Très constante (Denise Vella-Chemla, 21.6.2017)

On continue de procéder expérimentalement, dans l'étude des parties imaginaires des zéros de la fonction zêta.

Il y a quelques temps, on avait eu l'idée de calculer les carrés des parties imaginaires et les nombres obtenus rappelaient les fréquences des notes de la gamme chromatique (cf. photo d'un petit carnet en annexe).

Ici, on effectue des calculs qui rapetissent les nombres réels parties imaginaires des zéros de zêta, en prenant par exemple leurs racines carrées, leurs racines cubiques, etc.

On utilise le programme suivant.

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <cmath>
#include <fstream>

int main (int argc, char* argv[])
{
  const float PI = 3.14159265359 ;
  const float CONSTNEPER = 2.718281828459 ;
  const float BRUNJUM = 1,9021605823 ;
  const float RACTROIS = 1,7320508075 ;
  const float NBDOR = 1,6180339887 ;
  const float RACDEUX = 1,41421356237 ;
  const float ASYMPTOINDICEULER = 1.9435964368 ;

  int i, np, tranche ;
  float zeros[100005] ;
  int pe[100005] ;

  std::ifstream fichier("leszeros", std::ios::in);
  if (fichier) { int entier1 ; float entier2 ;
     while (not fichier.eof()) {
       fichier >> entier1 >> entier2 ;
       zeros[entier1] = entier2 ;
     }
     fichier.close();
  }
  else std::cerr << "Impossible d'ouvrir le fichier !" << std::endl ;

  for (i = 1 ; i <= 10000 ; ++i) {
    std::cout << i << " -> " << pow(zeros[i],1./CONSTGAUSS) << "\n" ;
    pe[i] = (int) pow(zeros[i],1./CONSTGAUSS) ;
  }
  for (i = 2 ; i <= 10000 ; ++i) {
    if (pe[i] == pe[i-1]) tranche = tranche+1 ;
    else { std::cout << tranche+1 << " " ; tranche = 0 ;}
  }
}
```

Pour les racines carrées, on remplace le $pow(zeros[i], 1./CONSTGAUSS)$ par $pow(zeros[i], 1./2)$. Pour les racines cubiques, on le remplace par $pow(zeros[i], 1./3)$. Pour les racines $\pi - i\grave{e}me$, on le remplace par $pow(zeros[i], 1./CONSTPI)$, etc.

Pour les racines carrées ou cubiques, on obtient les résultats que voici (on fournit les 100 premières racines carrées de parties imaginaires des zéros de zêta) :

$1 \to 3.75962$	$26 \to 9.61727$	$51 \to 12.0831$	$76 \to 13.8953$
$2 \to 4.58498$	$27 \to 9.72889$	$52 \to 12.1418$	$77 \to 13.9737$
$3 \to 5.00109$	$28 \to 9.79136$	$53 \to 12.2496$	$78 \to 14.0313$
$4 \to 5.51587$	$29 \to 9.94139$	$54 \to 12.2852$	$79 \to 14.0718$
$5 \to 5.73891$	$30 \to 10.0657$	$55 \to 12.3703$	$80 \to 14.1868$
$6 \to 6.13076$	$31 \to 10.1846$	$56 \to 12.4945$	$81 \to 14.2300$
$7 \to 6.39677$	$32 \to 10.2687$	$57 \to 12.5538$	$82 \to 14.2895$
$8 \to 6.58233$	$33 \to 10.3522$	$58 \to 12.6036$	$83 \to 14.3316$
$9 \to 6.92857$	$34 \to 10.5371$	$59 \to 12.6960$	$84 \to 14.4190$
$10 \to 7.05506$	$35 \to 10.5771$	$60 \to 12.7683$	$85 \to 14.4768$
$11 \to 7.27807$	$36 \to 10.6921$	$61 \to 12.8661$	$86 \to 14.5496$
