*B*	*G*	*V*	*M*	*G*	*B*	*B*	*G*	*G*	*B*	*M*	*V*	*B*	*M*	*V*	
96 :	*M*	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*M*	*V*	*B*	*M*	*V*	*G*	*M*	*V*	*B*	*M*	*G*	*V*	*M*	*B*	*V*	*M*	*B*	
98 :	*M*	*M*	*M*	*G*	*M*	*M*	*G*	*B*	*V*	*M*	*B*	*G*	*G*	*B*	*V*	*M*	*M*	*V*	*G*	*B*	*B*	*G*	*B*	*M*
100 :	*G*	*M*	*M*	*M*	*G*	*M*	*M*	*V*	*B*	*G*	*B*	*M*	*G*	*V*	*B*	*G*	*M*	*B*	*G*	*V*	*B*	*M*	*V*	*M*

Bibliographie

[1] A.M. Decaillot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236i.
[2] C.A. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Ed. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.

Conjecture de Goldbach,
Jacquard et réécriture

Denise Vella

Mars 2010

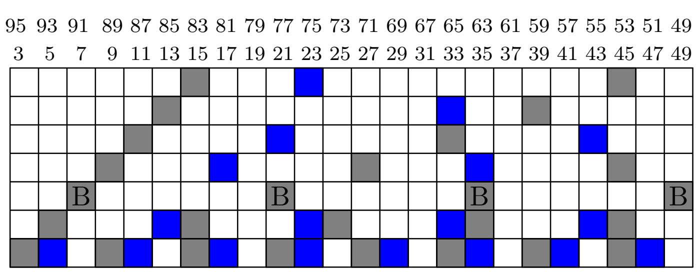
1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à 2 soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.
Une nouvelle façon d'étudier la conjecture de Goldbach est présentée ici. Elle est basée sur l'arithmétique des tissus, d'Edouard Lucas, qui consiste à représenter les caractères de divisibilité des nombres comme les mailles colorées de pièces de Jacquard, et sur la notion de réécriture, qui est utilisée dans la théorie des langages.

Il s'agit de mettre à jour un raisonnement qui assurerait l'existence d'au moins un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair.

2 Présentation de la modélisation choisie

A chaque nombre pair, nous avons associé une *grille de divisibilité*, telle que celle présentée ci-dessous, qui est associée au nombre pair 98 :



On a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres intervenant dans les décompositions de $2x$, un nombre pair donné, en deux nombres impairs compris au sens large entre 3 et x selon le code couleur suivant (remarque : on ne colorie que les cases (i, j) telles que $j \leq i$) :

- la case (i, j) est colorée en gris si $2j + 1$ divise p (le $i^{ème}$ nombre impair à partir de 3) sans diviser $q = 2x - p$;
- la case (i, j) est colorée en bleu si $2j + 1$ divise q sans diviser p ;
- la case (i, j) est colorée en gris et contient un B (on la dit *mixte*) si $2j + 1$ divise à la fois p et q ;
- la case (i, j) est colorée en blanc sinon.

Quelques remarques :

- notre choix de modélisation ne permet pas le repérage des décompositions de Goldbach de $2x$ qui font intervenir un "petit premier" (i.e. les décompositions de $2x$ en $p + q$ avec p nombre premier impair inférieur à $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$) ;
- les lignes associées aux nombres composés n'ajoutent pas d'information supplémentaire (si un nombre composé x divise y, tout diviseur premier de x divise y également) mais dans la mesure où elles nous ont permis le repérage de certaines régularités, on les a conservées dans les grilles fournies en annexe ;
- les cases grises et mixtes "ne bougent pas" dans les grilles (i.e. ne changent pas de position) alors que les cases bleues avancent systématiquement d'une colonne vers la droite.

On comprend aisément que les colonnes dont toutes les cases contiennent la lettre V correspondent aux décompositions de Goldbach de $2x$ en une somme $p + q$, avec $p \geq \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

3 Règles de substitutions horizontales

On va substituer (selon la théorie des substitutions de Camille Jordan) certains couples de lettres par d'autres. Trois règles de substitution déterministes s'appliquent en milieu de mots. 2 règles s'appliquent en fin de mot, dans le cas de l'ajout d'une colonne.
Les 3 règles de réécriture en milieu de mot sont les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} BV & \rightarrow & VB \\ BG & \rightarrow & VM \\ MV & \rightarrow & GB \end{array}$$

Les 2 règles de réécriture en fin de mot dans le cas de l'ajout d'une colonne sont les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} B & \rightarrow & VM \\ V & \rightarrow & VV \end{array}$$

La façon de considérer la conjecture de Goldbach présentée ici est de nature algorithmique. Elle consiste à considérer un objet en entrée (la grille associée à un nombre pair, qui possède certaines propriétés), à appliquer à cet objet un certain nombre de règles de modification (les substitutions de lettres présentées ci-dessus), et à obtenir un certain objet en sortie, qui possèdera lui aussi certaines propriétés. La propriété qui nous intéresse pour prouver la conjecture de

Goldbach est l'existence dans la grille d'arrivée d'une colonne de cases vides et l'on aimerait trouver un raisonnement par récurrence qui garantisse cette propriété dans la grille d'arrivée si elle est vérifiée par la grille de départ.
Ce qui est troublant, c'est que des transformations horizontales aient une conséquence verticale qui est que les grilles obtenues contiennent toutes au moins une colonne ne contenant que des cases vides et prouver que cette conséquence est toujours vérifiée prouverait la conjecture de Goldbach. Il faudrait trouver ce que l'on appelle en informatique un invariant de programme, qui assurerait l'existence d'une colonne vide à chaque pas de l'algorithme.

Bibliographie

[1] A.M. Decaillot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236i.
[2] C.A. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Ed. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.

Annexe : Grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100

	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11
24					
	B			B	

	23	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11	13
26						

	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13
28			B			

	27	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13	15
30							
		B					B
	B			B			B

	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15
32							

	31	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15	17
34								

	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17
36				B				
	B			B			B	

	35	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
38									

	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
40									
		B					B		

	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
42										
			B							B
	B			B			B			B

	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
44										

	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
46											

	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
48											
	B			B			B			B	

	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
50												
		B					B					B

	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
52												

	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
54													
				B									B
	B			B			B			B			B

	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
56													
			B							B			

	55	53	51	49	47	45	4	41	39	37	35	33	31	29
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
58														

	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
60														
		B					**B**					**B**		
	B			**B**			**B**			**B**			**B**	

	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
62															

	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
64															

	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
66					**B**											**B**
	B			**B**			**B**			**B**			**B**			**B**

	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
68																

	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
70																	
			B							**B**							**B**
		B					**B**					**B**					**B**

	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
72																	
				B									B				
	B			B			B			B			B			B	

	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
74																		

	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
76																		

	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
78						B													B
	B			B			B			B			B			B			B

	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
80																			
		B					B					B					B		

	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
82																				

	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
84																				
			B							B							B			
	B			B			B			B			B			B			B	

	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
86																					

	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
88																					
					B											B					

	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
90																						
				B									B									B
		B					B					B					B					B
	B			B			B			B			B			B			B			B

	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
92																						

	91	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47
94																							

	93	91	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47
96																							
	B			B			B			B			B			B			B			B	

	95	93	91	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
98																								
			B							B							B							B

	97	95	93	91	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
100																								
		B					B					B					B					B		

Chercher un lien entre la Conjecture de Goldbach et la Loi de Réciprocité Quadratique

Denise Vella

Avril 2010

1 Représentation des décompositions de Goldbach dans des grilles

Dans la suite de cette note, on cherche les décomposants de Goldbach d'un nombre pair $2x$.

On a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres impairs compris entre 3 et $2x-3$ dans des grilles, telles que celles fournies en annexe 1.

2 Transposition de la recherche des décomposants

L'analyse des grilles fournies en annexe 1 permet d'aboutir à la formulation suivante, équivalente à la conjecture de Goldbach.
$\forall\ 2x\ \geq\ 24,$
$\exists\ y$ *entier non nul* $\leq\ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor,$
$\forall\ p,\ 1 \leq\ \frac{p-1}{2}\ \leq\ \lfloor \sqrt{x} \rfloor,$
$y\ \not\equiv\ \frac{p-1}{2}\ (mod\ p)$ *et* $y\ \not\equiv\ x + \frac{p-1}{2}\ (mod\ p).$
(y est alors tel que $p = 2y+1$ et $q = 2x-p$ sont premiers et $2x = p+q$ est une décomposition de Goldbach de $2x$).

La première relation d'incongruence du premier degré ($y\ \not\equiv\ \frac{p-1}{2}\ (mod\ p)$) correspond aux cases grises des grilles tandis que la deuxième ($y\ \not\equiv\ x+\frac{p-1}{2}\ (mod\ p)$) correspond aux cases bleues des grilles.

En annexe 4, sont fournies les solutions des systèmes d'incongruences du premier degré pour $2x$ compris entre 24 et 100.

Le fait de voir intervenir le nombre $\frac{p-1}{2}$ dans les relations d'incongruence trivialement mises en évidence amène à s'intéresser aux congruences du second degré et à la loi de réciprocité quadratique car $\frac{p-1}{2}$ est justement le nombre de résidus quadratiques (il y en a autant que de non-résidus), un nombre premier p étant pris pour module (cf [1], section Quatrième, paragraphe 96).

3 Résidus quadratiques

En annexe 2 est fournie la table de la relation *"est un résidu quadratique de"* appliquée aux nombres premiers impairs inférieurs à 100.

4 Relations quadratiques entre diviseurs de x et décomposants de Goldbach de $2x$

En annexe 3 sont fournies les relations quadratiques qui lient les diviseurs impairs de x et les décomposants de Goldbach de $2x$. Les diviseurs semblent se séparer en deux sortes : ceux qui entretiennent la même relation quadratique à un décomposant de Goldbach de $2x$ et à son complémentaire à $2x$ et ceux qui entretiennent systématiquement une relation inverse à un décomposant de Goldbach de $2x$ et à son complémentaire à $2x$.

Malheureusement, on réalise vite que ces relations ne permettent pas de distinguer les décompositions de $2x$ en deux sommants premiers de celles qui font intervenir un sommant composé au moins.

5 Conclusion

Dans la section Quatrième (page 95) des Recherches arithmétiques, pour introduire la démonstration de la loi de réciprocité quadratique, Gauss écrit *"Maintenant que nous avons démontré que tout nombre premier de la forme 4n+1 positif ou négatif, est toujours non-résidu d'un nombre premier au moins plus petit que lui, nous allons passer à l'examen exact et général de la condition nécessaire pour qu'un nombre premier soit résidu ou non-résidu d'un autre"*. Ce théorème de Gauss permettrait peut-être de prouver l'existence d'un décomposant de Goldbach au moins, encore faudrait-il réussir à effectuer le passage des solutions des incongruences du premier degré que l'on a identifiées aux solutions de congruences du second degré à trouver.

Annexe 1 : Grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100

On a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres intervenant dans les décompositions de $2x$, un nombre pair donné, en deux nombres impairs compris au sens large entre 3 et x selon le code couleur suivant (remarque : on ne colorie que les cases (i, j) telles que $j \leq i$) :

- la case (i, j) est colorée en gris si $2j + 1$ divise p (le $i^{ème}$ nombre impair à partir de 3) sans diviser $q = 2x - p$;
- la case (i, j) est colorée en bleu si $2j + 1$ divise q sans diviser p ;
- la case (i, j) est colorée en gris et contient un B (on la dit *mixte*) si $2j + 1$ divise à la fois p et q ;
- la case (i, j) est colorée en blanc sinon.

Quelques remarques :

- notre choix de modélisation ne permet pas le repérage des décompositions de Goldbach de $2x$ qui font intervenir un "petit premier" (i.e. les décompositions de $2x$ en $p+q$ avec p nombre premier impair inférieur à $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$) ;
- les lignes associées aux nombres composés n'ajoutent pas d'information supplémentaire (si un nombre composé x divise y, tout diviseur premier de x divise y également) mais dans la mesure où elles nous ont permis le repérage de certaines régularités, on les a conservées dans les grilles ci-dessous ;

	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11
24					
	B			B	

	23	21	19	17	15	13
	3	5	7	9	11	13
26						

	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13
28			B			

	27	25	23	21	19	17	15
	3	5	7	9	11	13	15
30							
		B					B
	B			B			B

	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15
32							

	31	29	27	25	23	21	19	17
	3	5	7	9	11	13	15	17
34								

	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17
36				B				
	B			B			B	

	35	33	31	29	27	25	23	21	19
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
38									

	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
40									
		B					B		

	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
42										
			B							B
	B			B			B			B

	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
44										

	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
46											

	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
48											
	B			B			B			B	

	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
50												
		B					B					B

	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
52												

	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
54													
				B									B
	B			B			B			B			B

	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
56													
			B							B			

	55	53	51	49	47	45	4	41	39	37	35	33	31	29
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
58														

	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
60														
		B					B				B			
	B			B			B			B			B	

	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
62															

	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
64															

	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
66					B											B
	B			B			B			B			B			B

	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
68																

	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
70																	
			B							B							B
		B					B				B						B

	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
72																	
				B									B				
	B			B			B			B			B			B	

	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
74																		

	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
76																		

	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
78						B													B
	B			B			B			B			B			B			B

	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
80																			
		B					B					B					B		

	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
82																				

	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
84																				
			B							B							B			
	B			B			B			B			B			B			B	

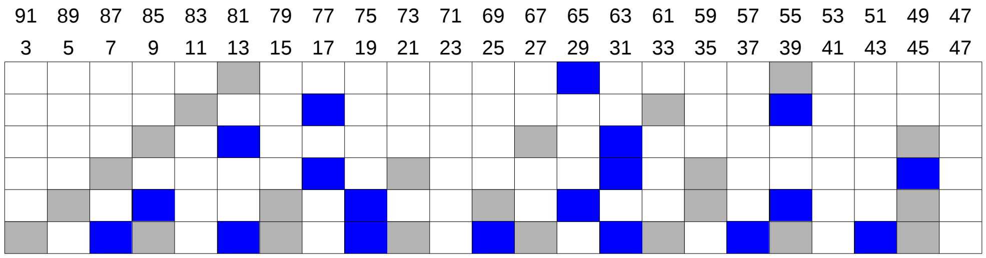
	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
86																					

	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
88																					
					B											B					

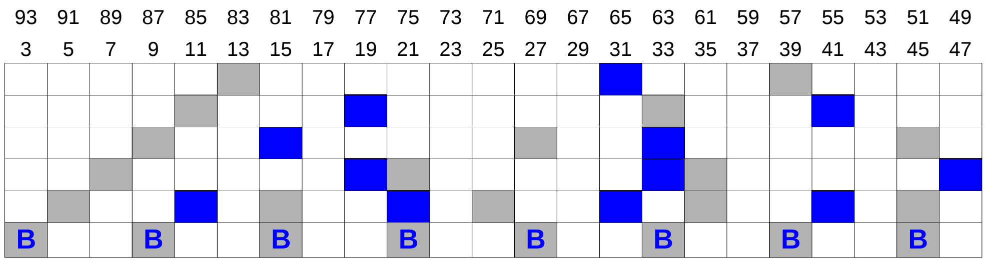
	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
90																						
				B									B									B
		B					B					B					B					B
	B			B			B			B			B			B			B			B

	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
92																						

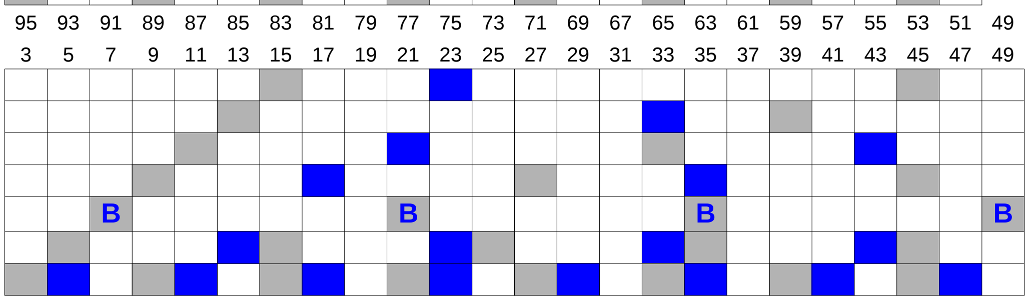
94


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47

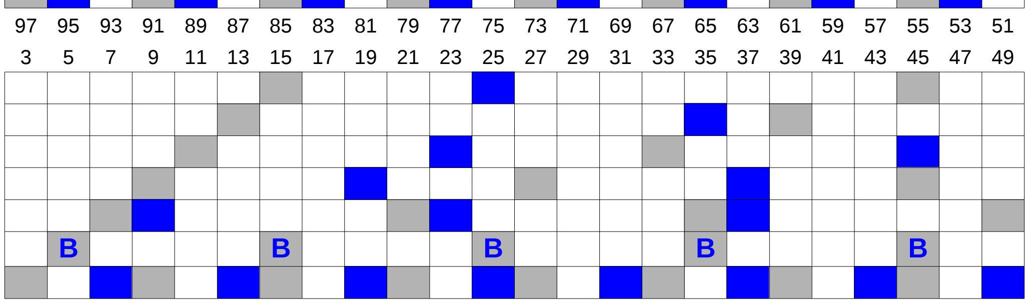
96


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
B B B B B B B B

98


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
B B B B

100


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
B B B B B

Annexe 2 : Table de la relation *"est un résidu quadratique de"*

Une croix dans la case à l'intersection de la colonne de 19 et de la ligne de 31 signifie que 19 est un résidu quadratique de 31. En effet, $19 \equiv 9^2 \ (mod\, 31)$. Cette relation est non-commutative.

	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
3	×		×		×		×			×	×		×				×	×		×	×			×
5		×		×			×		×	×		×				×	×		×		×		×	
7			×	×				×	×		×		×		×			×	×		×			
11	×	×		×				×		×	×			×	×	×		×	×				×	×
13	×				×	×		×	×				×		×		×				×			
17					×	×	×						×	×	×	×		×				×	×	
19		×	×	×		×	×	×					×	×			×			×		×		
23	×				×			×	×	×		×		×		×			×	×				
29		×	×		×			×	×						×	×		×	×			×		
31		×	×				×			×		×		×		×		×	×					×
37	×		×	×							×	×		×	×			×	×	×		×		
41		×						×		×	×	×	×			×	×			×		×		
43				×	×	×		×		×		×	×	×	×	×		×			×	×		×
47	×		×			×					×			×	×	×	×		×		×	×	×	×
53			×	×	×	×			×		×		×	×	×	×							×	×
59	×	×	×			×	×		×			×			×	×			×		×			
61	×	×			×		×					×		×			×			×		×		×
67						×	×	×	×		×			×		×		×	×	×		×	×	
71	×	×					×		×		×		×						×	×	×	×	×	
73	×						×	×			×	×					×	×	×	×	×		×	×
79		×		×	×		×	×		×								×		×	×	×	×	×
83	×		×	×		×		×	×	×	×	×				×	×					×		
89		×		×		×								×	×			×	×	×	×		×	×
97	×			×						×			×	×	×		×			×	×		×	×

Annexe 3 : Etude des relations résiduelles quadratiques entre les diviseurs de x et les décomposants de Goldbach de $2x$ pour les nombres de 24 à 100

On écrira $x\ r\ y$ au lieu de $\left(\frac{x}{y}\right) = 1$ et $x \neg r\ y$ au lieu de $\left(\frac{x}{y}\right) = -1$.

