Conjecture de Goldbach, où l'on retrouve ζ autrement (Denise Vella-Chemla, 26.1.2019)

On s'intéresse à la conjecture de Goldbach qui stipule que tout nombre pair supérieur strictement à 2 est la somme de deux nombres premiers.

On rappelle qu'un nombre premier inférieur à $\dfrac{n}{2}$, qui ne partage aucun de ses restes avec n un nombre pair supérieur à 2, dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, est un décomposant de Goldbach de n.

En effet, si x inférieur à $\dfrac{n}{2}$ ne partage aucun de ses restes avec n dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, alors $n - x$ est lui aussi premier.

La probabilité qu'un nombre x inférieur à $\dfrac{n}{2}$ soit premier est fournie par le théorème des nombres premiers ; elle vaut :

$$\frac{\frac{n}{2}}{ln\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Supposons maintenant que x est premier. Etudions le non-partage d'un reste au moins entre x et n dans les divisions par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

Puisque x est premier, on sait au moins qu'il n'a aucun reste nul dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$.

Dans une division par 3, il lui reste 2 possibilités de reste (1 et 2), et il a une chance sur deux (i.e. 1/2) d'obtenir l'un ou l'autre.

Dans une division par 5, il lui reste 4 possibilités de reste (1, 2, 3 ou 4), et il a une chance sur 4 (i.e. 1/4) d'obtenir l'un ou l'autre.

Dans une division par 7, il lui reste 6 possibilités de reste (1, 2, 3, 4, 5 et 6), et il a une chance sur 6 (i.e. 1/6) d'obtenir l'un ou l'autre.

Plus généralement, dans une division par p, il lui reste $p - 1$ possibilités de reste $(1, 2, \ldots, p - 1)$, et il a une chance sur $p - 1$ (i.e. 1/(p-1)) d'obtenir l'un ou l'autre.

Tous ces événements ayant des probabilités indépendantes, la probabilité d'obtenir leur conjonction est le produit des probabilités de chaque événement séparé (les événements considérés étant "x et n ont même reste dans une division par 3", "x et n ont même reste dans une division par 5", etc.).

Ce produit s'écrit :

$$\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{p-1}$$

On peut le réécrire :

$$\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{p^{-(-1)}-1}$$

puis

$$-\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{1-p^{-(-1)}}$$

et l'on reconnaît alors $-\zeta(-1)$. Ramanujan a démontré que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. La note [1] fournit une démonstration simple de ce fait.

On obtient donc comme probabilité globale qu'un nombre x soit d'une part premier, et d'autre part ne partage aucun de ses restes avec n dans une division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ [2] :

$$\frac{\frac{n}{2}}{ln\left(\frac{n}{2}\right)} \times (-\zeta(-1))$$

soit :

$$\frac{n}{2\ ln\ n - 2\ ln\ 2} \times \frac{1}{12}.$$

Ceci semble rendre la conjecture de Goldach vraie à partir de $n = 92$ [3].

1. Par définition $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...$. On remarque qu'en faisant la différence terme à terme :

$$\begin{array}{rllll} S - B = & 1+2 & +3+4 & +5+6 & ... \\ & -1+2 & -3+4 & -5+6 & ... \\ = & 0+4 & +0+8 & +0+12 & ... = 4(1+2+3+...) = 4S \end{array}$$

Donc $S - 4S = B$, i.e. $-3S = B$, d'où $S = -\frac{B}{3} = -\frac{\frac{1}{4}}{3}$ Ainsi, on retrouve le résultat attendu : $S = -\frac{1}{12}$.

2. Le fait pour x de ne partager aucun reste avec n dans les divisions par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ n'a rien à voir avec le fait d'être premier à n. Cette condition est nécessaire (i.e. *impliquée*) mais non suffisante (i.e. *impliquante*). Par exemple, 17 et 81, dont la somme vaut 98, sont tous les deux premiers à 98, mais ils n'en sont pas pour autant des décomposants de Goldbach (de 98) puisque 17 partage le reste de 2 avec 98 lorsqu'on les divise par 3 (Gauss écrit cela $17 \equiv 98\ (mod\ 3)$, c'est lui qui a attiré l'attention de tous sur l'importance de travailler dans les corps premiers).

3. $\frac{92}{2\ ln\ 92 - 2\ ln\ 2} \cdot \frac{1}{12} = 1.0012254835$ alors que $\frac{90}{2\ ln\ 90 - 2\ ln\ 2)} \cdot \frac{1}{12} = 0.9851149163$.

Conjecture de Goldbach, où l'on retrouve ζ autrement (Denise Vella-Chemla, 29.5.2019)

On s'intéresse à la conjecture de Goldbach qui stipule que tout nombre pair supérieur strictement à 2 est la somme de deux nombres premiers.

On rappelle qu'un nombre premier inférieur à $\dfrac{n}{2}$, qui ne partage aucun de ses restes avec n un nombre pair supérieur à 2, dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, est un décomposant de Goldbach de n.

En effet, si x inférieur à $\dfrac{n}{2}$ ne partage aucun de ses restes avec n dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, alors $n-x$ est lui aussi premier.