$12 \to 7.51307$	$37 \to 10.7808$	$62 \to 12.9300$	$87 \to 14.6064$
$13 \to 7.70370$	$38 \to 10.8991$	$63 \to 13.0036$	$88 \to 14.6474$
$14 \to 7.79947$	$39 \to 11.0168$	$64 \to 13.0350$	$89 \to 14.7027$
$15 \to 8.06923$	$40 \to 11.0881$	$65 \to 13.1686$	$90 \to 14.8009$
$16 \to 8.19023$	$41 \to 11.1471$	$66 \to 13.2195$	$91 \to 14.8565$
$17 \to 8.33945$	$42 \to 11.2923$	$67 \to 13.2831$	$92 \to 14.8805$
$18 \to 8.48924$	$43 \to 11.3833$	$68 \to 13.3558$	$93 \to 14.9669$
$19 \to 8.70084$	$44 \to 11.4494$	$69 \to 13.4133$	$94 \to 14.9994$
$20 \to 8.78321$	$45 \to 11.5541$	$70 \to 13.4984$	$95 \to 15.0805$
$21 \to 8.90715$	$46 \to 11.6085$	$71 \to 13.5969$	$96 \to 15.1439$
$22 \to 9.10551$	$47 \to 11.7523$	$72 \to 13.6235$	$97 \to 15.2069$
$23 \to 9.20519$	$48 \to 11.8210$	$73 \to 13.6832$	$98 \to 15.2311$
$24 \to 9.35015$	$49 \to 11.8795$	$74 \to 13.7629$	$99 \to 15.2870$
$25 \to 9.42386$	$50 \to 11.9629$	$75 \to 13.8574$	$100 \to 15.3793$

On décide de tronquer[1] les parties décimales en prenant systématiquement la partie entière des nombres. Un certain nombre de valeurs successives des images des parties imaginaires des zéros sont de ce fait égalisées. On a alors des “paquets” d'images successives identiques dont on compte les cardinaux. Les cardinaux trouvés par ces processus ne sont pas très satisfaisants, on préfèrerait trouver comme cardinaux des ensembles successifs de valeurs la suite des nombres entiers successifs (par une sorte de principe dit “de la vache qui rit”).

Voici les cardinaux des paquets pour les images fournies dans le tableau précédent.

1	1	3	4	5	7	8	9	12	12	15	17	17	20	22	23	26	27
30	31	34	35	37	41	41	44	47	48	51	53	55	57	61	62	64	68
69	72	74	77	79	81	84	86	89	92	94	97	99	101	105	107	108	112
115	118	119	123	125	129	130	133	137	138	142	144	147	149	154	155	158	161
163	167	169	173	174	178	181	183	187	189	192	195	197	202	203	207	210	212
215	219	221	224	227	231												

[1]Peut-être qu'approximer plutôt que tronquer serait plus judicieux.

Avec les racines cubiques des zêta plutôt que les racines carrées, voici les résultats obtenus :

$1 \to 2.41785$	$26 \to 4.52239$	$51 \to 5.26565$	$76 \to 5.77979$
$2 \to 2.75989$	$27 \to 4.55731$	$52 \to 5.28269$	$77 \to 5.80152$
$3 \to 2.92444$	$28 \to 4.57680$	$53 \to 5.31392$	$78 \to 5.81743$
$4 \to 3.12183$	$29 \to 4.62343$	$54 \to 5.32420$	$79 \to 5.82863$
$5 \to 3.20543$	$30 \to 4.66189$	$55 \to 5.34877$	$80 \to 5.86034$
$6 \to 3.34973$	$31 \to 4.69853$	$56 \to 5.38451$	$81 \to 5.87224$
$7 \to 3.44594$	$32 \to 4.72437$	$57 \to 5.40153$	$82 \to 5.88859$
$8 \to 3.51226$	$33 \to 4.74995$	$58 \to 5.41580$	$83 \to 5.90015$
$9 \to 3.63437$	$34 \to 4.80632$	$59 \to 5.44225$	$84 \to 5.92410$
$10 \to 3.67847$	$35 \to 4.81849$	$60 \to 5.46290$	$85 \to 5.93992$
$11 \to 3.75558$	$36 \to 4.85334$	$61 \to 5.49075$	$86 \to 5.95983$