24	: *a pour diviseur* 3	: *est de forme* $4n$	
24	$= 5 + 19$	$3 \neg r\ 5, 3 \neg r\ 19$	
	$= 7 + 17$	$3 \neg r\ 7, 3 \neg r\ 17$	
26	: *a pour diviseur* 13	: *est de forme* $4n + 2$	
26	$= 3 + 23$	$13\ r\ 3, 13\ r\ 23$	
	$= 7 + 19$	$13 \neg r\ 7, 13 \neg r\ 19$	
	$= 13 + 13$	$13\ r\ 13$	
28	: *a pour diviseur* 7	: *est de forme* $4n$	
28	$= 5 + 23$	$7 \neg r\ 5, 7 \neg r\ 23$	
	$= 11 + 17$	$7 \neg r\ 11, 7 \neg r\ 17$	
30	: *diviseurs* 3 *et* 5	: *est de forme* $4n + 2$	
30	$= 7 + 23$	$3 \neg r\ 7, 3\ r\ 23$	$5 \neg r\ 7, 5 \neg r\ 23$
	$= 11 + 19$	$3\ r\ 11, 3 \neg r\ 19$	$5\ r11, 5\ r19$
	$= 13 + 17$	$3\ r\ 13, 3 \neg r17$	$5 \neg r13, 5 \neg r17$
32	: *a pour diviseur* 2	: *est de forme* $4n$	
32	$= 3 + 29$	$2\ r\ 3, 2\ r\ 23$	
	$= 13 + 19$	$2 \neg r\ 7, 2 \neg r\ 19$	
34	: *a pour diviseur* 17	: *est de forme* $4n + 2$	
34	$= 3 + 31$	$17 \neg r\ 3, 17 \neg r\ 31$	
	$= 5 + 29$	$17 \neg r\ 5, 17 \neg r\ 29$	
	$= 11 + 23$	$17 \neg r\ 11, 17 \neg r\ 23$	
	$= 17 + 17$	$17\ r\ 17$	
36	: *a pour diviseur* 3	: *est de forme* $4n$	
36	$= 5 + 31$	$3 \neg r\ 5, 3 \neg r\ 31$	
	$= 7 + 29$	$3 \neg r\ 7, 3 \neg r\ 29$	
	$= 13 + 23$	$3\ r\ 13, 3\ r\ 23$	
	$= 17 + 19$	$3 \neg r\ 17, 3 \neg r\ 19,$	
38	: *a pour diviseur* 19	: *est de forme* $4n + 2$	
38	$= 7 + 31$	$19 \neg r\ 7, 19\ r\ 31$	
	$= 19 + 19$	$19\ r\ 19$	
40	: *a pour diviseur* 5	: *est de forme* $4n$	
40	$= 3 + 37$	$5 \neg r\ 3, 5 \neg r\ 37$	
	$= 11 + 29$	$5\ r\ 11, 5\ r\ 29$	
	$= 17 + 23$	$5 \neg r\ 17, 5 \neg r23$	
42	: *diviseurs* 3 *et* 7	: *est de forme* $4n + 2$	
42	$= 5 + 37$	$3 \neg r\ 5, 3\ r\ 37$	$7 \neg r\ 5, 5\ r\ 37$
	$= 11 + 31$	$3\ r\ 11, 3 \neg r\ 31$	$7 \neg r\ 11, 5\ r\ 31$
	$= 13 + 29$	$3\ r\ 13, 3 \neg r\ 29$	$7 \neg r\ 13, 5\ r\ 29$
	$= 19 + 23$	$3 \neg r\ 19, 3\ r\ 23$	$7\ r\ 19, 5 \neg r\ 23$

$44 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 11 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n$
$44 \quad = 3 + 41 \quad 11 \neg r\ 3, 11 \neg r\ 41$
$\quad = 7 + 37 \quad 11\ r\ 7, 11\ r\ 37$
$\quad = 13 + 31 \quad 11 \neg r\ 13, 11\ r\ 31$

$46 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 23 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n + 2$
$46 \quad = 3 + 43 \quad 23 \neg r\ 3, 23\ r\ 43$
$\quad = 5 + 41 \quad 23 \neg r\ 5, 23\ r\ 41$
$\quad = 17 + 29 \quad 23 \neg r\ 17, 23\ r\ 29$

$48 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 3 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n$
$48 \quad = 5 + 43 \quad 3 \neg r\ 5, 3 \neg r\ 43$
$\quad = 7 + 41 \quad 3 \neg r\ 7, 3 \neg r\ 41$
$\quad = 11 + 37 \quad 3\ r\ 11, 3\ r\ 37$
$\quad = 17 + 31 \quad 3 \neg r\ 17, 3 \neg r\ 31$
$\quad = 19 + 29 \quad 3 \neg r\ 19, 3 \neg r\ 29$

$50 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 5 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n + 2$
$50 \quad = 3 + 47 \quad 5 \neg r\ 3, 5 \neg r\ 47$
$\quad = 7 + 43 \quad 5 \neg r\ 7, 5 \neg r\ 43$
$\quad = 13 + 37 \quad 5 \neg r\ 13, 5 \neg r\ 37$
$\quad = 19 + 31 \quad 5\ r\ 19, 5\ r\ 31$

$52 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 13 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n$
$52 \quad = 5 + 47 \quad 13 \neg r\ 5, 13 \neg r\ 47$
$\quad = 11 + 41 \quad 13 \neg r\ 11, 13 \neg r\ 41$
$\quad = 23 + 29 \quad 13\ r\ 23, 13\ r\ 29$

$54 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 3 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n + 2$
$54 \quad = 7 + 47 \quad 3 \neg r\ 7, 3\ r\ 47$
$\quad = 11 + 43 \quad 1 = 3\ r\ 11, 3 \neg r\ 43$
$\quad = 13 + 41 \quad 3\ r\ 13, 3 \neg r\ 41$
$\quad = 17 + 37 \quad 3 \neg r\ 17, 3\ r\ 37$
$\quad = 23 + 31 \quad 3\ r\ 23, 3 \neg r\ 31$

$56 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 7 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n$
$56 \quad = 3 + 53 \quad 7\ r\ 3, 7\ r\ 53$
$\quad = 13 + 43 \quad 7 \neg r\ 13, 7 \neg r\ 43$
$\quad = 19 + 37 \quad 7\ r\ 19, 7\ r\ 37$

$58 \quad : \ a\ pour\ diviseur\ 29 \quad : \ est\ de\ forme\ 4n + 2$
$58 \quad = 5 + 53 \quad 29\ r\ 5, 29\ r\ 53$
$\quad = 11 + 47 \quad 29 \neg r\ 11, 29 \neg r\ 47$
$\quad = 17 + 41 \quad 29 \neg r\ 17, 29 \neg r\ 41$
$\quad = 29 + 29 \quad 29\ r\ 29$

Annexe 4 : Recherche des décomposants de Goldbach pour $2x$ compris entre 24 et 100 par les systèmes d'incongruences du premier degré

De x = 12 à x = 24, y vérifie les 6 incongruences suivantes :
y$\not\equiv 1\ (mod\ 3), y \not\equiv 2\ (mod\ 5), y \not\equiv 3\ (mod\ 7) et$
$y \not\equiv x+1\ (mod\ 3), y \not\equiv x+2\ (mod\ 5), y \not\equiv x+3\ (mod\ 7)$

$x = 12, y = 5, 24 = 11 + 13$
$x = 13, y = 6, 26 = 13 + 13$
$x = 14, y = 5, 28 = 11 + 17$
$x = 15, y = 5\ ou\ 6, 30 = 11 + 19 = 13 + 17$
$x = 16, y = 6, 32 = 13 + 19$
$x = 17, y = 5\ ou\ 8, 34 = 11 + 23 = 17 + 17$
$x = 18, y = 6\ ou\ 8, 36 = 13 + 23 = 17 + 19$
$x = 19, y = 9, 38 = 19 + 19$
$x = 20, y = 5\ ou\ 8, 40 = 11 + 29 = 17 + 23$
$x = 21, y = 5\ ou\ 6\ ou\ 9, 42 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23$
$x = 22, y = 6, 44 = 13 + 31$
$x = 23, y = 8\ ou\ 11, 46 = 17 + 29 = 23 + 23$
$x = 24, y = 5\ ou\ 8\ ou\ 9, 48 = 11 + 37 = 17 + 31 = 19 + 29$

De x = 25 à x = 35, y vérifie les 8 incongruences suivantes :
y$\not\equiv 1\ (mod\ 3), y \not\equiv 2\ (mod\ 5), y \not\equiv 3\ (mod\ 7), y \not\equiv 5\ (mod\ 11) et$
$y \not\equiv x+1\ (mod\ 3), y \not\equiv x+2\ (mod\ 5), y \not\equiv x+3\ (mod\ 7), y \not\equiv x+5\ (mod\ 11)$

$x = 25$, y = 6 $ou\ 9, 50 = 13 + 37 = 19 + 31$
$x = 26, y = 11, 52 = 23 + 29$
$x = 27, y = 6\ ou\ 8\ ou\ 11, 54 = 13 + 41 = 17 + 37 = 23 + 31$
$x = 28, y = 6\ ou\ 9, 56 = 13 + 43 = 19 + 37$
$x = 29, y = 8\ ou\ 14, 58 = 17 + 41 = 29 + 29$
$x = 30, y = 6\ ou\ 8\ ou\ 9\ ou\ 11\ ou\ 14, 60 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 47 = 29 + 31$
$x = 31, y = 9\ ou\ 15, 62 = 19 + 43 = 31 + 31$
$x = 32, y = 8\ ou\ 11, 64 = 17 + 47 = 23 + 41$
$x = 33, y = 6\ ou\ 9\ ou\ 11\ ou\ 14, 66 = 13 + 53 = 19 + 47 = 23 + 43 = 29 + 37$
$x = 34, y = 15, 68 = 31 + 37$
$x = 35, y = 8\ ou\ 11\ ou\ 14, 70 = 17 + 53 = 23 + 47 = 29 + 41$

De x = 36 à x = 50, y vérifie les 10 incongruences suivantes :
y$\not\equiv 1\ (mod\ 3), y \not\equiv 2\ (mod\ 5), y \not\equiv 3\ (mod\ 7), y \not\equiv 5\ (mod\ 11), y \not\equiv 6\ (mod\ 13) et$
$y \not\equiv x+1\ (mod\ 3), y \not\equiv x+2\ (mod\ 5), y \not\equiv x+3\ (mod\ 7), y \not\equiv x+5\ (mod\ 11), y \not\equiv x+6\ (mod\ 13)$

$x = 36$, y = 9 $ou\ 14\ ou\ 15, 72 = 19 + 53 = 29 + 43 = 31 + 41$

$x = 37, y = 15$ *ou* $18, 74 = 31 + 43 = 37 + 37$
$x = 38, y = 8$ *ou* 11 *ou* $14, 76 = 17 + 59 = 23 + 53 = 29 + 47$
$x = 39, y = 8$ *ou* 9 *ou* 15 *ou* $18, 78 = 17 + 61 = 19 + 59 = 31 + 47 = 37 + 41$
$x = 40, y = 9$ *ou* $18, 80 = 19 + 61 = 37 + 43$
$x = 41, y = 11$ *ou* 14 *ou* $20, 82 = 23 + 59 = 29 + 53 = 41 + 41$
$x = 42, y = 8$ *ou* 11 *ou* 15 *ou* 18 *ou* $20, 84 = 17 + 67 = 23 + 61 = 31 + 53 = 37 + 47 = 41 + 43$
$x = 43, y = 9$ *ou* $21, 86 = 19 + 67 = 43 + 43$
$x = 44, y = 8$ *ou* 14 *ou* $20, 88 = 17 + 71 = 29 + 59 = 41 + 47$
$x = 45, y = 8$ *ou* 9 *ou* 11 *ou* 14 *ou* 15 *ou* 18 *ou* $21, 90 = 17 + 73 = 19 + 71 = 23 + 67 = 29 + 61 = 31 + 59 = 37 + 73 = 43 + 47$
$x = 46, y = 9$ *ou* $15, 92 = 19 + 73 = 31 + 61$
$x = 47, y = 11$ *ou* 20 *ou* $23, 94 = 23 + 61 = 41 + 53 = 47 + 47$
$x = 48, y = 8$ *ou* 11 *ou* 14 *ou* 18 *ou* $21, 96 = 17 + 79 = 23 + 73 = 29 + 67 = 37 + 59 = 43 + 53$
$x = 49, y = 9$ *ou* 15 *ou* $18, 98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$
$x = 50, y = 8$ *ou* 14 *ou* 20 *ou* $23, 100 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1804.
[2] C.A. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Ed. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.209, 1/12/1897.

$y+1$ *est un nombre premier impair* $\iff$
$\forall\ k,\ 1 \leq\ k \leq\ \lfloor\sqrt{x}\rfloor$
$y \equiv\ 0\ (mod\ 4k+2)$
ou
$(\ y \not\equiv\ 2k+1\ (mod\ 4k+2)$ *et*
$y+1 \not\equiv\ 0\ (mod\ 4k+2)$ *et*
$y+1 \not\equiv\ 2k+1\ (mod\ 4k+2))$

$y+1$ *est un nombre pair entre deux nombres premiers impairs (dits jumeaux)* $\iff$
$\forall\ k,\ 1 \leq\ k \leq\ \lfloor\sqrt{x}\rfloor$
$y+1 \equiv\ 0\ (mod\ 4k+2)$
ou
$(\ y+1 \not\equiv\ 2k+1\ (mod\ 4k+2)$ *et*
$y \not\equiv\ 0\ (mod\ 4k+2)$ *et*
$y \not\equiv\ 2k+1\ (mod\ 4k+2))$

exemples :
47 est un nombre premier car ($\lfloor\sqrt{46}\rfloor = 6$)
$46 \not\equiv 3$ (mod 6) et $47 \not\equiv 0$ (mod 6) et $47 \not\equiv 3$ (mod 6) et
$46 \not\equiv 5$ (mod 10) et $47 \not\equiv 0$ (mod 10) et $47 \not\equiv 3$ (mod 10) et
$46 \not\equiv 7$ (mod 14) et $47 \not\equiv 0$ (mod 14) et $47 \not\equiv 7$ (mod 14) et
$46 \not\equiv 11$ (mod 22) et $47 \not\equiv 0$ (mod 22) et $47 \not\equiv 11$ (mod 22) et
$46 \not\equiv 13$ (mod 26) et $47 \not\equiv 0$ (mod 26) et $47 \not\equiv 13$ (mod 26)

42 est un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (41 et 43) car ($\lfloor\sqrt{41}\rfloor = 6$)
$42 \equiv 0$ (mod 6) et
$42 \equiv 0$ (mod 14) et
$42 \not\equiv 5$ (mod 10) et $41 \not\equiv 0$ (mod 10) et $41 \not\equiv 5$ (mod 10) et
$42 \not\equiv 11$ (mod 22) et $41 \not\equiv 0$ (mod 22) et $41 \not\equiv 11$ (mod 22) et
$42 \not\equiv 13$ (mod 26) et $41 \not\equiv 0$ (mod 26) et $41 \not\equiv 13$ (mod 26)

60 est un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (59 et 61) car ($\lfloor\sqrt{59}\rfloor = 7$)
$60 \equiv 0$ (mod 6) et
$60 \equiv 0$ (mod 10) et
$60 \not\equiv 7$ (mod 14) et $59 \not\equiv 0$ (mod 14) et $59 \not\equiv 7$ (mod 14) et
$60 \not\equiv 11$ (mod 22) et $59 \not\equiv 0$ (mod 22) et $59 \not\equiv 11$ (mod 22) et
$60 \not\equiv 13$ (mod 26) et $59 \not\equiv 0$ (mod 26) et $59 \not\equiv 13$ (mod 26)

On peut aussi dire que $2y+1$ est premier $\iff$ quelque soit p un nombre premier inférieur ou égal à $\lfloor\sqrt{2}y+1\rfloor$ $y \not\equiv \frac{-1}{2}\ (mod\ p)$.

1 Une formule qui semble minorer le nombre de décompositions de Goldbach

L'étude des grilles m'amène à proposer cette formule pour minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui divise } x \\ 2 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui ne divise pas } x \end{cases}$$

On calcule :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} \left(1 - \frac{a_i}{2i+1}\right)$$

On appelle $NbGoldbach(2x)$ le nombre de décompositions de $2x$ comme somme de deux nombres premiers.
Par programme, la fonction f testée jusqu'à 100000 fournit un nombre $f(2x)$ toujours inférieur à $NbGoldbach(2x)$ (sauf pour 9602 qui est le double de 4801, un nombre premier).

Dans un article de Bernard Teissier de 1966 [1], consacré au crible de Brun, des idées similaires sont présentées (notamment page 11-10 concernant la conjecture de Goldbach). L'auteur fournit des majorations du nombre de décomposants.

2 Essayer d'aller plus avant

J'avais proposé en août 2009 une fonction récursive qui calculait précisément le nombre de cases colorées de chaque ligne des grilles fournies ci-après et dans lesquelles apparaissent certaines des décompositions de Goldbach des nombres pairs de 24 à 100. Elle ne permet pas la minoration que semble permettre la fonction ci-dessus.

J'ai aussi pensé voir les nombres comme solutions de systèmes de congruences (cf le théorème des restes chinois). Cela permettait d'expliquer des résultats numériques sympathiques [2]. Or la fonction proposée ici considère identiquement des nombres selon qu'ils sont divisibles ou pas par un premier donné. Il faudrait faire deux choses maintenant : prouver que la fonction proposée minore bien le nombre de décompositions de Goldbach, et voir comment cette minoration évolue quand le nombre pair augmente.

Pourquoi minore-t-on le nombre de décomposants ?
- comme on a considéré seulement les nombres impairs et qu'on a de plus "plié le tissu", on multiplie globalement la somme des produits symétriques alternés par $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ au lieu de la multiplier par x, voire par $2x$;
- on considère qu'il faut systématiquement prendre $\frac{2}{p_i}$ dès que p_i ne divise pas x

[1] Bernard TEISSIER, Crible de Brun, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, no 2 (1965-1966), exp. no 11, p. 1-13., consultable à l'adresse
$http://www.numdam.org/item?id = SDPP\_1965 - 1966\_\_7\_2\_A1\_0$

[2] consultables à l'adresse http://denise.vella.chemla.free.fr/partager.pdf.

alors que certaines cases bleues s'évanouissent à l'extrême-gauche ou à l'extrême-droite des grilles.

De toute façon, il faut prouver qu'on minore et je ne sais pas le prouver, je ne sais que le constater par programme, et encore sur un nombre minuscule de nombres. Et Poincaré écrit dans "La Science et l'Hypothèse" : "une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierre n'est une maison."

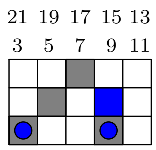
Comment la minoration évolue-t-elle au fur et à mesure que $2x$ augmente ?

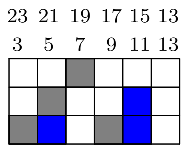
Ici, j'aimerais fournir un extrait de la biographie "Poincaré : philosophe et mathématicien" d'Umberto Bottazzini aux éditions Belin Pour la Science. Au sujet du raisonnement par récurrence, il écrit : "le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est à dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons des opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se "retrouve à chaque pas", c'est la démonstration "par récurrence" : "on établit d'abord un théorème pour n égal à 1 ; on montre ensuite que, s'il est vrai de n-1, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers." C'est là le "raisonnement mathématique par excellence", déclare-t-il. Sa particularité est "qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes", et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel "il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général", mais uniquement des énoncés particuliers. D'où nous vient ce "raisonnement pas récurrence", s'interroge Poincaré ? Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. "Cette règle (le raisonnement par récurrence), inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori, conclut Poincaré". L'"irrésistible évidence" avec laquelle ce "principe" s'impose n'est autre que "l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible"...

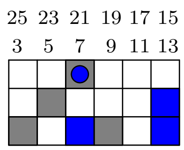
Qu'est-ce qui change, dans nos calculs, d'un nombre pair au suivant, ou bien d'un nombre pair à un nombre pair plus grand (et là, il faut être sûr qu'on ne laisse pas de nombres pairs de côté, en utilisant par exemple les arbres de nombres[3] que j'avais présentés et qui se réduisent ici à leur plus simple expression d'arbres binaires) ?
Le nombre de colonnes des grilles change une fois sur deux.
Le nombre de facteurs change à chaque fois qu'on arrive sur un nombre pair $2x$ qui est le double d'un carré $x = y^2$ tel que $2y + 1$ est premier...[4]

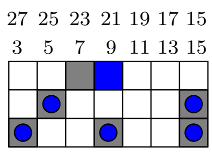
[3] http://denise.vella.chemla.free.fr/arbres.pdf

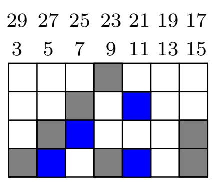
[4] Le programme de calcul de la fonction f et son résultat :
$http://denise.vella.chemla.free.fr/novembre2010.cpp$
$http://denise.vella.chemla.free.fr/minore\_goldbach$