La probabilité asymptotique qu'un nombre x inférieur à $\dfrac{n}{2}$ soit premier est fournie par le théorème des nombres premiers ; elle vaut :

$$\frac{\dfrac{n}{2}}{ln\left(\dfrac{n}{2}\right)}$$

La minoration de $\pi(k)$ (le nombre de nombres premiers inférieurs à k) par $\dfrac{k}{ln\ k}$ est fournie dans [1], page 69, pour $x \geq 17$.

Supposons maintenant que x est premier. Etudions les probabilités d'égalité des restes de x et n quand on les divise par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

Puisqu'on a supposé x premier, on sait au moins qu'il n'a aucun reste nul lorsqu'on le divise par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$.

n a un certain reste, lorsqu'on le divise par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$. x doit "éviter" le reste en question (ne doit pas avoir le même).

Si on considère une division de n par l'un de ses diviseurs premiers p de reste nul, x n'a que ce reste nul (0) à éviter. Or x a déjà évité 0 par le fait qu'il est premier. x a le choix entre $p-1$ restes possibles dans la division par p.

Si on considère une division de n par un nombre premier qui n'est pas l'un de ses diviseurs, n a selon ce nombre premier un reste non-nul que x doit éviter. x a alors le choix entre $p-2$ restes possibles dans sa division par p, qu'il peut avoir à égales probabilités l'un ou l'autre mais on va utiliser le fait que $\dfrac{1}{p-2} > \dfrac{1}{p-1}$ et minorer chaque probabilité selon un nombre premier p donné par $\dfrac{1}{p-1}$, pour homogénéiser les différents cas (considération des diviseurs ou des non-diviseurs de n).

Voyons des exemples, pour fixer les idées : dans une division par 3, on minore le nombre de possibilités par 2 possibilités de reste (1 et 2), et x a une chance sur deux (i.e. 1/2) d'obtenir l'un ou l'autre.

Dans une division par 5, il reste à x 4 possibilités de reste (1, 2, 3 ou 4), et x a une chance sur 4 (i.e. 1/4) d'obtenir l'un ou l'autre.

Dans une division par 7, il reste à x 6 possibilités de reste (1, 2, 3, 4, 5 et 6), et x a une chance sur 6 (i.e. 1/6) d'obtenir l'un ou l'autre.

Plus généralement, dans une division par p, on minore la probabilité que x et n aient le même reste ainsi : il y a $p-1$ possibilités de restes possibles au maximum pour x (qui sont $1, 2, \ldots,\ p-1$), et x a une chance sur $p-1$ (i.e. 1/(p-1)) d'obtenir l'un ou l'autre de ces restes.

Tous ces événements ayant des probabilités indépendantes, la probabilité d'obtenir leur conjonction est le produit des probabilités de chaque événement séparé (les événements considérés étant "x et n ont même reste dans une division par 3", "x et n ont même reste dans une division par 5", etc.).

Ce produit s'écrit :

$$\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{p-1}$$

On peut le réécrire :

$$\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{p^{-(-1)}-1}$$

puis

$$-\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{1-p^{-(-1)}}$$

On peut étendre ce produit à l'infinité des nombres premiers car en fait, c'est selon tout nombre premier que n et x ne peuvent être congrus, pour que le complémentaire à n de x qu'est $n-x$ soit premier. On reconnaît alors $-\zeta(-1)$ dans le produit proposé pour que x et n aient des restes différents dans un division par un nombre premier quelconque. Ramanujan a démontré que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. La note [1]fournit une démonstration simple de ce fait.

On obtient donc comme probabilité globale qu'un nombre x soit d'une part premier, et d'autre part ne partage aucun de ses restes avec n dans une division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ (en fait quelconque) [2] :

$$\frac{\frac{n}{2}}{ln\left(\frac{n}{2}\right)} \times (-\zeta(-1))$$

soit :

$$\frac{n}{2\ ln\ n - 2\ ln\ 2} \times \frac{1}{12}.$$

Ceci semble rendre la conjecture de Goldach vraie à partir de $n = 92$ [3].

Tentative de réécriture mathématique :

On cherche à démontrer que $\forall n$ pair, $\exists x, 3 \leq x \leq n/2$ premier impair tel que $n-x$ est premier aussi.

$$\begin{array}{llcll}
(1) & x \text{ premier} & \iff & \forall p \text{ premier} \leq \sqrt{x}, & x \not\equiv 0\ (mod\ p). \\
(2) & n-x \text{ premier} & \iff & \forall p \text{ premier} \leq \sqrt{n-x}, & n-x \not\equiv 0\ (mod\ p) \\
 & & \iff & \forall p \text{ premier} \leq \sqrt{n-x}, & x \not\equiv n\ (mod\ p).
\end{array}$$

On peut remplacer dans (1) la condition $\forall p$ premier $\leq \sqrt{x}$ par la condition plus forte $\forall p$ premier $\leq \sqrt{n/2}$ puisqu'on a posé $x \leq n/2$.