$12 \to 3.8360$	$37 \to 4.88017$	$62 \to 5.50890$	$87 \to 5.97534$
$13 \to 3.90061$	$38 \to 4.91580$	$63 \to 5.52981$	$88 \to 5.98652$
$14 \to 3.93288$	$39 \to 4.95113$	$64 \to 5.53870$	$89 \to 6.00157$
$15 \to 4.02304$	$40 \to 4.97247$	$65 \to 5.57647$	$90 \to 6.02827$
$16 \to 4.06316$	$41 \to 4.99007$	$66 \to 5.59082$	$91 \to 6.04334$
$17 \to 4.11236$	$42 \to 5.03333$	$67 \to 5.60876$	$92 \to 6.04987$
$18 \to 4.16146$	$43 \to 5.06032$	$68 \to 5.62920$	$93 \to 6.07324$
$19 \to 4.23033$	$44 \to 5.07989$	$69 \to 5.64534$	$94 \to 6.08205$
$20 \to 4.25699$	$45 \to 5.11083$	$70 \to 5.66920$	$95 \to 6.10394$
$21 \to 4.29694$	$46 \to 5.12684$	$71 \to 5.69673$	$96 \to 6.12104$
$22 \to 4.36050$	$47 \to 5.16910$	$72 \to 5.70416$	$97 \to 6.13801$
$23 \to 4.39226$	$48 \to 5.18923$	$73 \to 5.72081$	$98 \to 6.14452$
$24 \to 4.43826$	$49 \to 5.20635$	$74 \to 5.74300$	$99 \to 6.15955$
$25 \to 4.46155$	$50 \to 5.23068$	$75 \to 5.76927$	$100 \to 6.18432$

3 11 27 47 77 113 159 212 275 346 429 521 620 733 855 987 1131 1284 1450

Du coup, on décide d'utiliser des racines "i-ième", avec i prenant successivement les valeurs π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or), 2.718281828459 (la constante de Neper) et $1,9021605823$ la constante des nombres premiers jumeaux. On fournit ci-dessous directement la taille des paquets de parties imaginaires de zéros successifs qui ont même image par la racine $i-ième$ en question.

Ci-dessous, les tailles des paquets de racines $\pi - ièmes$ de parties imaginaires de zéros de zêta successifs égales :

4 16 36 69 112 168 240 325 428 546 681 836 1009 1200 1412 1643

Ci-dessous, les tailles des paquets pour les racines $\sqrt{2} - ièmes$:

0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	1	2	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	3	3	2	3	3	3	3
3	3	4	3	3	3	4	4	3	4	4	3	5	4	4	4	4	4	4	4
5	4	5	4	5	5	4	5	4	6	4	5	5	5	6	5	5	5	6	5
6	6	5	6	5	6	6	6	6	6	5	7	6	6	7	6	6	7	6	7
6	6	7	6	7	7	7	7	7	7	7	6	7	8	7	8	7	6	8	8
7	8	8	7	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8
9	8	8	9	9	8	9	8	9	9	8	10	8	9	9	9	9	8	10	10
8	10	9	9	10	10	9	9	10	9	9	10	10	10	9	10	10	10	9	11
10	10	10	10	10	10	10	11	10	10	11	10	10	11	11	10	10	11	11	11
10	11	11	11	11	11	11	11	10	12	11	11	11	11	11	12	12	10	12	11
12	11	13	10	13	11	12	11	12	11	13	11	13	11	12	13	12	11	13	11
13	12	12	13	12	13	11	13	13	12	13	12	13	13	12	13	13	12	13	13
12	14	13	13	12	13	14	13	13	13	13	13	14	13	14	12	14	13	13	14
14	14	13	13	15	13	14	14	13	14	14	14	13	15	14	13	14	14	14	15
14	14	14	15	14	14	14	15	14	15	14	15	15	14	14	15	15	14	15	15
15	14	16	15	14	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	15	15	16	15
16	15	16	15	15	16	16	15	15	16	16	16	15	16	16	16	16	16	15	16
16	16	16	16	16	17	16	16	16	16	16	17	16	16	17	17	15	17	17	16
16	17	16	17	17	17	17	16	17	16	18	17	16	17	17	17	17	17	17	17