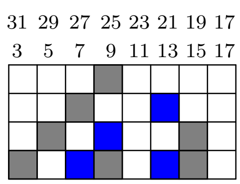

21 19 17 15 13
3 5 7 9 11

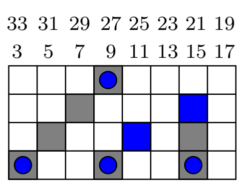

23 21 19 17 15 13
3 5 7 9 11 13

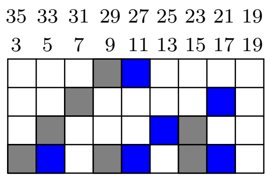

25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13

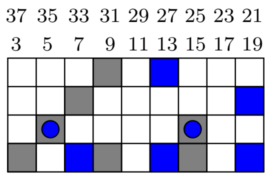

27 25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13 15

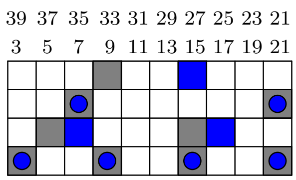

29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15

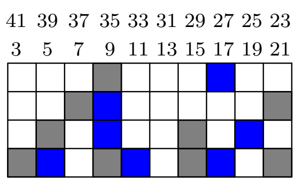

31 29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15 17

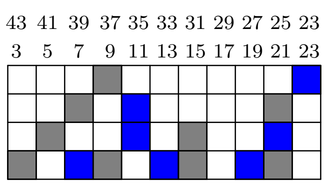

33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17

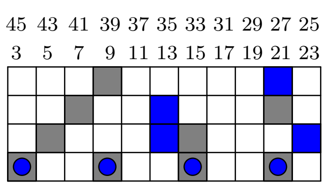

35 33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17 19

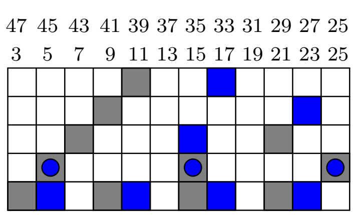

37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19

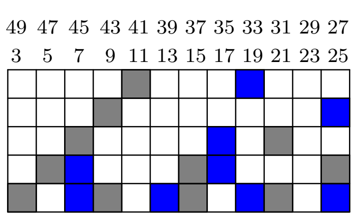

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

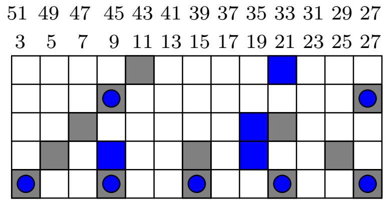

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

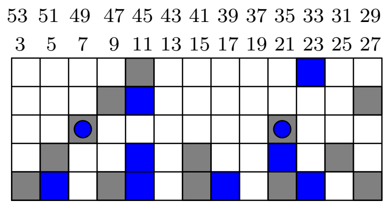

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

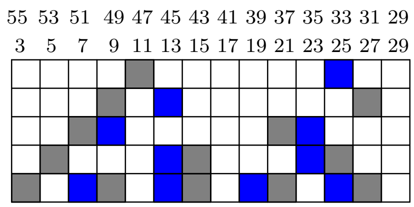

45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

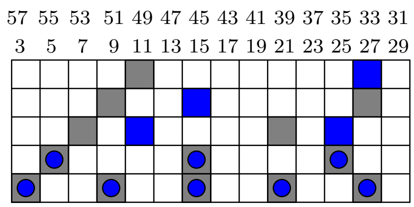

47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

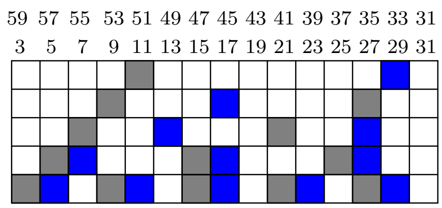

49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

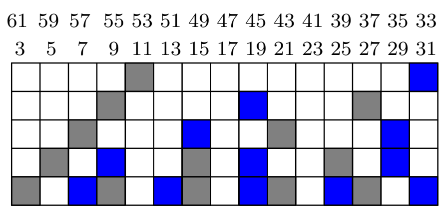

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27

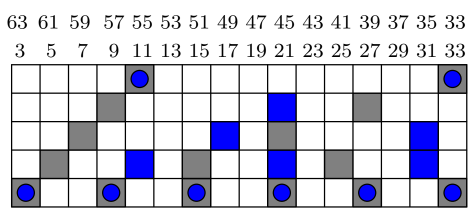

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27

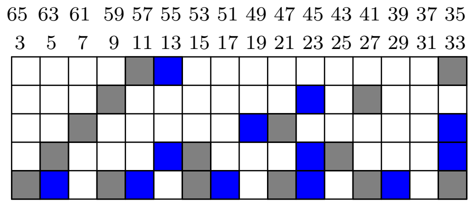

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

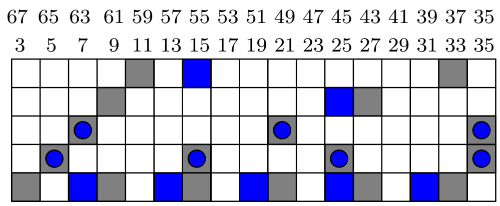

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

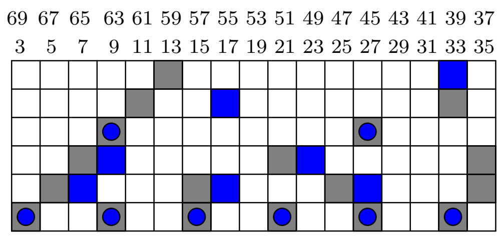

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

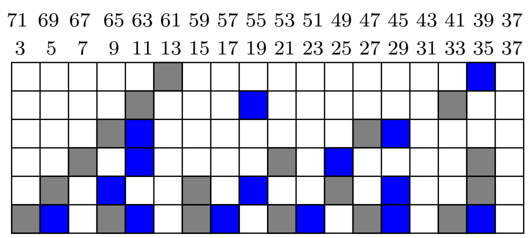

61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

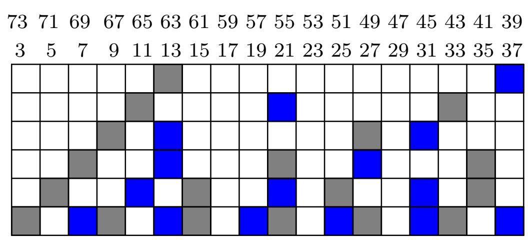

63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

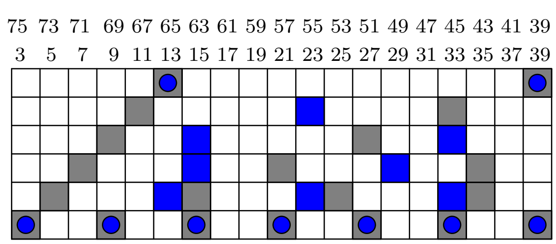

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

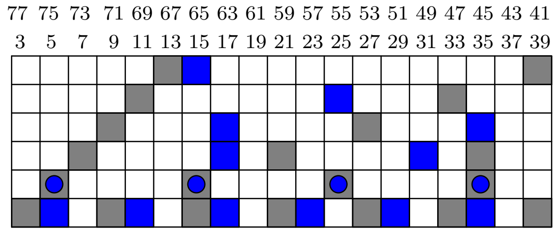

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35

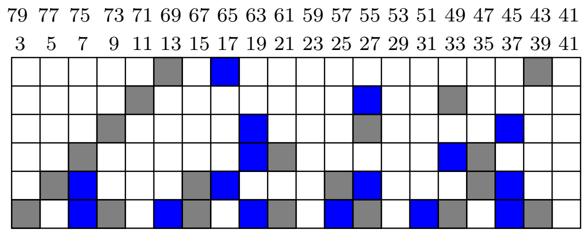

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35

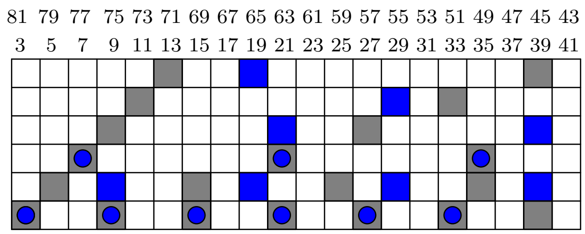

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

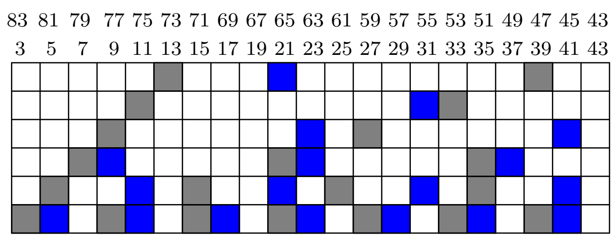

73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

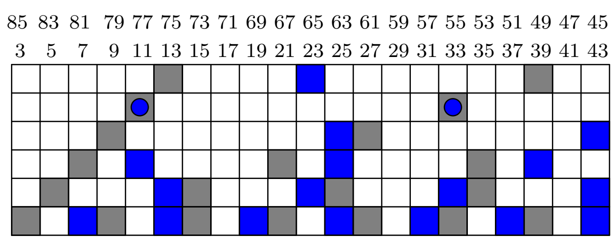

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

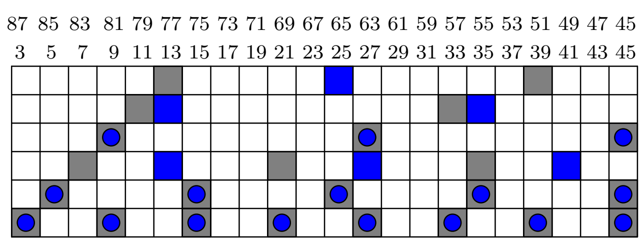

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

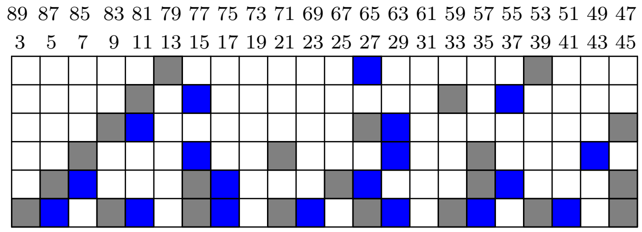

79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41

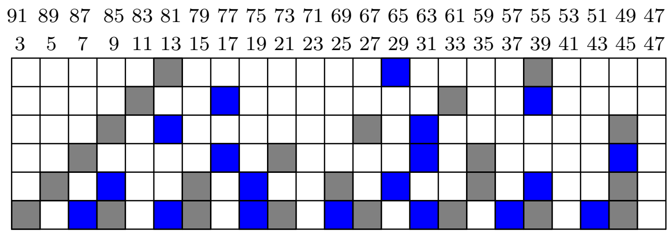

81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41

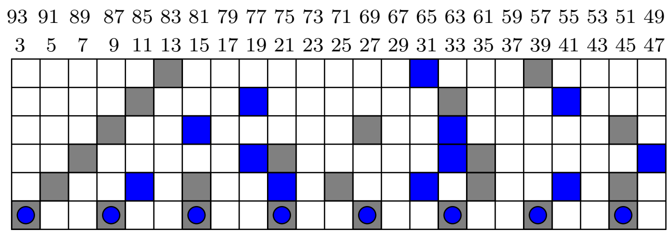

83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43

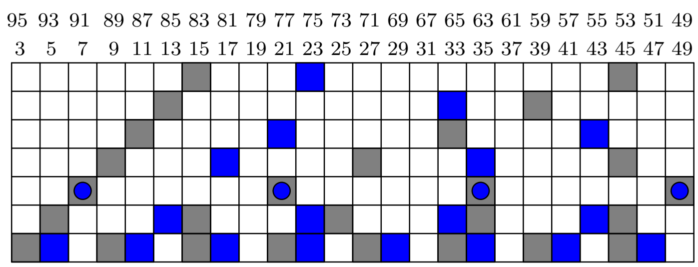

85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43

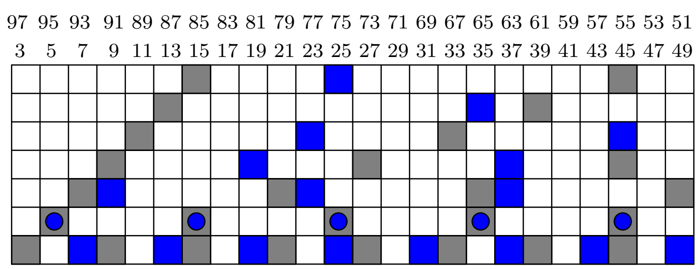

87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49

1 Une fonction simple qui semble minorer le nombre de décompositions de Goldbach

On simplifie la formule qui minore le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné.

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{x-1}{2} \Big\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \Big(1 - \frac{2}{2i+1}\Big)$$

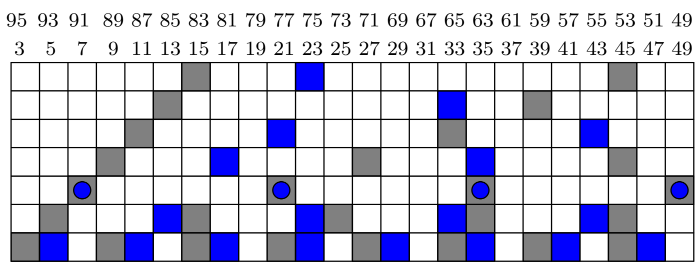
On appelle $NbGoldbach(2x)$ le nombre de décompositions de $2x$ comme somme de deux nombres premiers.
Par programme, la fonction f testée jusqu'à 100000 fournit un nombre $f(2x)$ toujours inférieur (et "de plus en plus inférieur") à $NbGoldbach(2x)$.

Une fonction qui semble minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné

Denise Chemla

28/11/10

On rappelle qu'à la recherche des décomposants de Goldbach d'un nombre pair $2x$, on a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres impairs de 3 à $2x-3$ dans une grille telle que celle présentée ci-dessous pour le nombre pair 98.



Chaque ligne correspond à un nombre impair $2i+1$ pour i compris entre 1 et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$. La grille de recherche des décomposants de Goldbach de $2x$ contient $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ colonnes.

Il y a autant de décompositions de Goldbach de $2x = 98$ qui font intervenir deux sommants supérieurs à $2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1$ que de colonnes de la grille ne contenant aucune case colorée.

On constate que les lignes correspondant à un nombre impair composé (par exemple, ici la quatrième ligne correspondant au nombre impair 9) ne contiennent jamais de case colorée qui n'ait déjà été colorée par les lignes des diviseurs du nombre composé en question (en l'occurrence pour le nombre composé 9, qui n'ait déjà été colorée dans la première ligne correspondant au nombre impair 3).

L'étude de telles grilles amène à proposer la formule suivante pour minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné.

Posons :

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui divise } x \\ 2 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui ne divise pas } x \end{cases}$$

Le nombre de décomposants de Goldbach semble pouvoir être minoré par :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left(1 - \frac{a_i}{2i+1}\right)$$

Si l'on n'établit pas de distinction entre nombres premiers et composés (ce qui équivaut à considérer que les nombres composés peuvent éliminer eux-aussi des décomposants de Goldbach alors que ce n'est pas le cas), la formule devient :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left(1 - \frac{2}{2i+1}\right)$$

Le produit contient les fractions suivantes : $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \ldots, \frac{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor - 1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$.

On le simplifie en $\frac{1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$.

La formule devient :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \frac{1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$$

On la simplifie en :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{4} \right\rfloor$$

On appelle $NbGoldbach(2x)$ le nombre de décompositions de $2x$ comme somme de deux nombres premiers.

Par programme, la fonction f testée jusqu'à 3 500 000 fournit un nombre $f(2x)$ toujours inférieur à $NbGoldbach(2x)$ et supérieur ou égal à 1 dès que $2x$ est supérieur ou égal à 32.

$$\forall\ 2x\ \geq\ 32,\ 1\ \leq\ f(2x)\ \leq\ NbGoldbach(2x).$$

Dans un article de Bernard Teissier de 1966 [1], consacré au crible de Brun, des idées similaires sont présentées (notamment page 11-10 concernant la conjecture de Goldbach). L'auteur fournit des majorations du nombre de décomposants.

[1] Bernard TEISSIER, Crible de Brun, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, no 2 (1965-1966), exp. no 11, p. 1-13., consultable à l'adresse
http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_2_A1_0

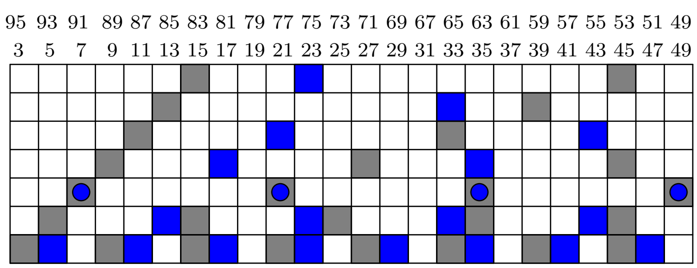
Des fonctions qui semblent minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné

Denise Chemla

5/12/10

1 Présentation

On rappelle qu'à la recherche des décomposants de Goldbach d'un nombre pair $2x$, on a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres impairs de 3 à $2x-3$ dans une grille telle que celle présentée ci-dessous pour le nombre pair 98.



Chaque ligne correspond à un nombre impair $2i+1$ pour i compris entre 1 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. La grille de recherche des décomposants de Goldbach de $2x$ contient $\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor$ colonnes.

Il y a autant de décompositions de Goldbach de $2x = 98$ qui font intervenir deux sommants supérieurs à $2\lfloor\sqrt{x}\rfloor+1$ que de colonnes de la grille ne contenant aucune case colorée.

On constate que les lignes correspondant à un nombre impair composé (par exemple, ici la septième ligne correspondant au nombre impair 15) ne contiennent jamais de case colorée qui n'ait déjà été colorée par les lignes des diviseurs du nombre composé en question (en l'occurrence pour le nombre composé 15, qui n'ait déjà été colorée dans les première et deuxième lignes correspondant aux nombres impairs 3 et 5).

L'étude de telles grilles amène à proposer la formule suivante pour minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné.

Posons :

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \; 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui divise } x \\ 2 & \text{si } \; 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui ne divise pas } x \end{cases}$$

Le nombre de décomposants de Goldbach semble pouvoir être minoré par[1] :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left(1 - \frac{a_i}{2i+1}\right)$$

L'absence de distinction entre nombres premiers et composés (ce qui équivaut à considérer que les nombres composés peuvent éliminer eux-aussi des décomposants de Goldbach alors que ce n'est pas le cas) transforme la formule en :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left(1 - \frac{2}{2i+1}\right)$$

Le produit contient les fractions suivantes : $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \ldots, \frac{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor - 1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$.

On le simplifie en $\frac{1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$.

La formule devient :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \frac{1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$$

On la simplifie en :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{4} \right\rfloor$$

2 Mathématiques expérimentales

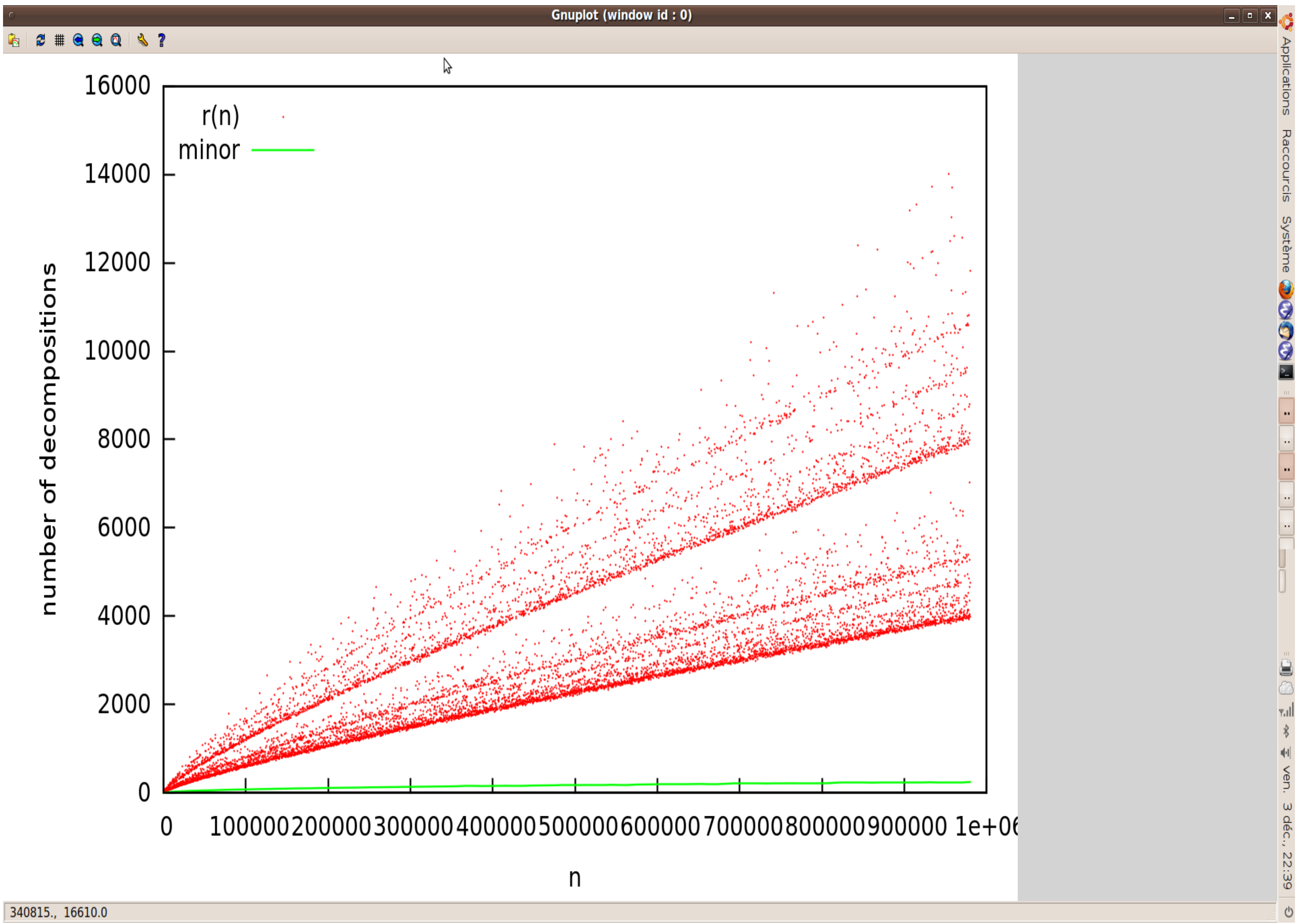
On appelle $NbGoldbach(2x)$ le nombre de décompositions de $2x$ comme somme de deux nombres premiers.

On va utiliser pour tester informatiquement quelques fonctions de minoration du nombre de décomposants de Goldbach un ensemble de logiciels utilitaires qui nous ont été fournis par Daniel Diaz, concepteur du langage GNU-Prolog.
Par programme, la fonction f testée jusqu'à 100 000 000 fournit un nombre $f(2x)$ toujours très inférieur à $NbGoldbach(2x)$ et supérieur ou égal à 1 dès que $2x$ est supérieur ou égal à 32.

$$\forall\, 2x \;\geq\; 32,\; 1 \;\leq\; f(2x) \;\leq\; NbGoldbach(2x).$$

La représentation graphique de ce résultat par Gnuplot illustre le fait que cette minoration, bien qu'effective, est ridiculement éloignée de ce que l'on a coutume d'appeler la "comète de Goldbach", le graphique qui présente en fonction de x le nombre de décompositions de Goldbach de x.

[1] Dans l'article [1], des idées similaires sont présentées (notamment page 11-10 concernant la conjecture de Goldbach). L'auteur fournit des majorations du nombre de décomposants.

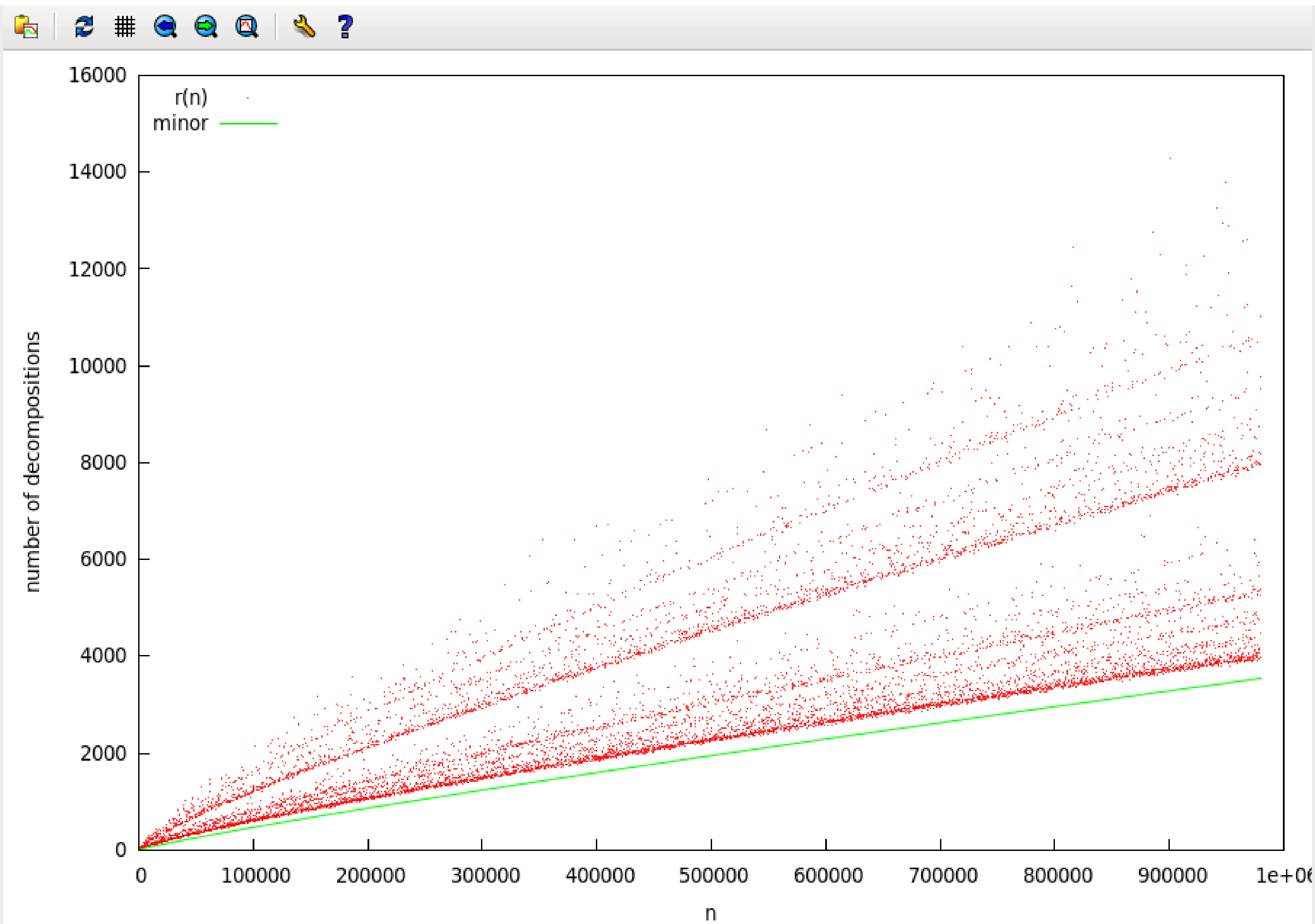


Gnuplot (window id : 0)
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
r(n)
minor
number of decompositions
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
800000
900000
1e+06
n
340815., 16610.0
Applications
Raccourcis
Système
ven. 3 déc., 22:39

On va chercher une minoration de la forme $m.x^n$ qui se rapproche davantage de la comète.
D.Diaz propose la fonction

$$g(2x) = \left\lceil 0.01647.x^{0.89} \right\rceil$$

représentée ci-dessous et dont les constantes m et n ont été obtenues expérimentalement.