1. Par définition $S = 1+2+3+4+5+....$ On remarque qu'en faisant la différence terme à terme :

$$\begin{array}{rcccc}
S - B = & 1+2 & +3+4 & +5+6 & ... \\
 & -1+2 & -3+4 & -5+6 & ... \\
= & 0+4 & +0+8 & +0+12 & ... = 4(1+2+3+...) = 4S
\end{array}$$

Donc $S - 4S = B$, i.e. $-3S = B$, d'où $S = -\frac{B}{3} = -\frac{\frac{1}{4}}{3}$ Ainsi, on retrouve le résultat attendu : $S = -\frac{1}{12}$.

2. Le fait pour x de ne partager aucun reste avec n dans les divisions par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ n'a rien à voir avec le fait d'être premier à n. Cette condition est nécessaire (i.e. *impliquée*) mais non suffisante (i.e. *impliquante*). Par exemple, 17 et 81, dont la somme vaut 98, sont tous les deux premiers à 98, mais ils n'en sont pas pour autant des décomposants de Goldbach (de 98) puisque 17 partage le reste de 2 avec 98 lorsqu'on les divise par 3 (Gauss écrit cela $17 \equiv 98\ (mod\ 3)$, c'est lui qui a attiré l'attention de tous sur l'importance de travailler dans les corps premiers).

3. $\frac{92}{2\ ln\ 92 - 2\ ln\ 2}.\frac{1}{12} = 1.0012254835$ alors que $\frac{90}{2\ ln\ 90 - 2\ ln\ 2)}.\frac{1}{12} = 0.9851149163$.

On minore le nombre de nombres premiers inférieurs à $\dfrac{n}{2}$ par $\dfrac{\frac{n}{2}}{log\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Il s'agit alors de trouver combien de nombres dans cet ensemble de nombres premiers inférieurs à $\dfrac{n}{2}$, dont on a le cardinal, partagent leur reste avec n ; le partage d'un reste avec n le nombre pair considéré consiste à "fixer" le reste possible et donc à diminuer le nombre de restes possibles de 1 selon chaque module ; on doit multiplier le cardinal $\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$ minoré par $\dfrac{\frac{n}{2}}{log\left(\frac{n}{2}\right)}$ (qui correspond à la condition (1) ci-dessus) par la probabilité qu'il y ait un partage de reste selon chaque nombre premier indépendamment (qui correspond à la condition (2) ci-dessus) et cette probabilité a comme valeur $-\zeta(-1) = \dfrac{1}{12}$. C'est un cardinal d'ensemble qu'on obtient par ce procédé de multiplication d'un cardinal par une probabilité. Un tel calcul semble faire sens et assure un cardinal d'au moins 1 à partir de 92.

Bibliographie

[1] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, dedicated to Hans Rademacher for his seventieth birthday, Illinois J. Math., Volume 6, Issue 1 (1962), 64-94.

Annexe à la proposition denitac.pdf (Denise Vella-Chemla, 23.7.2019)

On cherche à décomposer un nombre pair n en somme de 2 nombres premiers $p_1 + p_2$.

On ne peut pas faire référence à $\zeta(-1)$ comme on l'a fait dans [1]. On peut cependant, pour obtenir une minoration du nombre de décomposants de Goldbach de n, utiliser le cardinal $\left|\mathcal{P}_{\frac{n}{2}}\right|$ de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$ et le multiplier par le produit $\prod\limits_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ qui compte combien de chances a le nombre premier p_1 de ne pas partager son reste avec n selon chaque module p inférieur à $\sqrt{n}$ (le fait de ne pas partager son reste avec n permet à p_1 d'avoir un complémentaire à n (appelé p_2) qui est premier également).

La minoration [1] de $\pi(x)$ (le nombre de nombres premiers inférieurs à x) par $\frac{x}{\log x}$ est fournie dans [2], page 69, pour $x \geq 17$ (Corollaire 1, (3.5), du Théorème 2, dont la démonstration est fournie au paragraphe 7 de [2]).

On a en conséquence $|\mathcal{P}_{\frac{n}{2}}| > \frac{\frac{n}{2}}{\log\left(\frac{n}{2}\right)}$.

La minoration de $\prod\limits_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ est également fournie dans [2], page 70 (c'est le corollaire (3.27) du Théorème 7 dont la démonstration est fournie au paragraphe 8 de [2], avec γ la constante d'Euler-Mascheroni).

$$(3.27) \qquad \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 - \frac{1}{\log^2 x}\right) < \prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{pour } \ 1 < x.$$

En multipliant ces expressions ensemble, on obtient que le nombre de décomposants de Goldbach de n doit être supérieur à :

$$\frac{n/2}{\log(n/2)} \frac{e^{-\gamma}}{\log \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\log^2 \sqrt{n}}\right)$$

qui est strictement supérieur à 1 à partir de 24.

Bibliographie

[1] http://denisevellachemla.eu/denitac.pdf.

[2] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, dedicated to Hans Rademacher for his seventieth birthday, Illinois J. Math., Volume 6, Issue 1 (1962), 64-94.

1. Cette minoration est à distinguer du Théorème des nombres premiers, prouvé indépendamment par Hadamard et La Vallée-Poussin, et qui fournit une tendance asymptotique pour $\pi(x)$.