18	16	18	17	17	17	17	18	18	16	18	17	17	18	17	18	17	18	18	18
17	18	18	17	18	18	17	18	18	18	18	18	18	18	18	19	17	19	18	18
17	19	18	19	18	18	19	18	18	19	18	18	19	19	18	19	18	19	19	18
19	19	18	19	19	19	19	19	18	20	18	20	19	18	19	20	19	19	19	19
20	19	19	20	19	19	20	19	19	20	20	19	20	20	19	20	19	20	19	20
19	20	21	19	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	21	20
20	21	20	19	21	21	20	21	20	21	20	21	20	21	20	20	21	21	21	21
20	21	21	21	20	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	20	22	21	21	22
21	21	21	21	22	21	22	21	21	22	21	22	21	22	21	22	21	23	20	22
21	23	22	21	22	22	22	21	22	22	22	22	23	21	22	22	22	23	21	23
22	22	22	22	22	23	22	22	22	24	22	22	22	23	23	22	23	22	22	23
23	22	23	23	22	23	23	22	23	23	23	23	23	23	23	22	24	23	23	23
23	23	23	23	23	24	23	23	23	23	23	25	22	24	23	24	23	23	24	

Dans le tableau précédent ainsi que dans le suivant, on s'est trompé d'une unité pour chaque comptage, cela n'est pas important, ce qui nous intéresse étant d'observer les écarts et sauts entre les nombres.

Ci-dessous, les tailles des paquets pour les racines $\sqrt{3} - ièmes$:

0	0	0	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6	5	7	7	7	8	9	9
10	9	11	11	13	12	12	14	13	15	14	16	16	16	17	17	18	19	19	20
19	21	21	21	23	22	23	24	24	25	25	26	26	26	28	28	28	28	30	29
31	31	31	32	32	33	33	34	34	36	35	36	36	38	37	38	38	40	39	40
40	41	42	42	42	43	44	44	44	45	46	45	47	47	48	48	49	49	49	50
50	51	52	52	53	53	53	54	54	56	55	56	56	57	58	58	58	58	60	61
60	61	61	62	62	64	63	63	65	64	66	66	66	67	67	68	68	69	69	70
70	71	71	72	72	72	74	72	76	74	74	77	76	76	77	77	78	79	79	79
80	80	82	81	81	82	83	84	83	84	86	84	86	86	87	87	88	87	89	89
89	91	89	92	91	92	92	93	93	93	95	95	95	96	96	96	98	97		

Ci-dessous, les tailles des paquets pour les racines nombre-d'or-ièmes :

1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	3	4	5	4	4	5	6	6	6	6
6	7	7	8	7	8	8	8	9	9	9	10	10	9	10	11	11	11	11	12
12	12	13	12	13	13	13	14	13	15	14	15	15	15	15	15	17	16	15	18
16	17	18	17	18	18	18	19	19	19	19	19	20	20	20	20	21	21	21	21
23	21	22	22	23	22	23	24	23	24	24	24	24	25	24	25	26	25	26	26
26	26	26	27	28	27	28	27	28	28	29	28	28	30	28	31	29	30	30	30
30	31	31	32	31	31	33	31	32	33	32	33	34	33	33	34	34	34	35	34
35	35	35	35	36	36	36	36	37	37	36	37	38	37	38	38	38	39	38	38
39	40	39	39	40	40	41	40	41	40	40	42	42	41	42	41	43	42	43	42
44	42	44	43	45	44	43	44	45	45	45	45	45	46	45	47	46	46	46	48
46	48	47	47	48	48	48	49	48	48	50	48	50	49	50	49	50	51	50	51
51	51	51	51	52	52	52	52	53	52	52	53	53	53	53	55	53	55	53	55
54	56	54	56	55	55	56	56	56	56	57	57	56	57	57	58	58	57	59	57
58	59	59	59	59	59	59	60	60	60	60	61	60	61	61	61	62	61	61	62
62	62	63	63	62	63	63	63	64											

Ci-dessous, les tailles des paquets pour les racines constante-de-Neper-ièmes :

1	6	14	22	36	50	68	89	112	138	167	198	232	271	309	352
396	444	495	549	603	662	723	787	854	922	994					