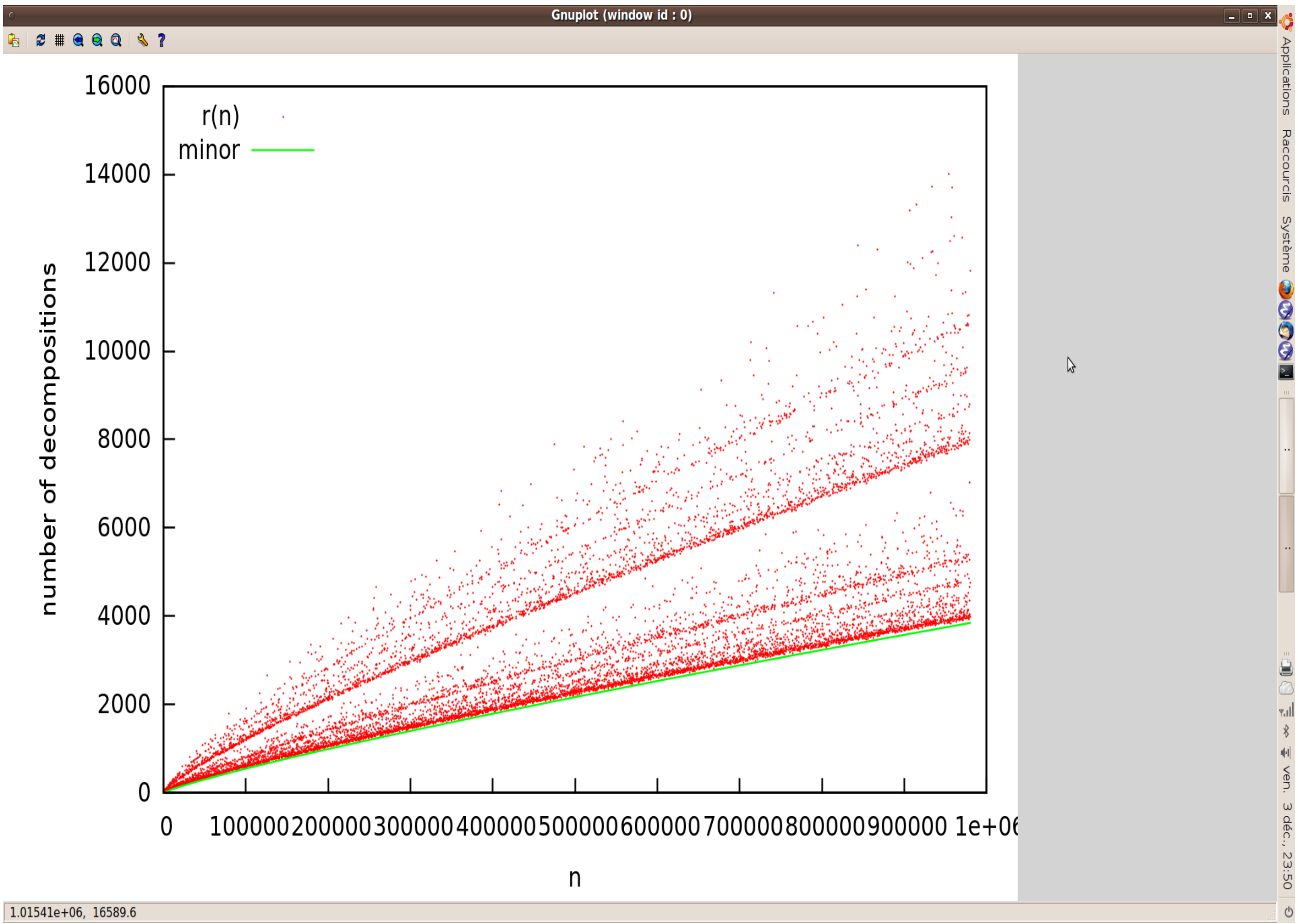


r(n)
minor
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
number of decompositions
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
800000
900000
1e+06
n

Ces constantes ne semblant pas correspondre à des constantes mathématiques déjà identifiées, on essaie de s'approcher des nombres ci-dessus en utilisant des constantes mathématiques “connues”.
On décide d'utiliser la constante de Gauss-Kuzmin-Wirsin, qui vaut 0.3036630029 et la constante de Niven qui vaut 1.70521114010537.
On propose la formule :

$$h(2x) = \left\lfloor 0.03036630029.x^{0.85260557} \right\rfloor$$

dans laquelle $m = 0.03036630029$ est la constante de Gauss-Kuzmin-Wirsin divisée par 10 et $n = 0.85260557$ est la constante de Niven divisée par 2 ; elle semble permettre d'obtenir systématiquement une minoration pour des nombres supérieurs à 3 614 168.


Gnuplot (window id : 0)
r(n)
minor
number of decompositions
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
800000
900000
1e+06
n
1.01541e+06, 16589.6
Applications
Raccourcis
Système
ven. 3 déc., 23:50

Les formules ci-dessous quant à elles :

$$k(2x) = \left\lfloor 0.033333333333.x^{0.8346268} \right\rfloor$$

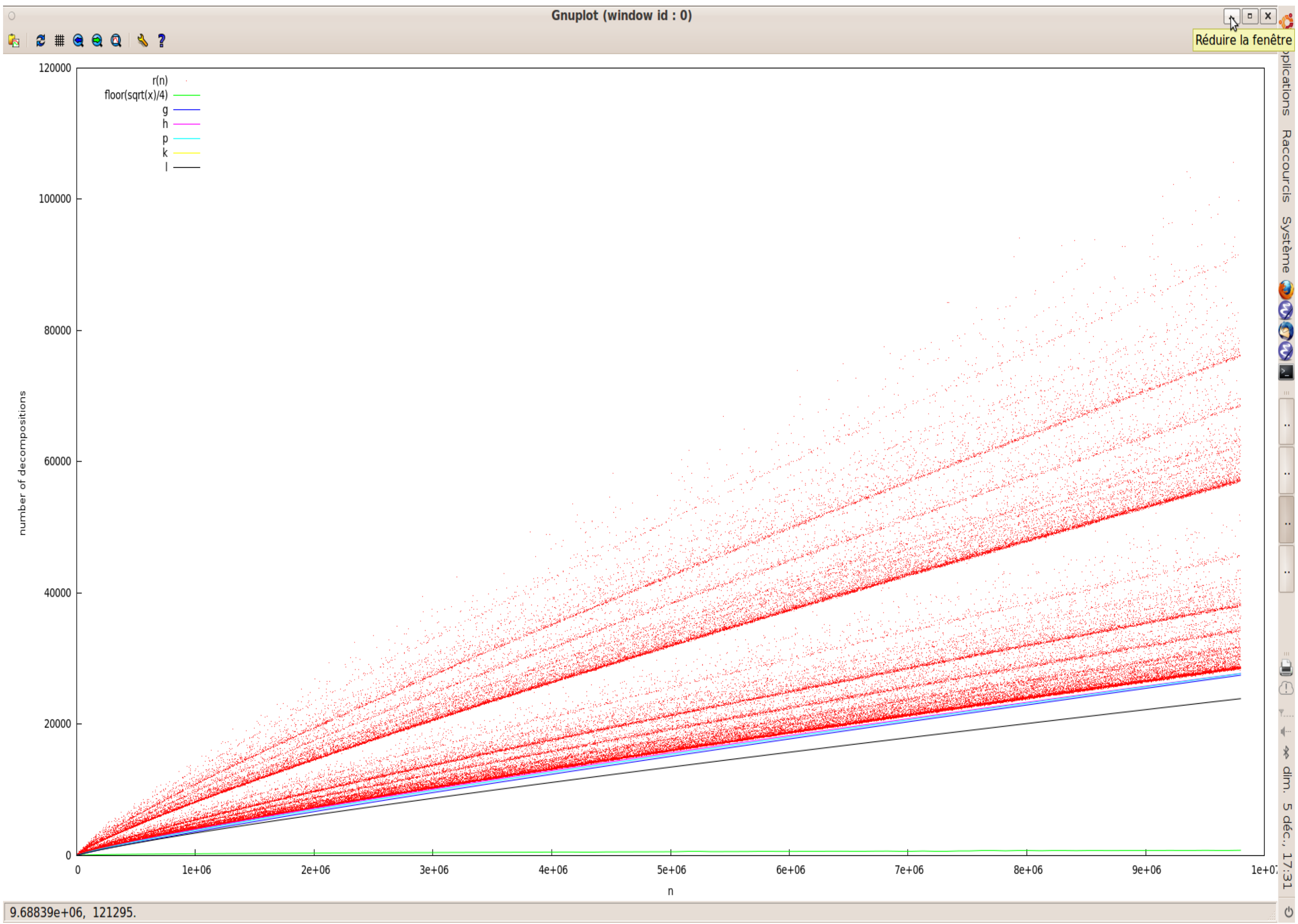
(qui utilise $m = \frac{1}{30}$, 30 étant l'une des premières primorielles et $n = 0.8346268$ qui est la constante de Gauss) et

$$l(2x) = \left\lfloor 0.0261497.x^{0.85260557} \right\rfloor$$

(qui utilise $m = 0.0261497$, la constante de Meissel-Mertens, et $n = 0.85260557$, à nouveau la constante de Niven divisée par 2) semblent également permettre d'obtenir systématiquement une minoration pour tout nombre jusqu'à 10^8.
Enfin, la fonction proposée par D.Diaz :

$$p(2x) = 1,11.B.\frac{x}{log\ x^2}$$

dans laquelle $B = 0.660161815846869573$ est la constante de Brun ne minore pas le nombre de décompositions de Goldbach seulement 18 fois jusqu'à 10^8.


Gnuplot (window id : 0)
Réduire la fenêtre
r(n)
floor(sqrt(x)/4)
g
h
p
k
l
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
number of decompositions
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
n
9.68839e+06, 121295.
Raccourcis
Système

Bibliographie

(1) Bernard TEISSIER, *Crible de Brun*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, no 2 (1965-1966), exp. no 11, p. 1-13., consultable à l'adresse $http : //www.numdam.org/item?id = SDPP\_1965 - 1966\_\_7\_2\_A1\_0$

Quelques comètes : indicatrice d'Euler, somme des diviseurs, nombre de décompositions de Goldbach...

Denise Vella-Chemla

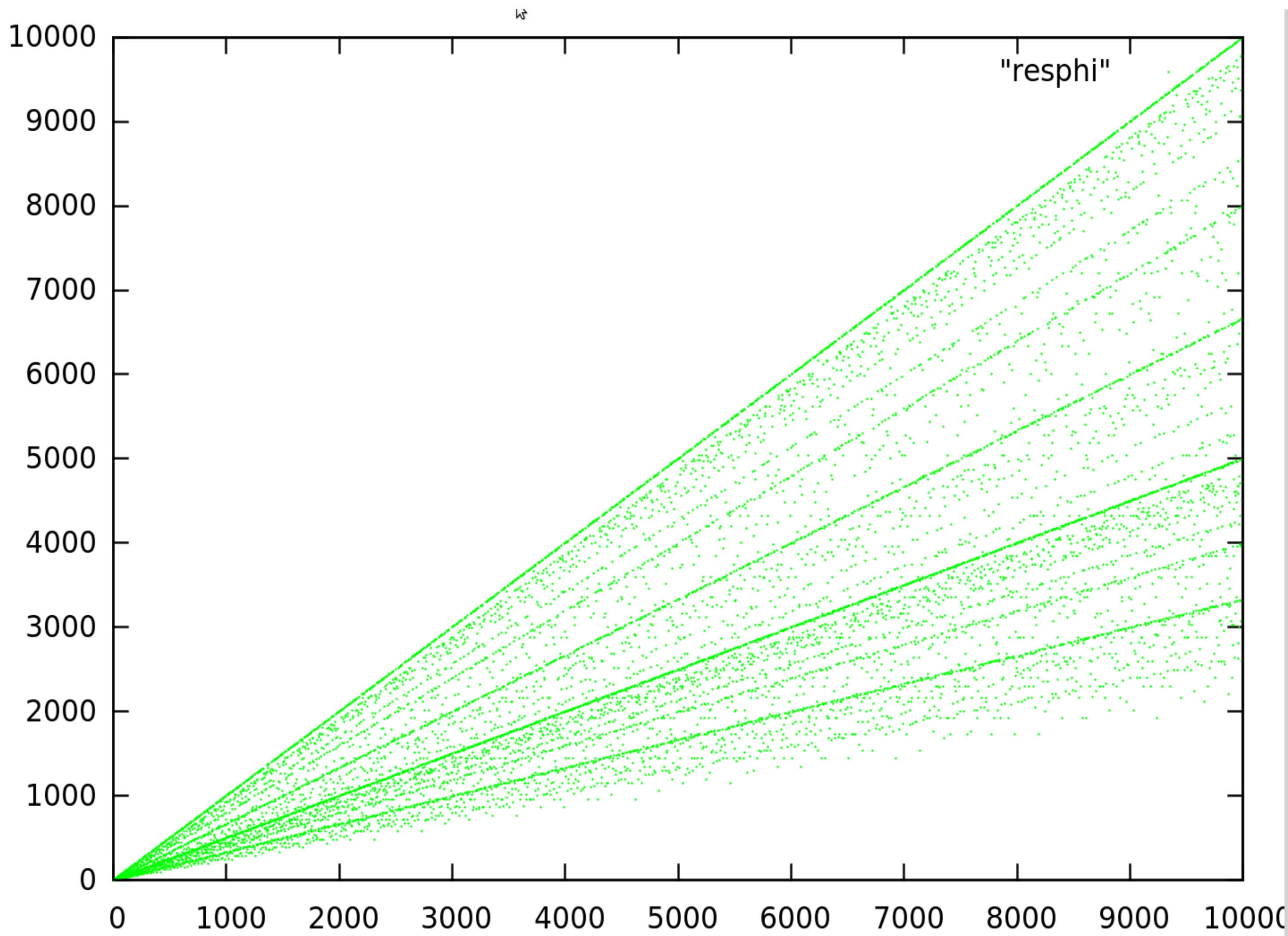
25 décembre 2010

1 Cinq comètes

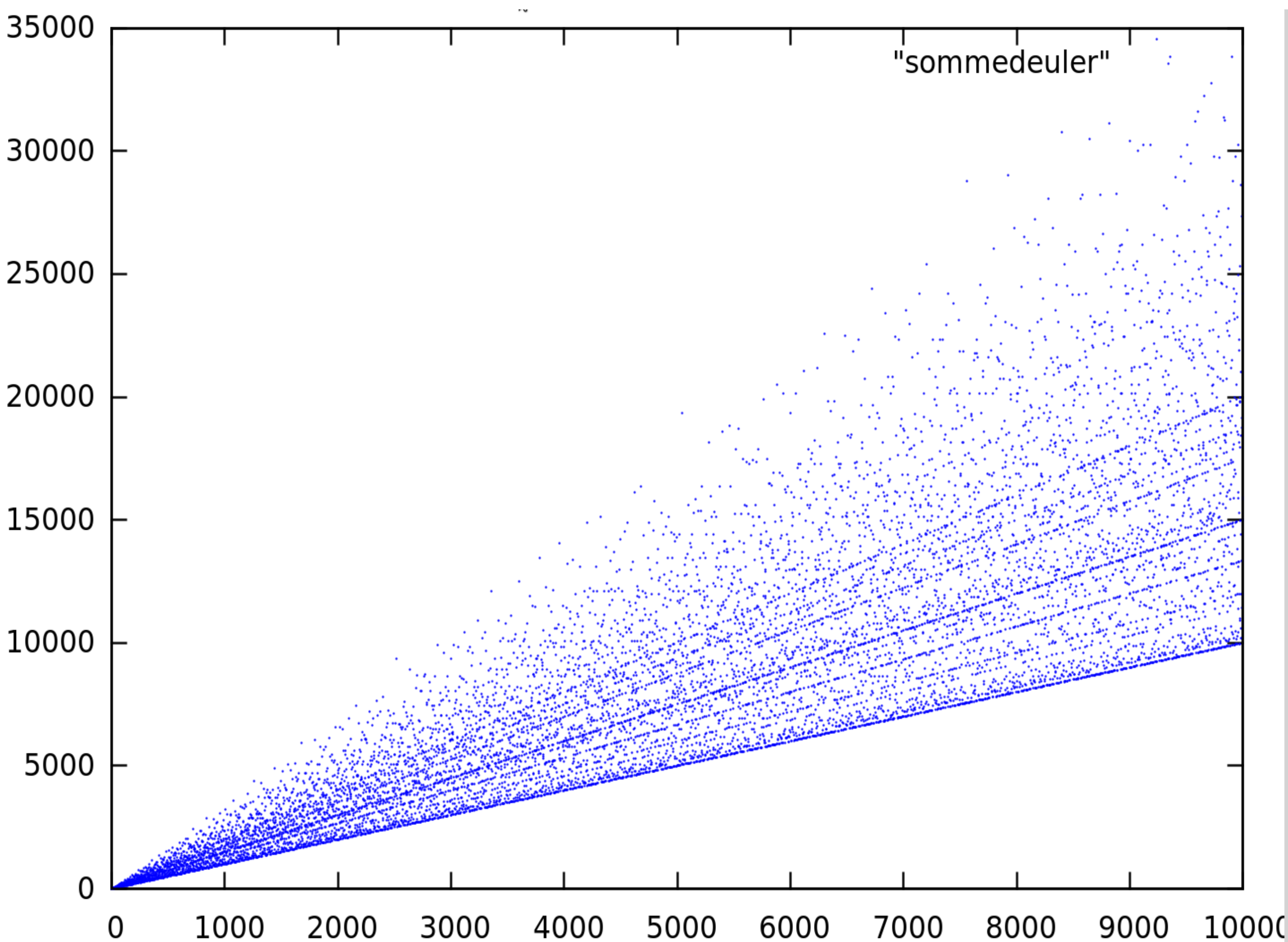
Les cinq graphiques ci-dessous, obtenus avec gnuplot, présentent les fonctions :

- indicatrice d'Euler (φ),
- somme des diviseurs d'Euler (σ). Une formule de calcul par récurrence de cette somme est fournie dans l'article "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs". Nous avons utilisé pour la calculer une autre formule de récurrence, fournie par Dominique Giard sur la toile dans la séquence A000203 de l'Encyclopédie en ligne des séquences d'entiers (OEIS),
- nombre de diviseurs,
- plus petit décomposant de Goldbach, i.e. associe à $2n$ le plus petit nombre premier tel que $2n = p + q$ avec p et q premiers,
- plus grand décomposant de Goldbach, i.e. associe à $2n$ le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n tel que $2n = p + q$ avec p et q premiers,
- et enfin, nombre de décompositions de Goldbach, i.e. nombre de façons différentes d'écrire un nombre pair $2n$ comme somme de deux nombres premiers.

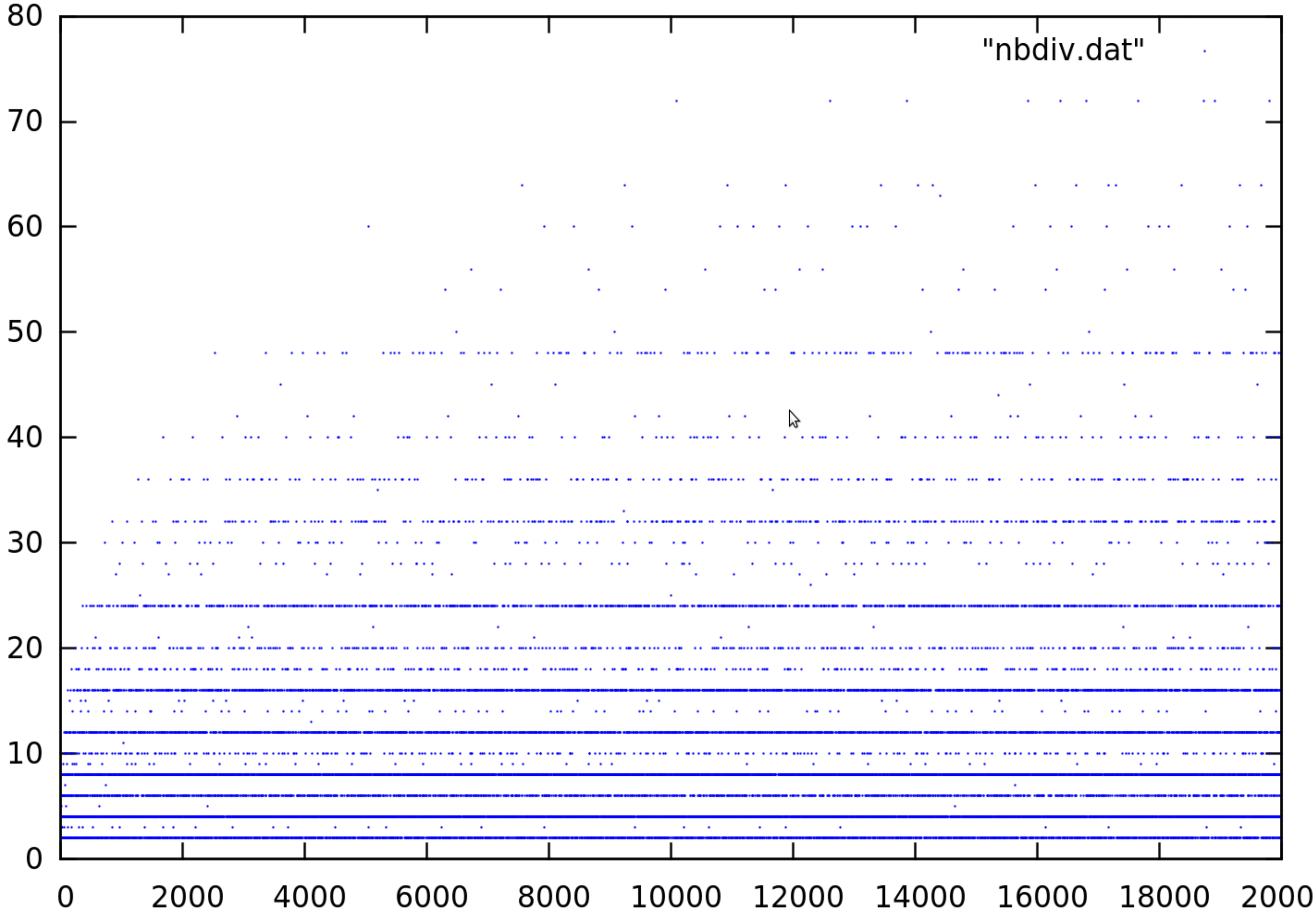
Toutes ces visualisations ont pu être réalisées grâce à des outils spécifiques fournis par Daniel Diaz, concepteur de Gnu-Prolog, que l'on remercie vivement.



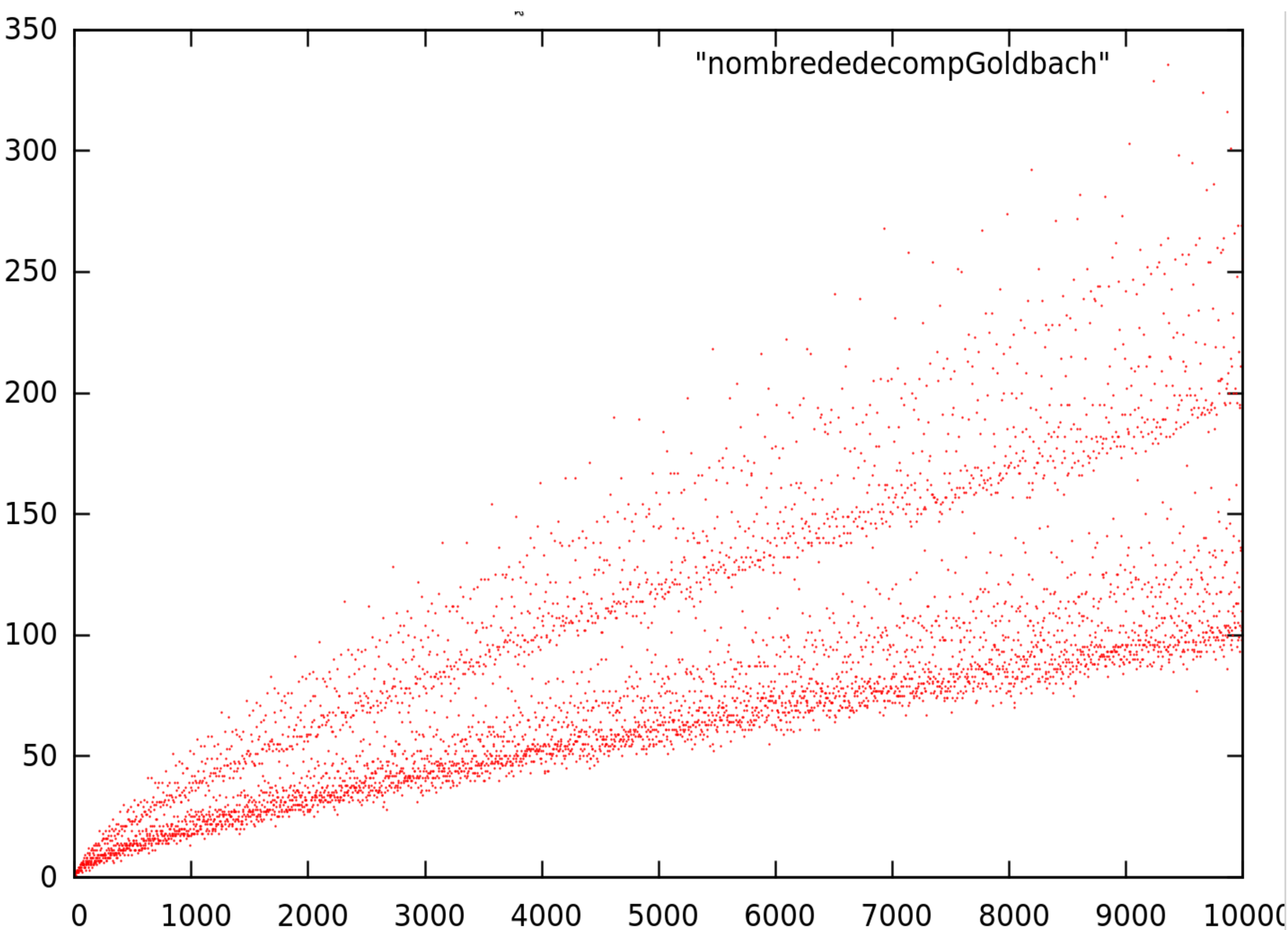
"resphi"
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

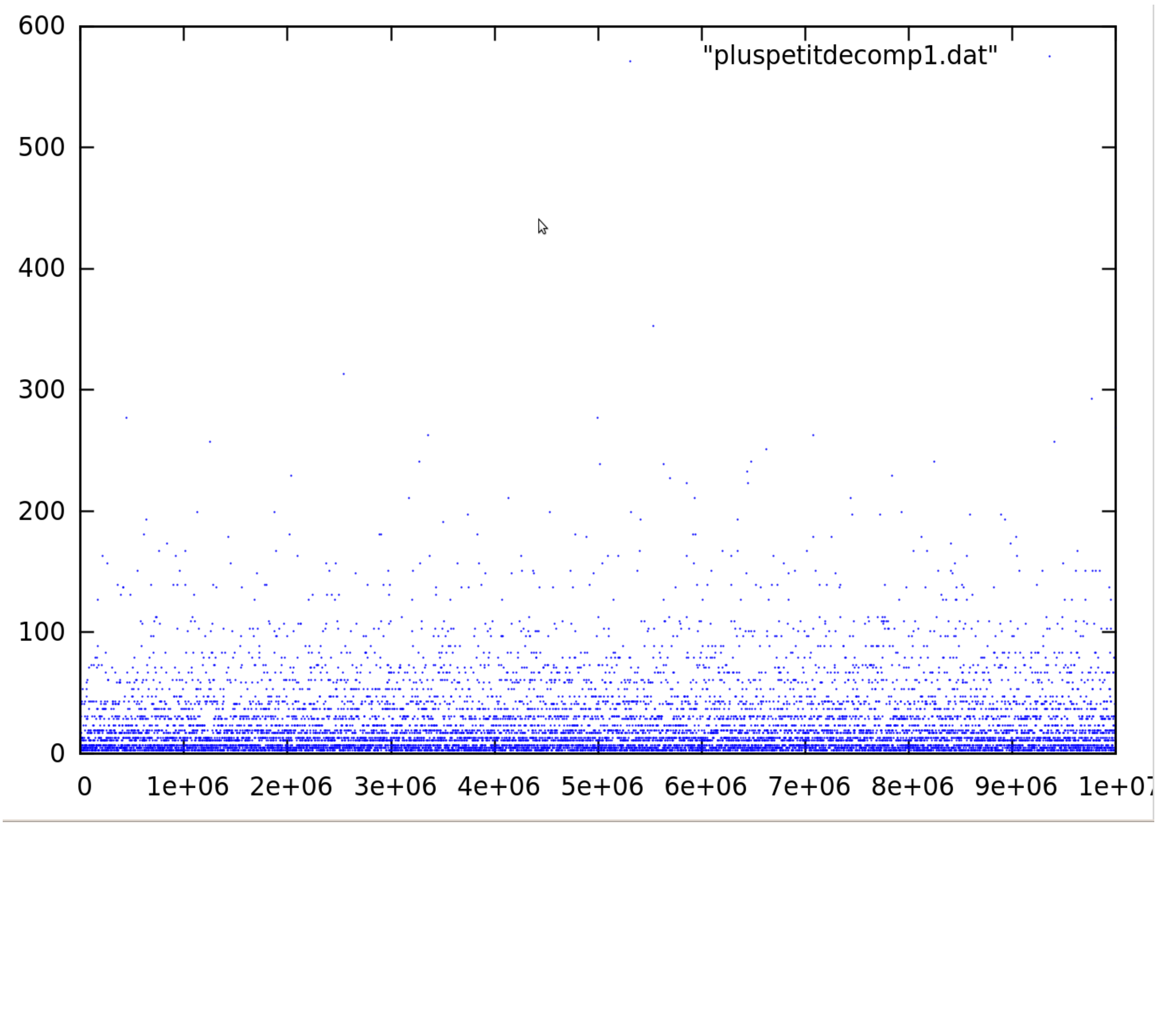


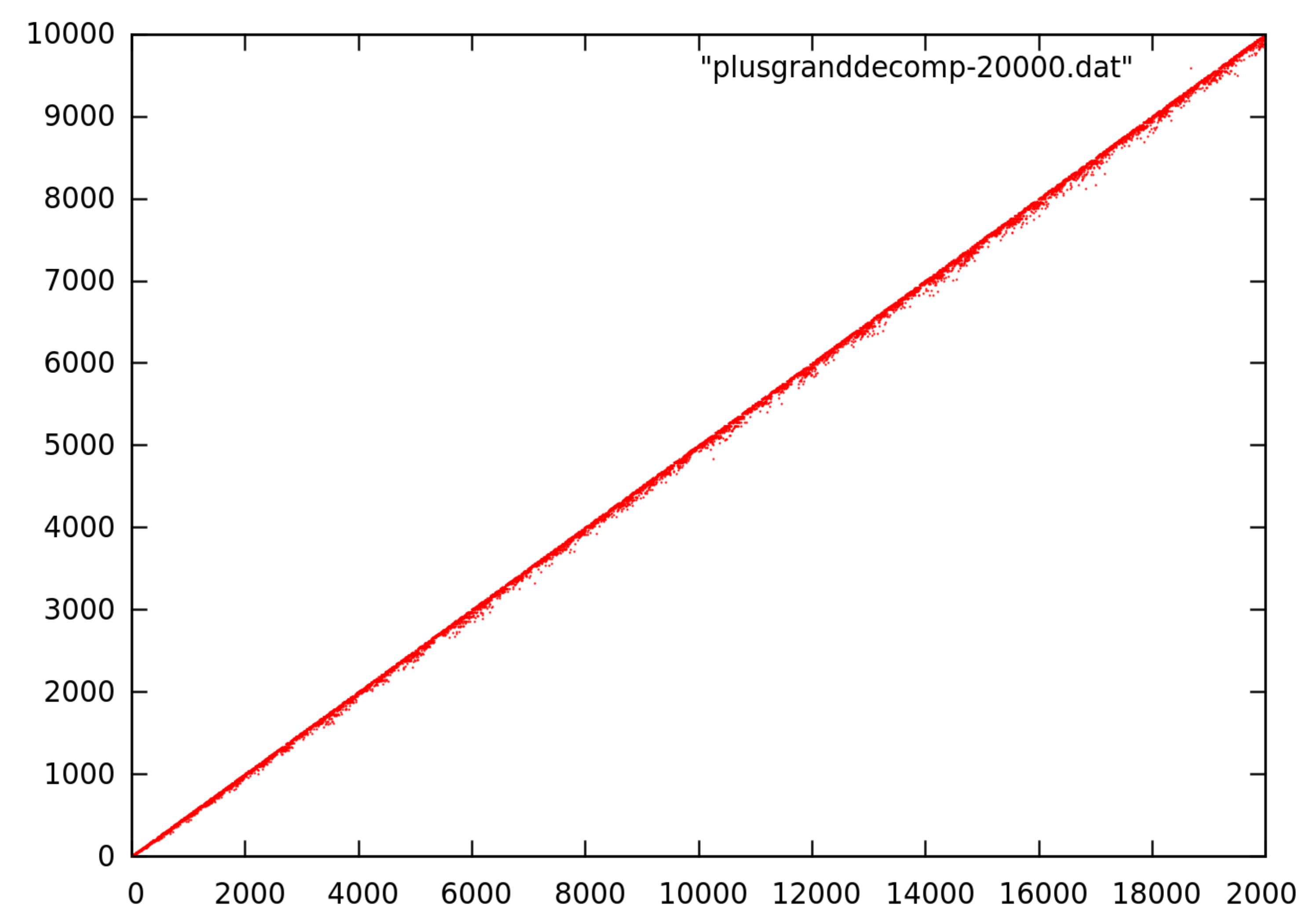
"sommedeuler"
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000



"nbdiv.dat"
0
10
20
30
40
50
60
70
80
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000


"nombrededecompGoldbach"
350
300
250
200
150
100
50
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

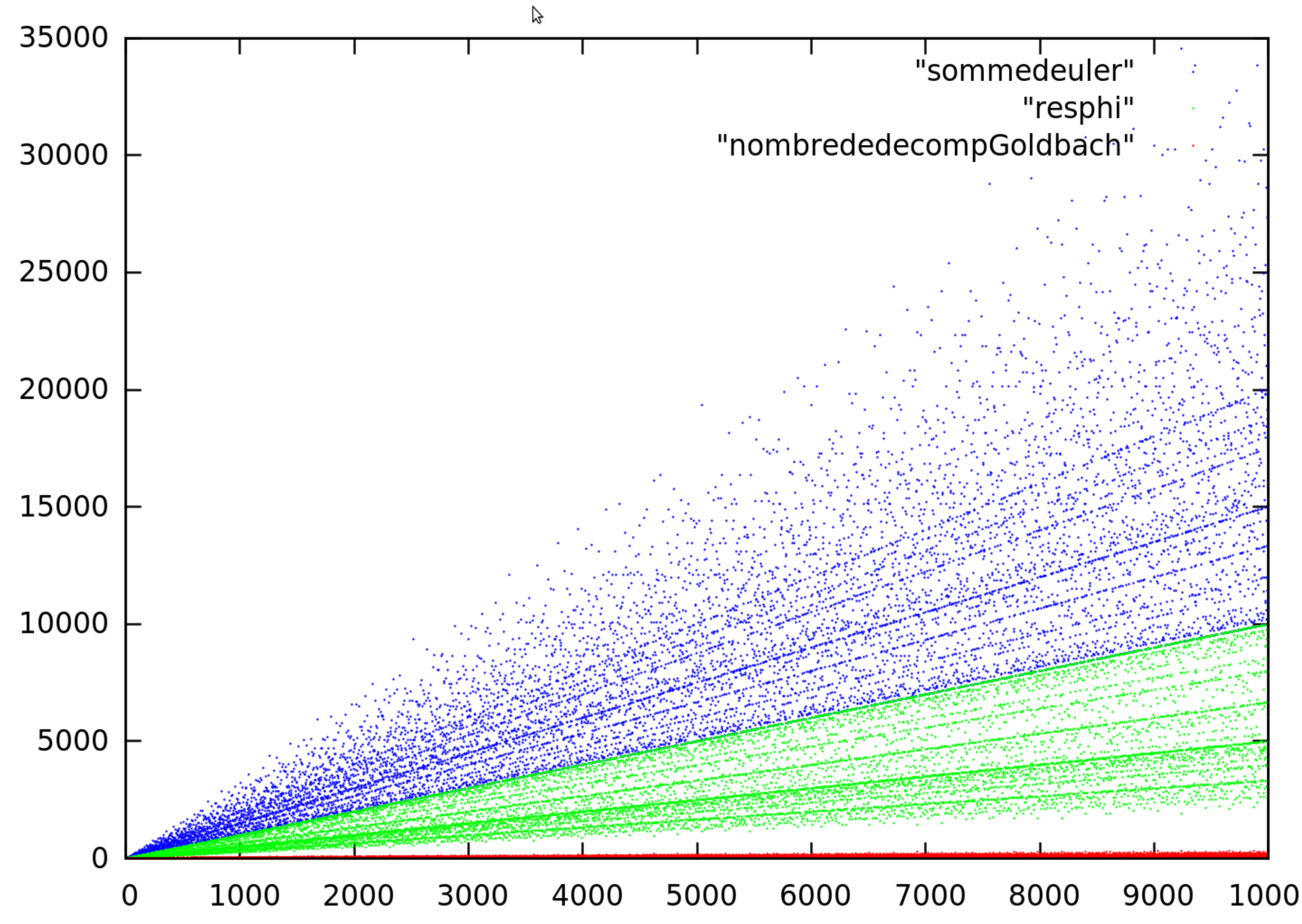

600
500
400
300
200
100
0
"pluspetitdecomp1.dat"
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07



"plusgranddecomp-20000.dat"
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

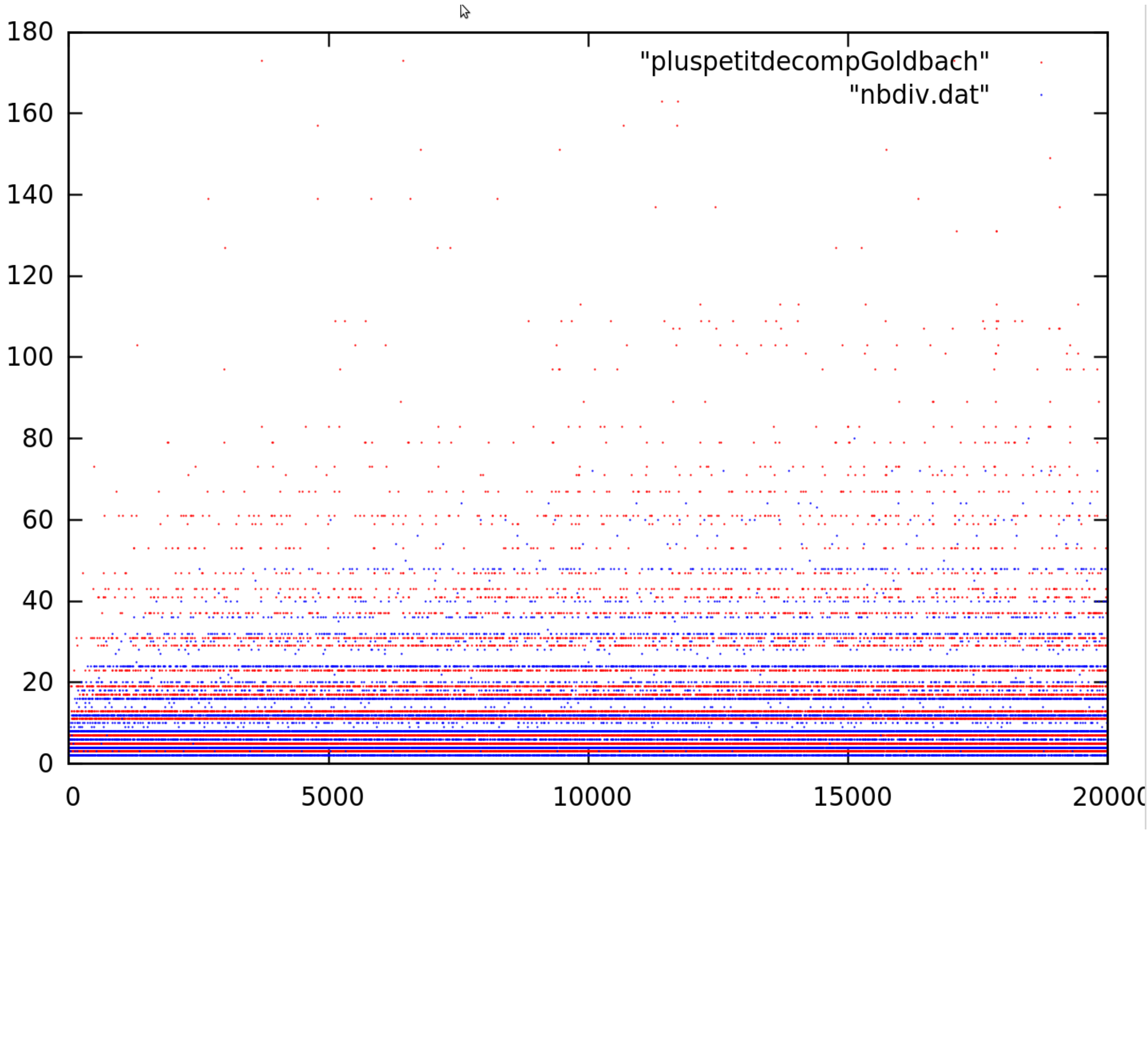
On constate que la comète de la fonction φ semble comme inversée par rapport aux comètes de σ ou $Nombre\_de\_décompositions\_de\_Goldbach$, des bandes de points plus concentrés apparaissant “à l'intérieur” de la comète, la “première” d'entre elles se trouvant “tout en haut” de la comète.

Les deux comètes de σ et $Nombre\_de\_décompositions\_de\_Goldbach$ semblent présenter une structure similaire, même si l'apparence de celle de la somme des diviseurs est plus linéaire que celle du nombre des décompositions de Goldbach. Si on ramène les trois premières comètes sur un même graphique, la comète des nombres de décompositions de Goldbach se retrouve tout en bas, comme écrasée, car ses valeurs sont bien moindres que celles des deux autres comètes.