Ci-dessous, les tailles des paquets pour les racines Constante-de-Brun-des-premiers-jumeaux-ièmes :

2	1	3	4	5	6	6	8	9	10	10	12	13	16	15	17
17	20	21	21	23	25	25	27	29	29	31	32	33	35	36	38
38	41	41	44	44	46	47	49	50	51	52	55	56	57	59	60
61	63	64	66	67	69	70	72	73	75	76	78	79	80	81	85
84	87	89	89	91	92	95	95	98	98	100	103	102	105	106	108
110	110	113	114	116	117	119	120	122	123	125	126	128	130	131	133
134	136	138	139	141	142	143	147	145	150	150	151	154	154	157	158
160	161	164	163	166	168	169	172	172							

Cette constante est la plus satisfaisante de toutes, compte-tenu de l'objectif : on s'attendait à un tel résultat car on souhaiterait "faire se rapprocher deux nombres premiers jumeaux de plus en plus jusqu'à ce qu'ils ne deviennent qu'un seul nombre premier". Qu'entend-on par là ? Deux nombres premiers impairs jumeaux sont séparés du plus petit intervalle qu'il est possible, qui est 2. On peut voir les nombres premiers (sous-entendu nombres premiers tout courts et non pas jumeaux) comme une limite des nombres premiers jumeaux lorsqu'on essaie encore de faire se rapprocher ceux-ci jusqu'à ce que les deux jumeaux d'un couple se confondent, la distance les séparant s'étant annulée.

On n'a pas encore trouvé une constante qui produirait exactement la suite des entiers successifs et on va continuer à la chercher par tâtonnement.

Ci-dessous, les tailles des paquets pour les racines Constante-Euler-Totient-ièmes (la constante asymptotique de l'indicatrice d'Euler vaut 1.9435964368)[2] :

1	1	2	4	4	5	7	8	9	10	11	14	13	16	17	20
19	22	23	25	25	28	29	32	32	34	36	37	40	40	43	44
45	47	50	51	53	54	57	57	60	62	63	65	67	69	70	73
74	76	78	80	82	83	86	87	89	92	92	96	96	99	101	102
105	106	108	111	112	115	116	118	120	123	124	126	128	130	132	134
136	138	141	141	145	145	149	150	152	155	156	158	161	162	165	166
169	171	172	175	177	179	182	182	185	188	190	191	194	196		

[2]On trouve les valeurs des constantes mathématiques ici http://free-vz.htnet.hr/nstepan/const/math.txt.

Ci-dessous, les tailles des paquets pour les racines Constante-Tetranacci-ièmes (la constante de Tetranacci vaut 1.927561975, on la trouve dans la séquence de l'OEIS A086088 et elle correspond à la section d'or d'un segment de ligne en 4 portions (cf un article de Seppo Mustonen, du département de mathématiques et statistiques de l'Université d'Helsinki) :

1	1	2	3	4	5	6	8	8	10	11	12	13	15	16	17
19	21	21	23	24	26	28	28	31	31	33	35	36	38	40	40
42	44	46	47	48	51	52	53	56	57	58	60	62	64	64	67
68	70	73	73	75	77	78	81	81	85	85	87	88	91	93	94
96	97	100	100	104	105	106	108	110	112	114	115	117	119	121	123
124	126	128	130	132	133	136	137	139	140	143	145	146	148	150	152
154	156	157	160	161	162	165	168	168	171	172	175	175	178	180	183
183	186	187													

On ajoute les suites de nombres trouvées pour les constantes pentanacci, hexanacci et heptanacci.