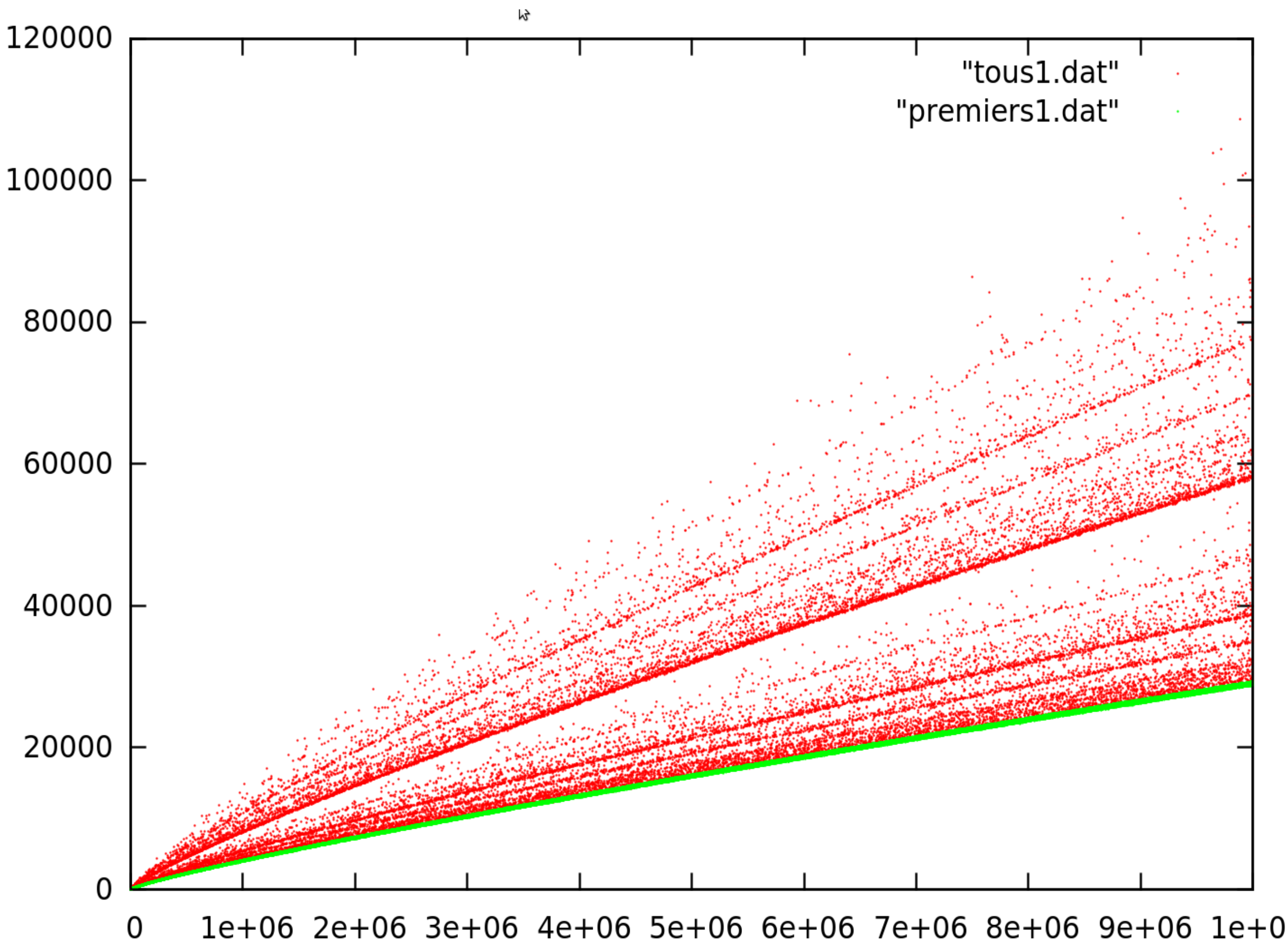
"sommedeuler"
"resphi"
"nombrededecompGoldbach"
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

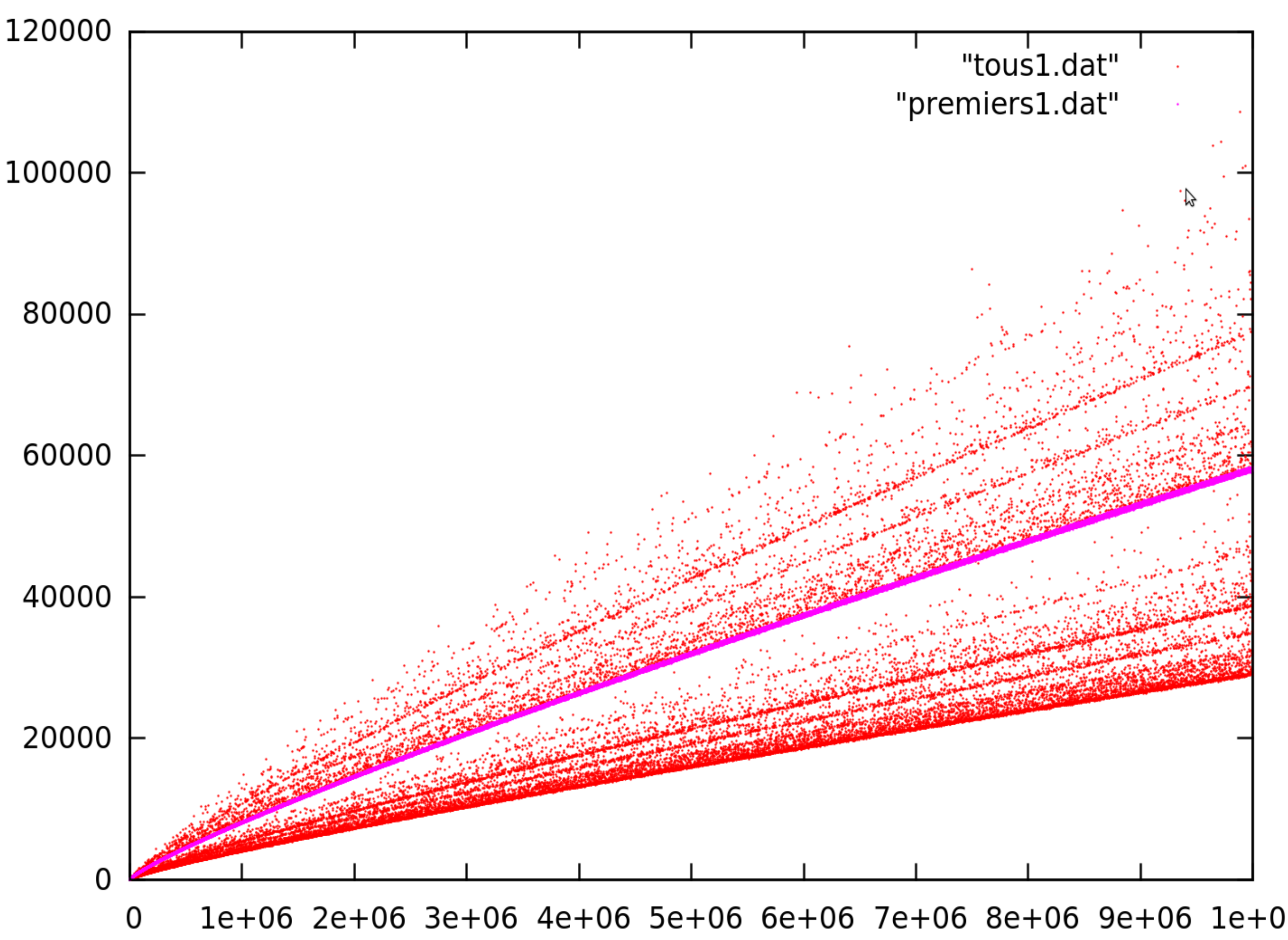
On constate que les comètes associées au nombre de diviseurs et au plus petit décomposant de Goldbach se “ressemblent”. Visualisons-les sur un même graphique ci-dessous :


"pluspetitdecompGoldbach"
"nbdiv.dat"
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
0
5000
10000
15000
20000

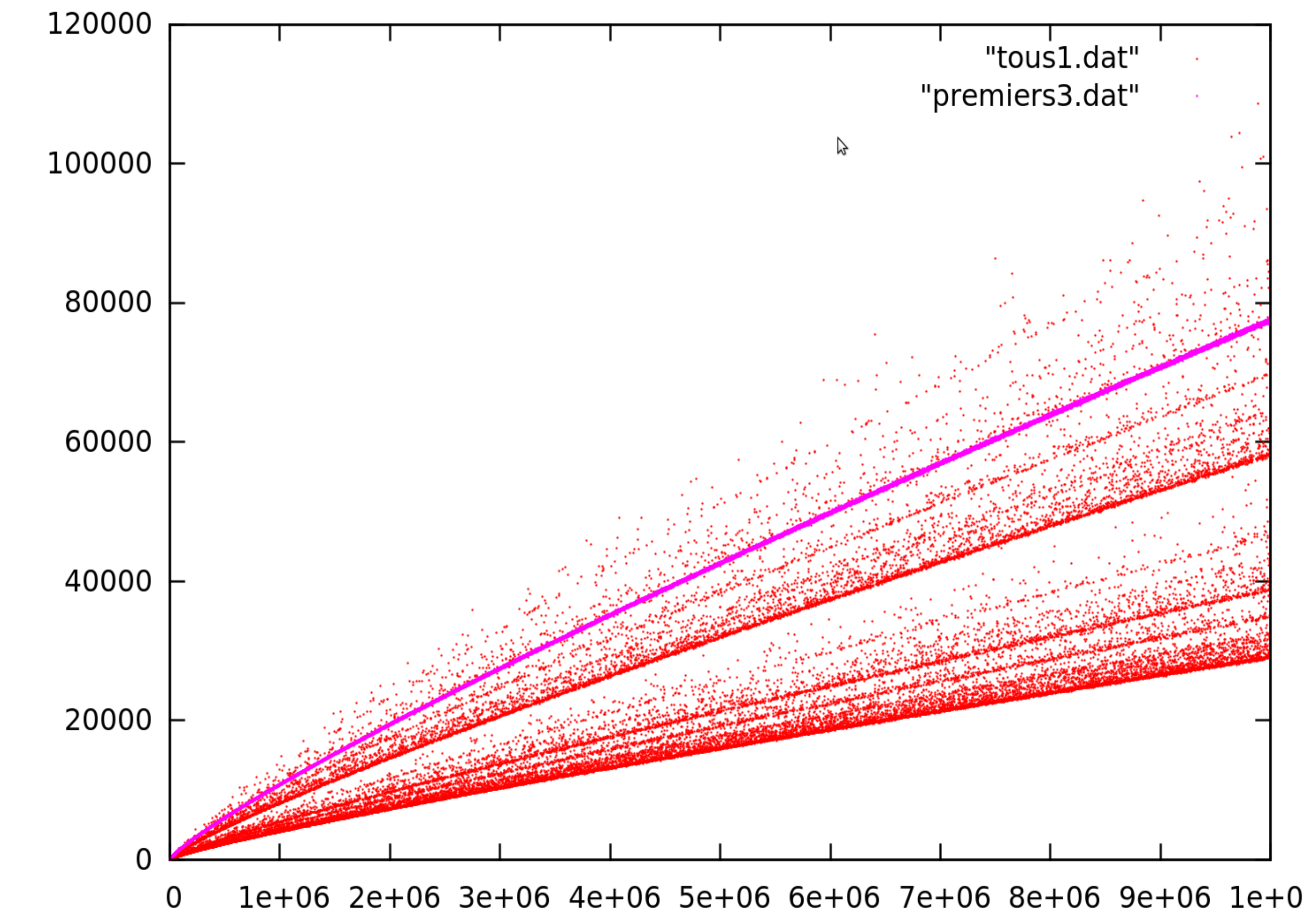
2 Mathématiques expérimentales

Dans la comète de Goldbach, on réussit à isoler les lignes de concentration des points qui correspondent aux nombres de décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier.


"tous1.dat"
"premiers1.dat"
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07

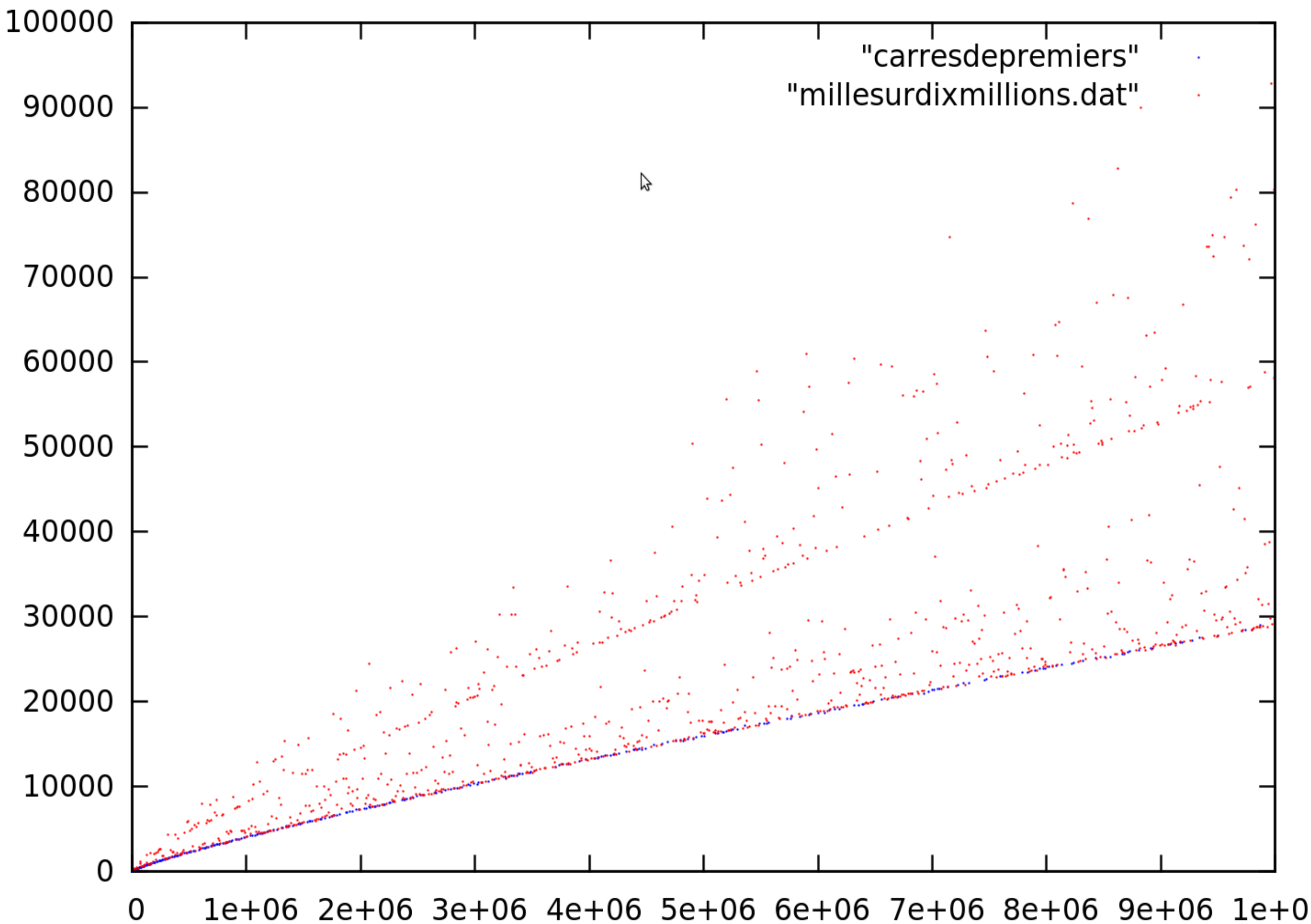


120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
"tous1.dat"
"premiers1.dat"



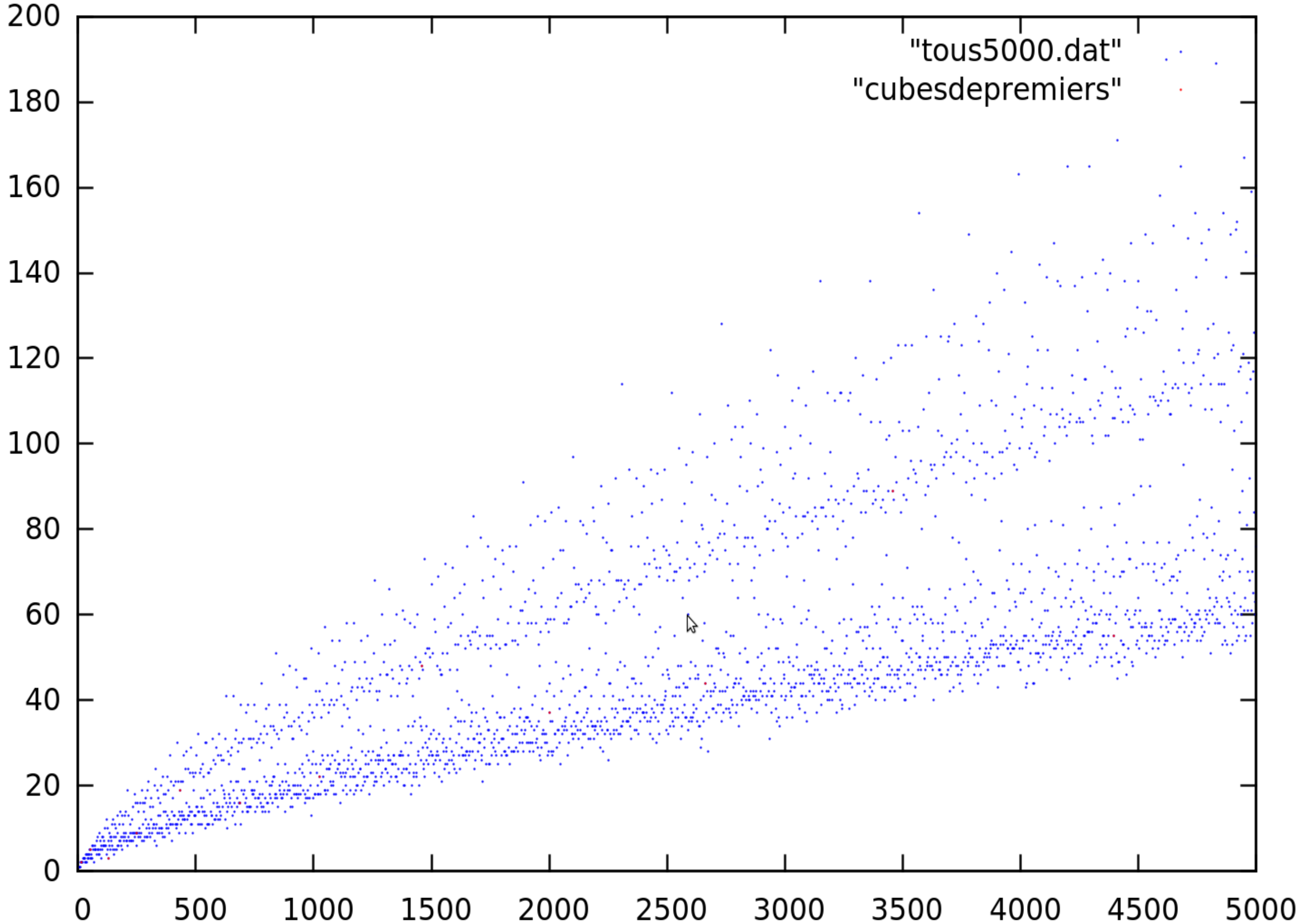
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
"tous1.dat"
"premiers3.dat"

On pense qu'on obtiendra également certaines concentrations de points par l'élévation à la puissance des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation ci-après : les décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la tige basse de la gerbe.


"carresdepremiers"
"millesurdixmillions.dat"
100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07

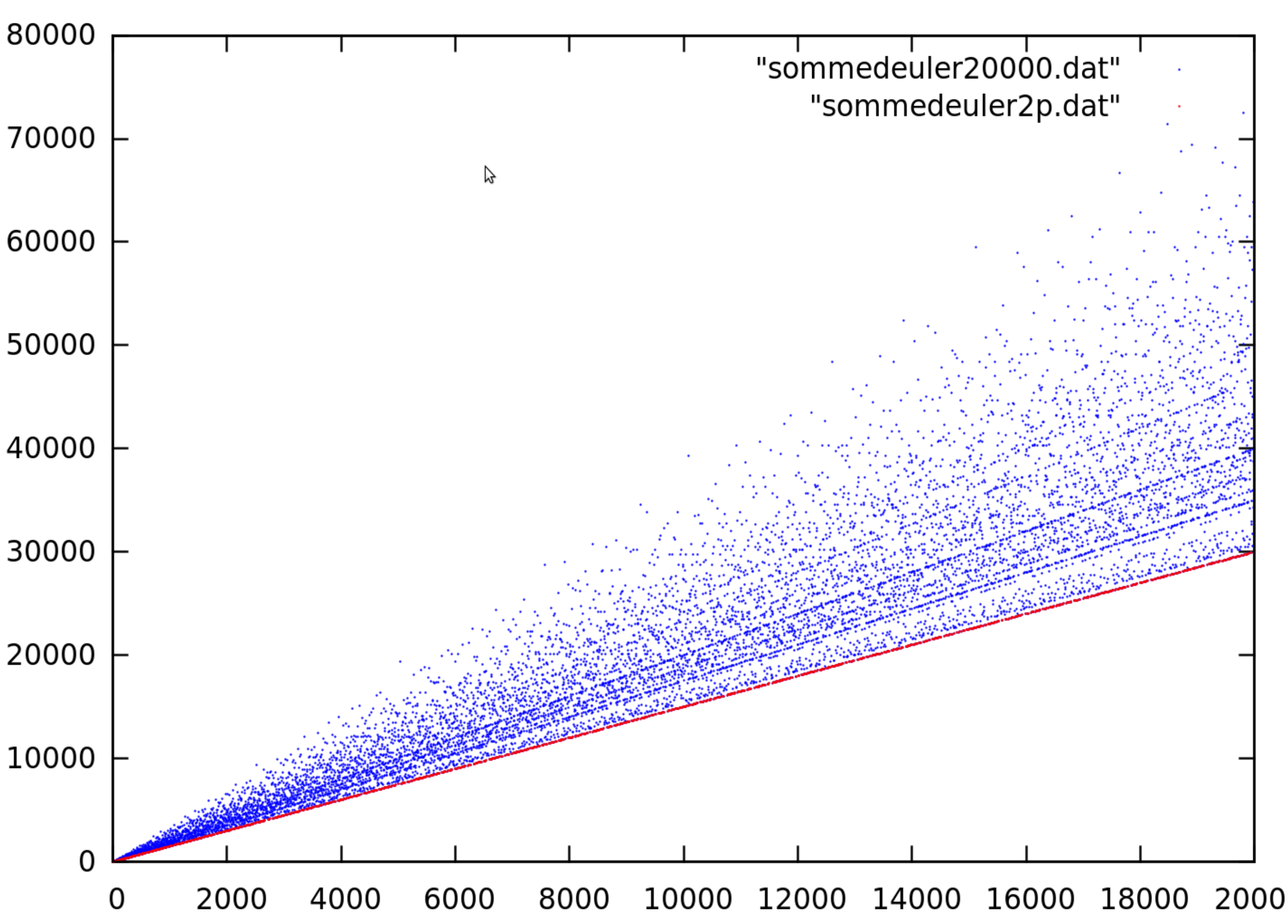
Quant aux décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p^3$ avec p premier par exemple, ils semblent se trouver sur les mêmes tiges que les nombres de la forme $2p$ ou $6p$ mais il faudrait le confirmer. Sur le graphique suivant, on voit les douze points rouges correspondant aux nombres de décompositions des doubles de cubes[1].

[1]Il n'y a que 12 petits points rouges à retrouver sur la tige des $2p$ et sur celle des $6p$ en s'arrachant un peu les yeux mais les zooms-écrans permettent de les retrouver aisément.

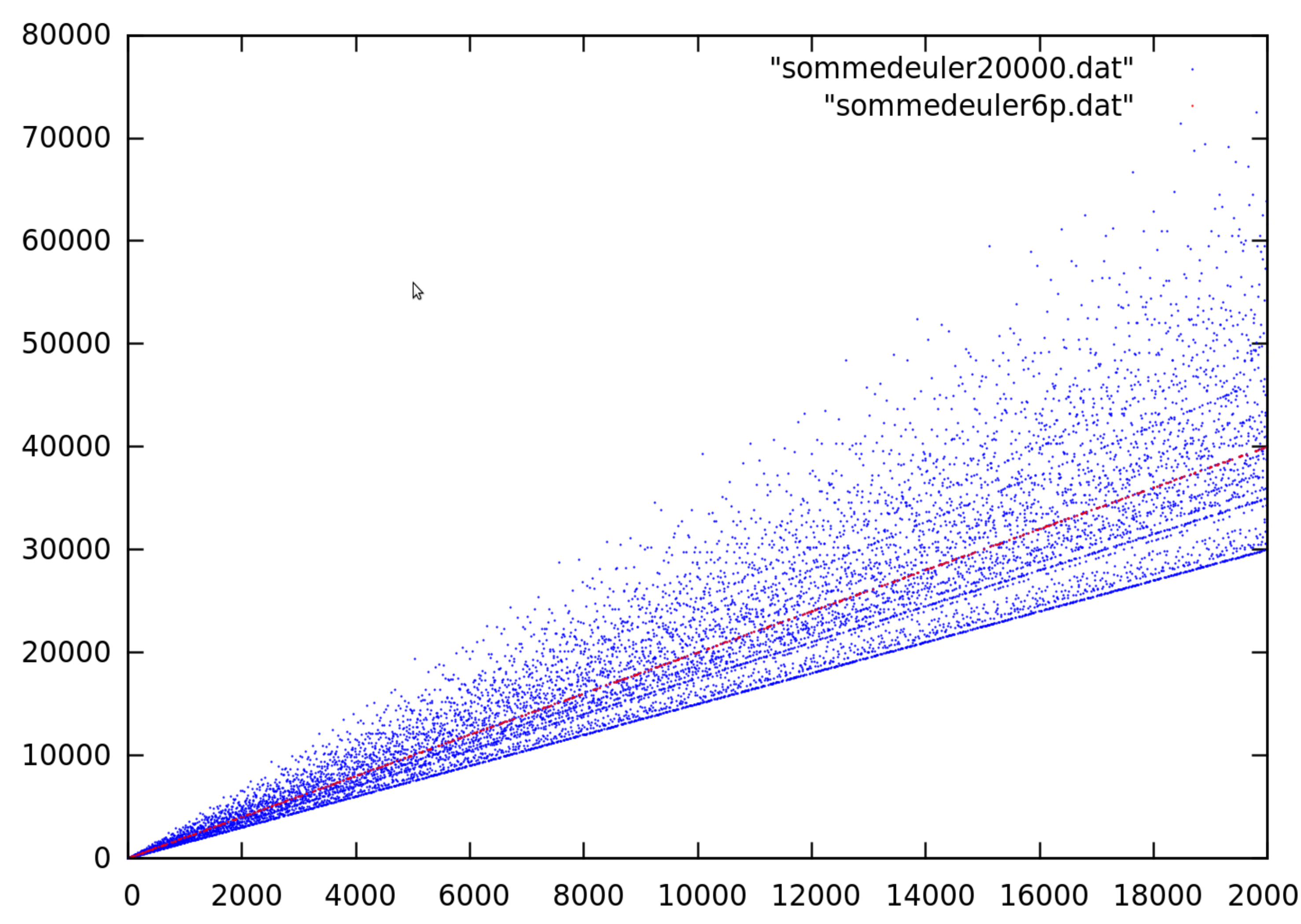


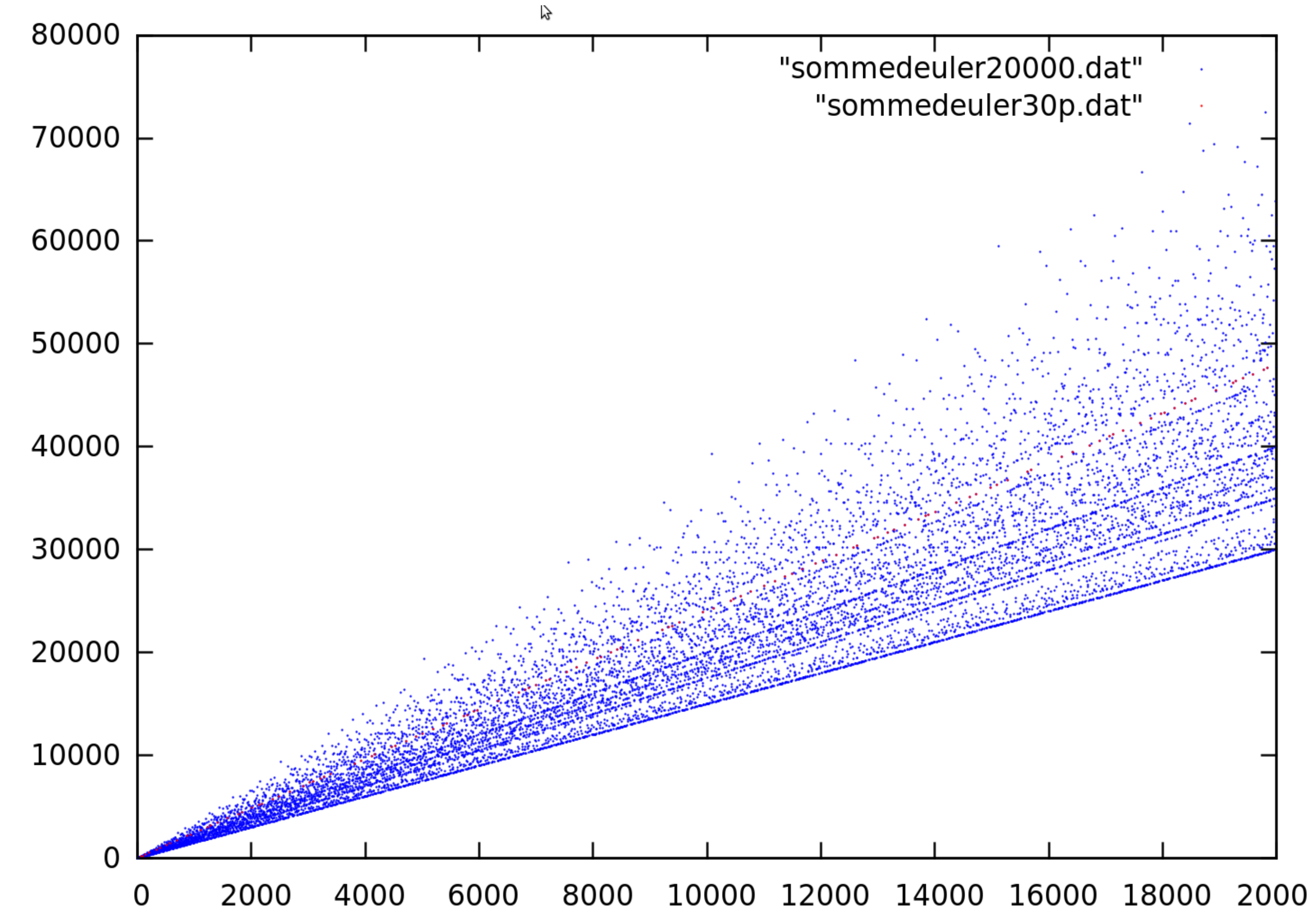
"tous5000.dat"
"cubesdepremiers"
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000

Dans la comète de la somme des diviseurs d'Euler, on réussit à reproduire les mêmes concentrations de points qui correspondent aux sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier.



"sommedeuler20000.dat"
"sommedeuler2p.dat"
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

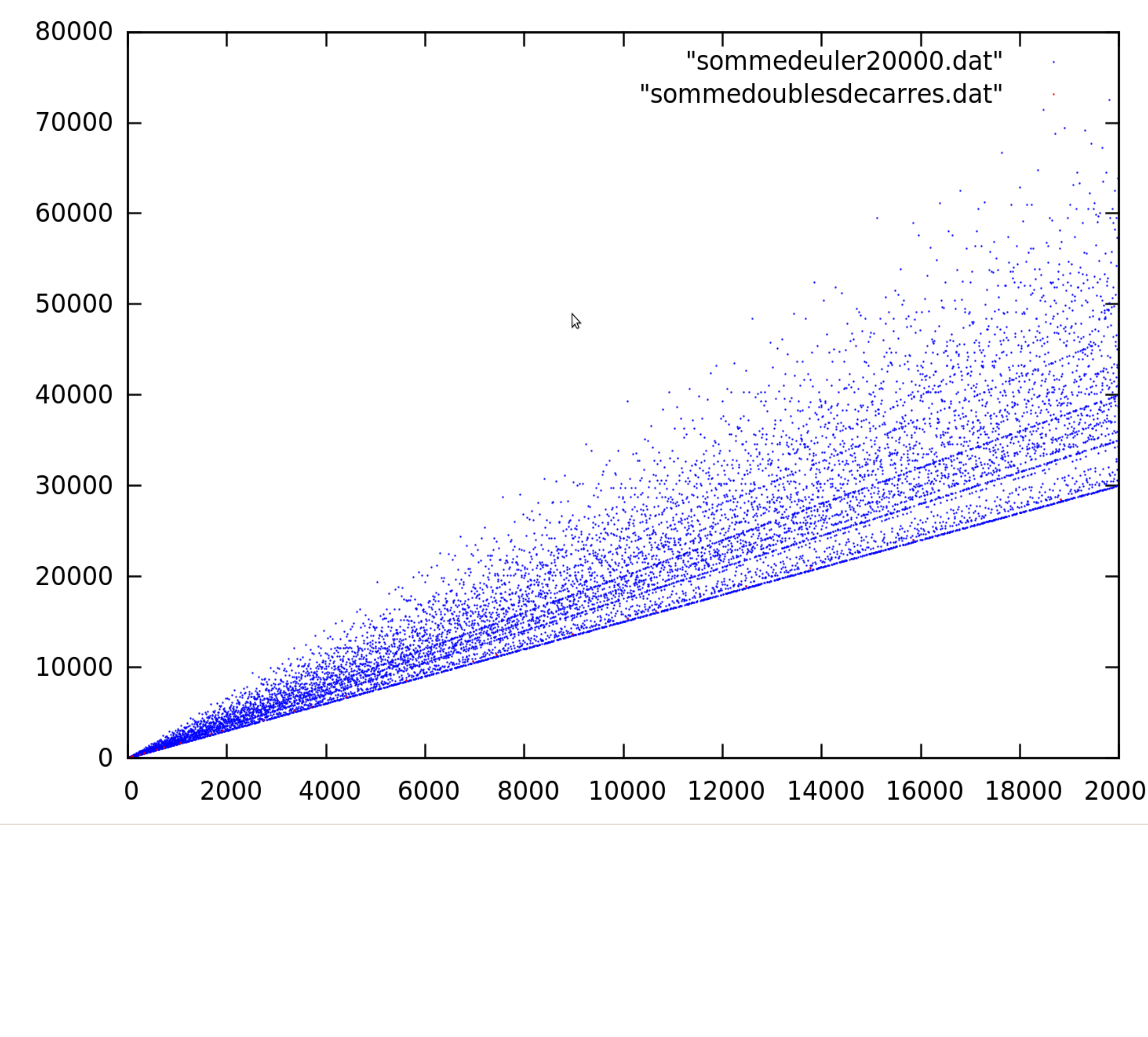

80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000
"sommedeuler20000.dat"
"sommedeuler6p.dat"



80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000
"sommedeuler20000.dat"
"sommedeuler30p.dat"

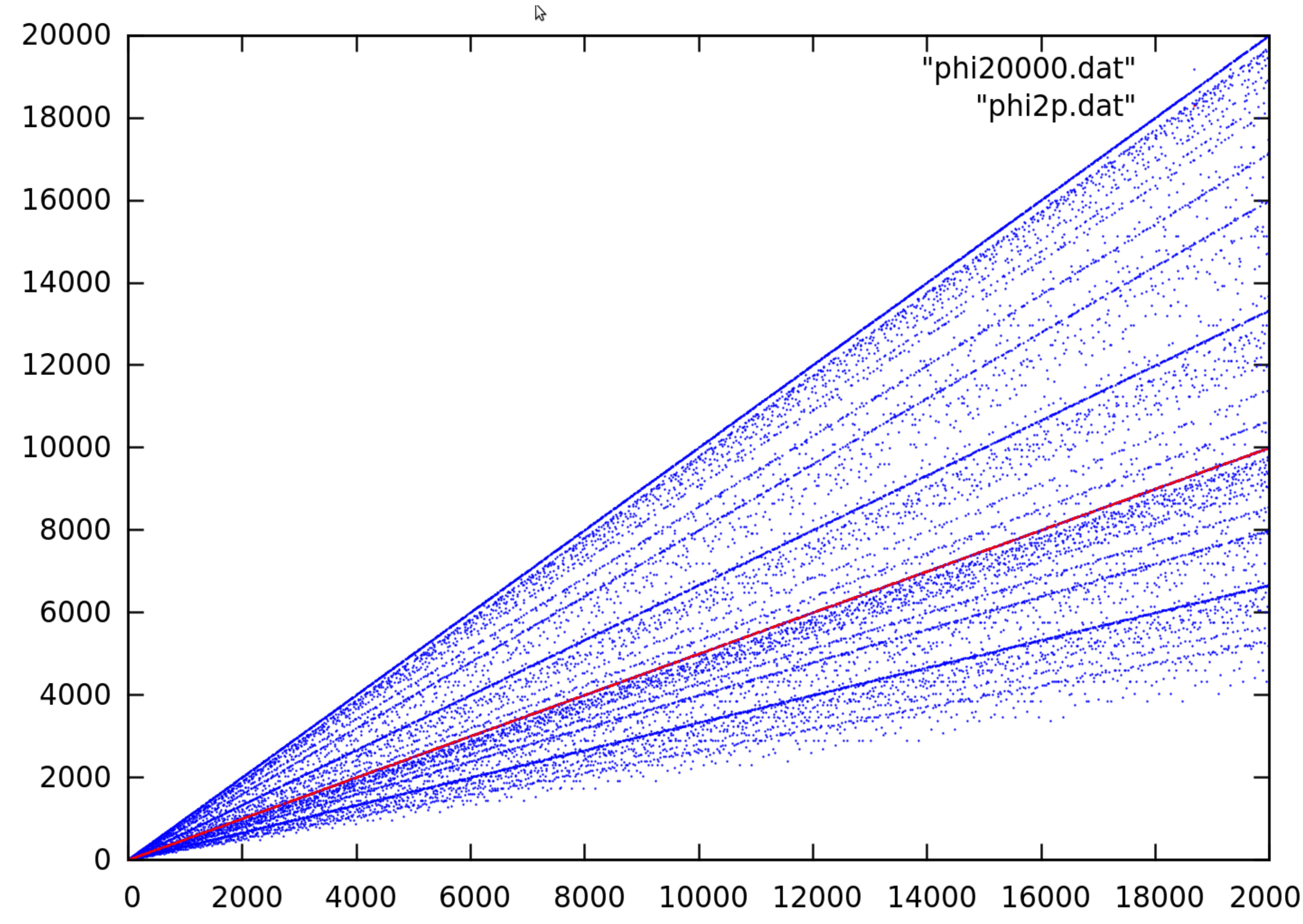
On reproduit également la concentration de points par l'élévation au carré des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation ci-après : les sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la tige basse de la gerbe[2].

[2]Il n'y a que 25 petits points rouges à retrouver sur la tige basse ; à nouveau, les zoom-écrans ne laissent pas de place au doute...

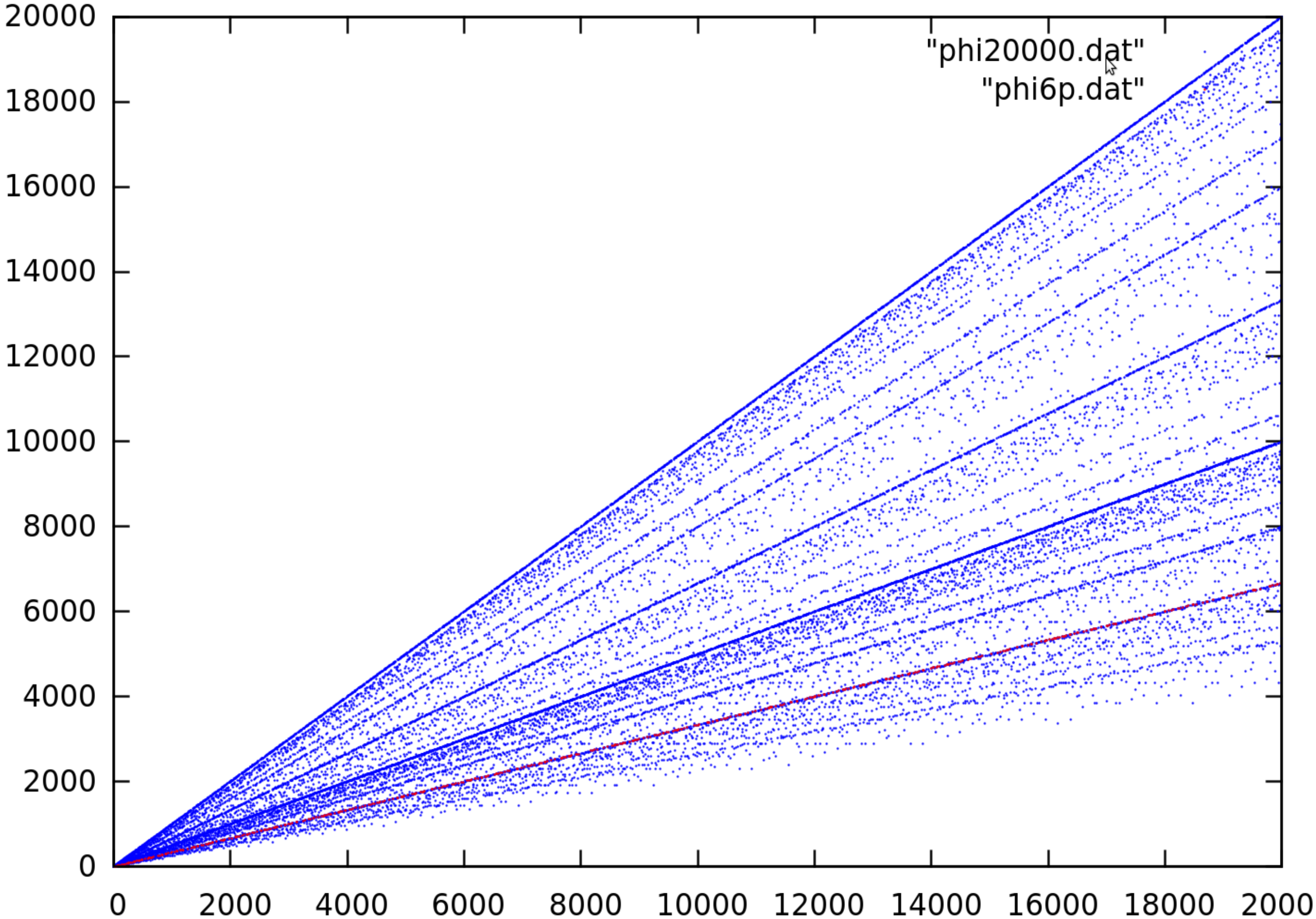


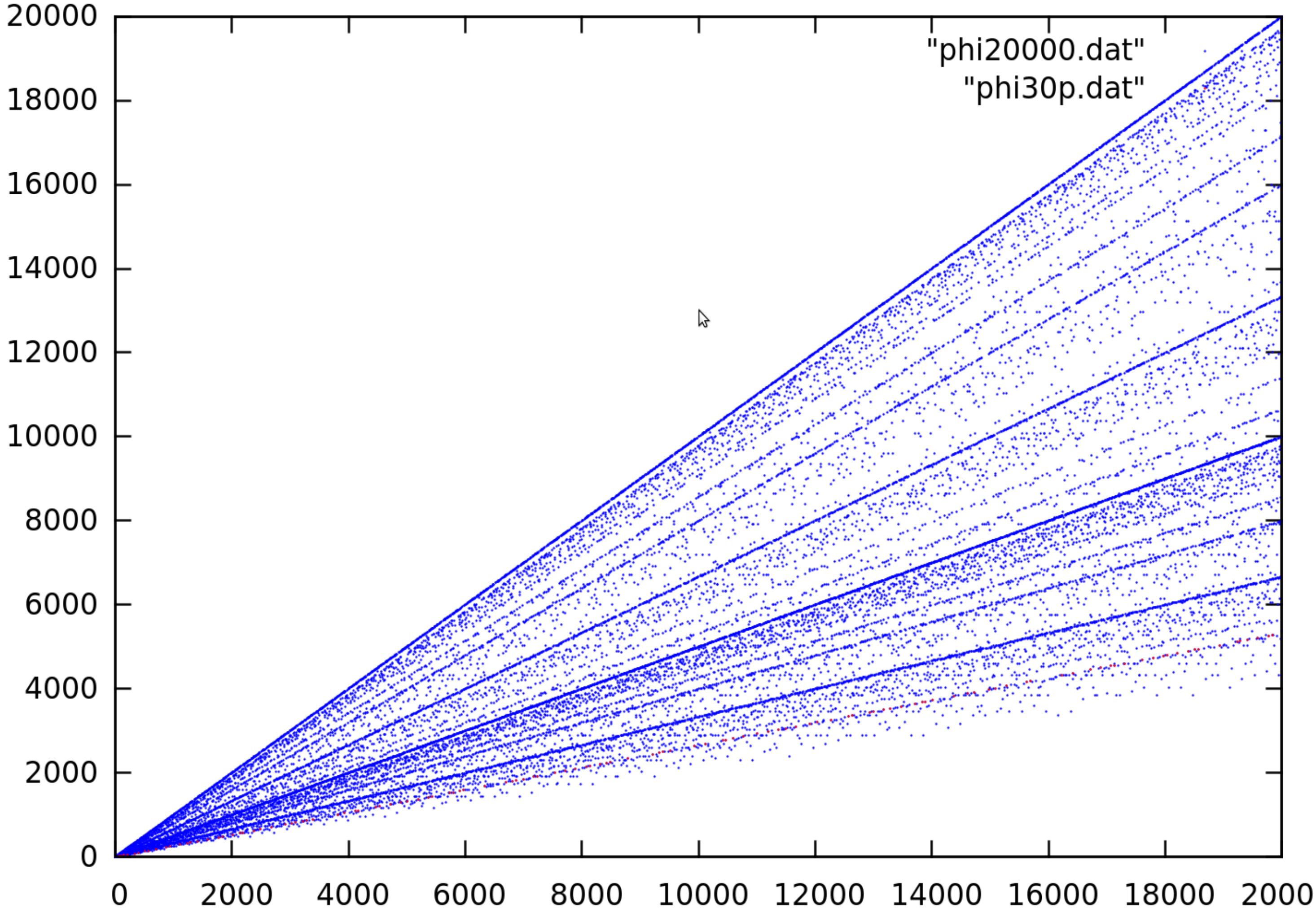
"sommedeuler20000.dat"
"sommedoublesdecarres.dat"
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

Dans la comète de l'indicatrice d'Euler, on réussit à produire des concentrations de points qui correspondent aux sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier (les $2p$ sont à peu près au milieu de la comète, les $6p$ plus bas et les $30p$ encore plus bas).