Taille des paquets pour les racines constante-de-pentanacci-ièmes :

1	1	3	3	5	5	7	9	10	11	13	14	16	17	19	20
22	24	25	27	29	31	33	34	35	38	39	42	43	46	46	50
51	53	55	57	58	61	63	65	67	68	71	73	75	77	79	82
83	85	87	90	92	93	96	99	100	103	104	107	109	112	113	115
119	120	122	125	127	129	131	134	136	137	141	142	145	148	149	152
154	157	158	162	163	166	168	171	173	175	177	181	182	184	187	190
192	194	196	200	201	203	206	209								

Taille des paquets pour les racines constante-de-hexanacci-ièmes :

1	1	3	3	6	6	8	9	10	12	14	15	17	18	20	22
24	25	28	30	30	34	35	37	39	41	43	44	47	50	51	53
56	57	59	63	63	67	68	71	73	75	77	80	82	84	87	88
91	93	97	97	101	103	105	108	110	113	114	118	120	122	125	126
130	133	134	138	139	141	145	147	150	152	155	158	159	162	165	168
170	173	175	178	180	184	185	189	191	194	196	198	201	205	208	208
213	215	217	220												

Taille des paquets pour les racines constante-de-heptanacci-ièmes :

1	1	3	4	5	7	7	9	12	12	13	16	18	19	21	23
24	27	28	31	32	34	37	38	40	43	44	47	49	51	54	55
58	60	61	65	67	69	71	74	75	79	81	82	86	88	90	93
95	98	100	102	106	107	109	113	115	117	121	122	126	128	130	133
135	139	140	144	146	149	151	154	156	159	162	166	167	170	173	175
178	181	184	187	188	193	194	198	200	203	206	209	210	215	217	220
223	225														

La constante qui semble le mieux convenir s'avère être 1.842. Elle permet d'aboutir au nombre 143 en 143 nombres. Il s'agit donc pour les parties imaginaires des zéros de zéta (notées r) de calculer leur racine $1.842 - ième$ qu'on note $\sqrt[1.842]{r}$ et de calculer les tailles des paquets d'images d'antécédents successifs qui ont même partie entière. On aboutit aux tailles de paquets suivantes (on a travaillé avec les 10000 premiers zéros) :

0	1	1	2	3	3	4	6	6	6	8	8	9	11	11	12
13	14	15	15	17	17	19	19	21	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	32	31	34	33	35	36	37	38	39	39	41	42	44
43	45	46	47	48	49	50	51	53	52	54	55	57	57	59	58
61	61	62	64	64	65	67	67	69	69	70	72	73	74	74	77
76	78	79	80	81	82	84	83	86	86	88	88	89	91	91	93
94	94	96	97	97	99	100	101	102	103	105	105	106	107	109	109
111	112	112	114	115	116	117	117	120	120	121	122	124	123	126	127
127	129	129	131	133	132	134	135	136	138	138	139	140	142	143	

Une autre idée : par quels complexes $a+bi$ faut-il multiplier les $\frac{1}{2}+ri$ pour obtenir 1 ?

On appelle r les parties imaginaires des zéros de zêta successifs.

r prend donc les valeurs $14.13, 21.02, 25.01, 30.42, 32.93, \ldots$ On cherche à résoudre $\left(\frac{1}{2}+ir\right)(a+ib)=1$. On développe le produit et on rassemble la partie réelle et la partie imaginaire du complexe obtenu :

$$\left(\frac{1}{2}a-rb\right)+\left(ra+\frac{1}{2}b\right)i=1.$$

Pour que l'égalité soit vérifiée, la partie imaginaire doit être nulle, la partie réelle doit être égale à 1. On aboutit à :

$$\left(r-\frac{1}{2}\right)a+\left(r+\frac{1}{2}b\right)=-1.$$

Prenons le premier des zéros de zêta, pour lequel $r=14.13$. Pour lui, $a=\frac{1}{2}$ amène $b=-\frac{1}{2}$ dans l'égalité ci-dessus. $a=1$ amène $b=-1$, $a=0$ amène $b=-\frac{1}{14.63}$, $a=2$ amène $b=\frac{-1-2\times 13.63}{14.63}=-1.9316$. Chaque complexe (dont les zéros de zêta) a ainsi une infinité d'inverses. On abandonne cette idée.

Annexe : petite expérience initiale : retrouver les fréquences des notes de la gamme chromatique dans les carrés des parties imaginaires des zéros de zêta