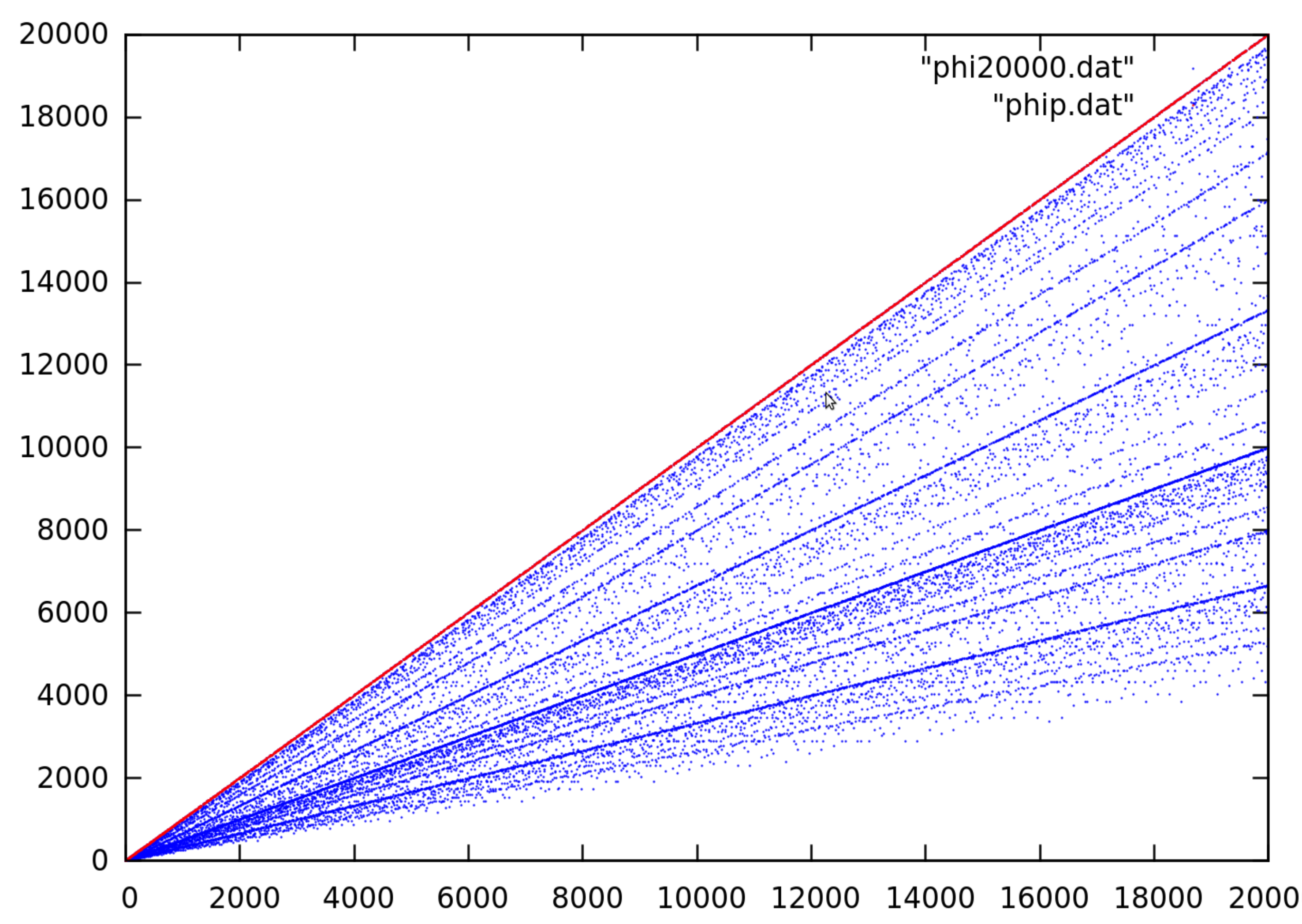


"phi20000.dat"
"phi2p.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000


"phi20000.dat"
"phi6p.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

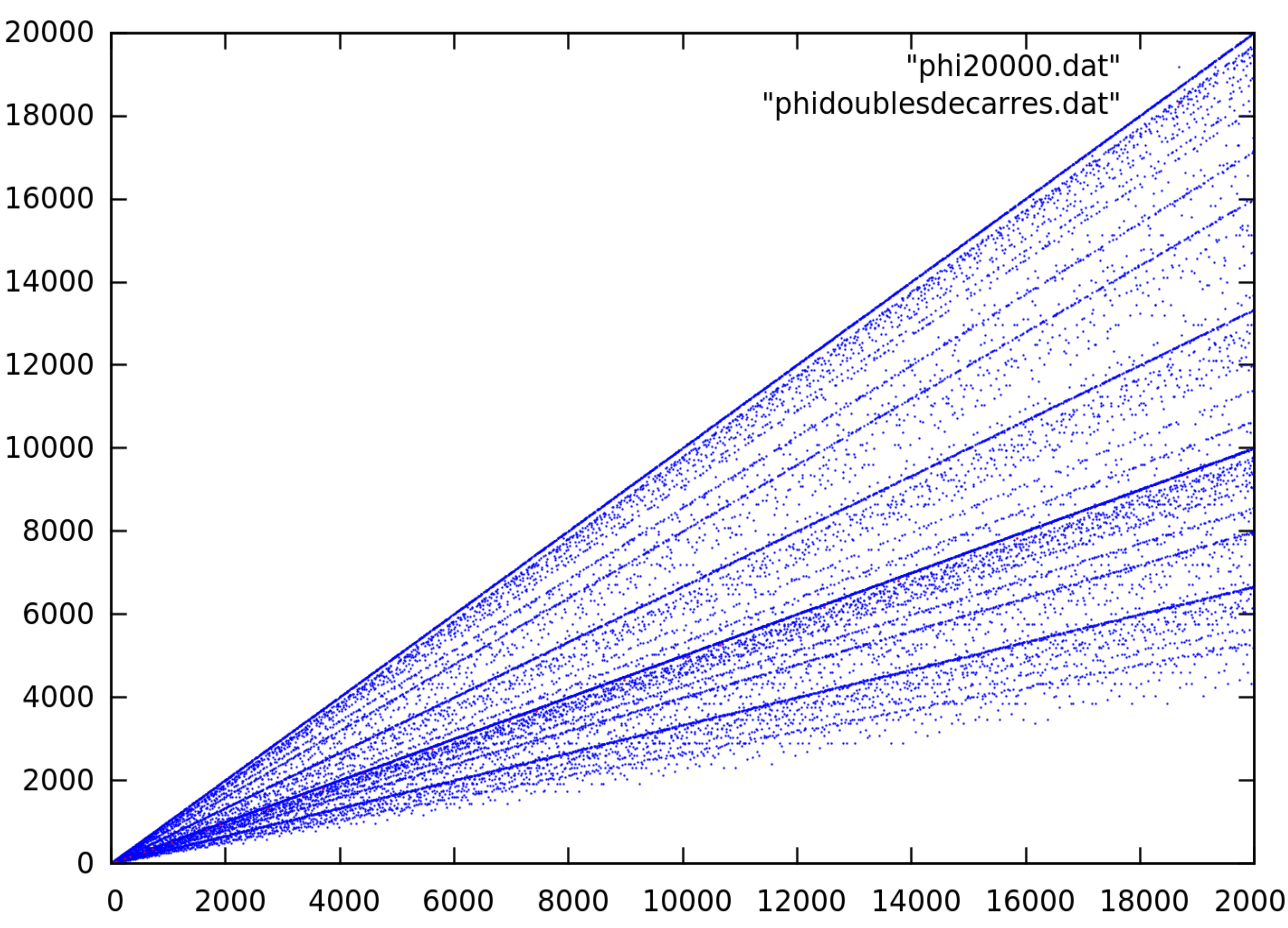

"phi20000.dat"
"phi30p.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

Ce sont les points d'abscisse p qui semblent fournir la limite haute de la comète de φ.


"phi20000.dat"
"phip.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

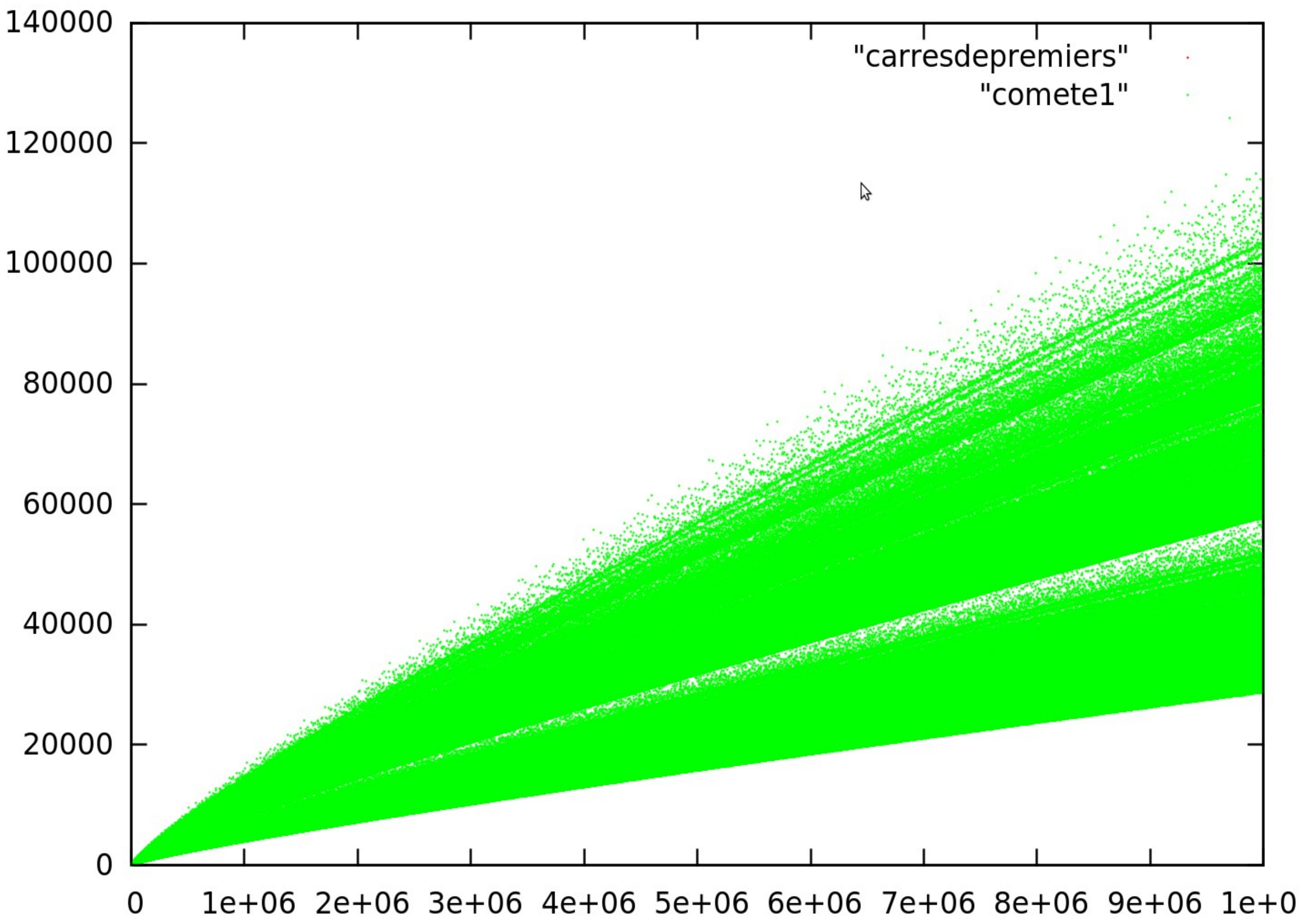
On reproduit enfin la concentration de points par l'élévation au carré des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation ci-après : les sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la même tige de la gerbe que les $2p^3$.

[3] Il y a quelques petits points rouges à retrouver sur la tige des $2p$; à nouveau, les zoom-écrans ne laissent pas de place au doute...



"phi20000.dat"
"phidoublesdecarres.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

Pour que ces visualisations soient lisibles, on doit comprendre que les outils permettent de n'afficher qu'un certain nombre de points pris au hasard dans un fichier de données. Si l'on choisit d'afficher tous les nombres de décompositions, on obtient le graphique ci-dessous, ininterprétable.



140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
"carresdepremiers"
"comete1"

Fournissons quelques valeurs du nombre de décompositions de Goldbach des doubles de premiers (qui fournissent les valeurs minimales, en bas de la comète).

n	$NbDecompG(n)$	$Log(n)$
$9999998 \sim 10^7$	28983	7
$19999982 \sim 2.10^7$	53364	7.3
$29999962 \sim 3.10^7$	75777	7.47
$39999998 \sim 4.10^7$	97514	7.6
$49999966 \sim 5.10^7$	118760	7.69
$59999998 \sim 6.10^7$	139046	7.77
$69999938 \sim 7.10^7$	159569	7.84
$79999966 \sim 8.10^7$	179764	7.9
$89999942 \sim 9.10^7$	199455	7.95
$99999982 \sim 10^8$	218411	8

On constate que le rapport $\dfrac{218411}{28983} = 7.53$ semble proche du logarithme[4].

Il semblerait également, au vu de ces seules valeurs, que la fonction $NbDecompG$ est additive mais non pas au sens habituel utilisé en théorie des nombres qui veut que $f(a.b) = f(a) + f(b)$ mais plutôt au sens général qui fait que $f(a+b) = f(a)+f(b)$. On constate non seulement que $f(a+b) \sim f(a)+f(b)$ mais également que $f(\lambda a) \sim \lambda f(a)$.

Testons si la fonction NbDecompG est multiplicative. Pour cela, fournissons-en quelques valeurs :

n	$NbDecompG(n)$
$2026 = 2.1013$	32
$4054 = 2.2027$	55
$4106702 = 2.1013.2027$	13561
$8213404 = 2.1013.2.2027$	24549
$2053352 = 1013.2027 + 1$	9187

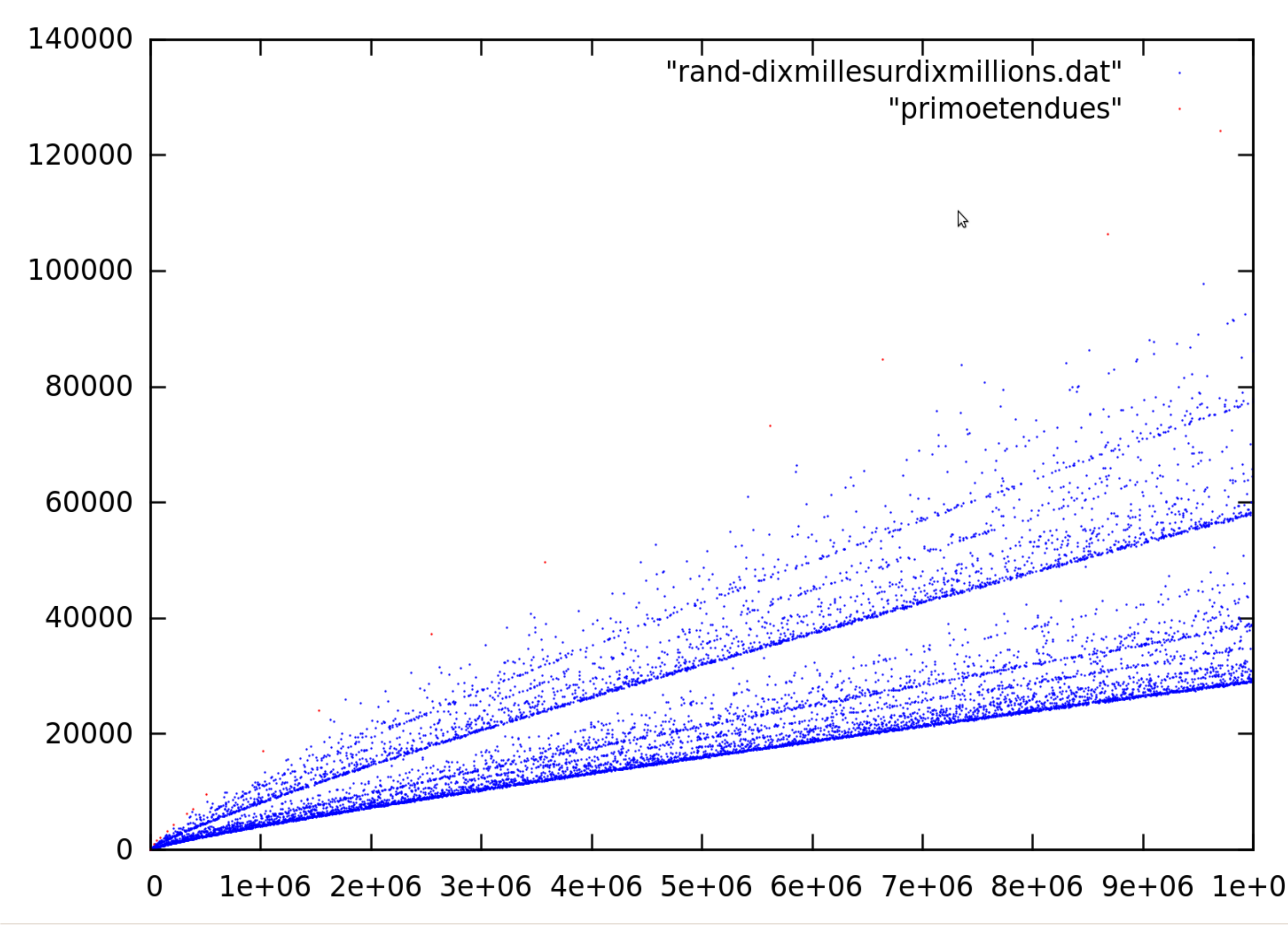
$NbDecompG(a.b)$ a une valeur différente de $NbDecompG(a).NbDecompG(b)$.

Enfin, fournissons les valeurs et la visualisation des nombres de décompositions de Goldbach de certains multiples des primorielles équitablement répartis jusqu'à 10 millions.

[4] A noter : les nombres premiers 4 999 999, 19 999 999 et 29 999 999 sont particulièrement rigolos. On peut tester la primalité des nombres en utilisant le logiciel de factorisation par la méthode des courbes elliptiques à l'adresse http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM

n	$NbDecompG(n)$
6	1
30	3
210	19
2310	114
30030	905
60060	1564
90090	2135
150150	3215
210210	4273
330330	6181
390390	7094
510510	9493
1021020	17075
1531530	24044
2552550	37302
3573570	49655
5615610	73205
6636630	84638
8678670	106360
9699690	124180

Comme on peut le constater, ces nombres semblent fournir les valeurs limites hautes de la comète...

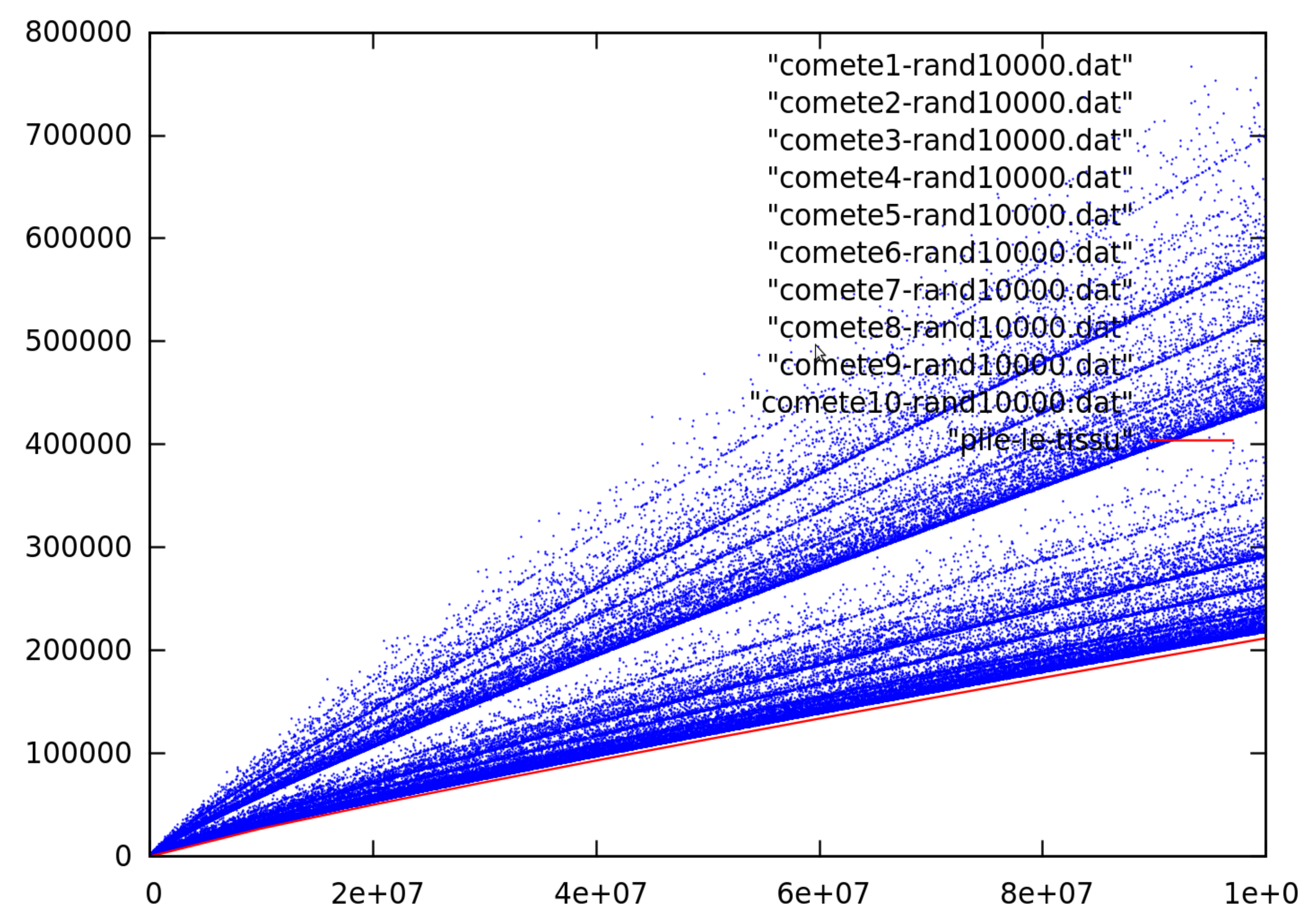


"rand-dixmillesurdixmillions.dat"
"primoetendues"
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07

Les outils permettent enfin, et cela n'est pas la moindre des choses, de voir si une fonction définie par l'utilisateur minore ou pas le nombre de décompositions de Goldbach (combien de fois, pour qui, etc).

J'ai choisi la fonction de minoration suivante, découlant de la méthode dite par "pliage du tissu" dans laquelle le produit s'effectue sur les nombres p premiers impairs inférieurs ou égaux à $2\sqrt{x}+1$:

$$MinoreGoldbach(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{p} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$$



"comete1-rand10000.dat"
"comete2-rand10000.dat"
"comete3-rand10000.dat"
"comete4-rand10000.dat"
"comete5-rand10000.dat"
"comete6-rand10000.dat"
"comete7-rand10000.dat"
"comete8-rand10000.dat"
"comete9-rand10000.dat"
"comete10-rand10000.dat"
"plie-le-tissu"
800000
700000
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
0
2e+07
4e+07
6e+07
8e+07
1e+08