Nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée et fonction de Lambert, Denise Vella-Chemla, 24 décembre 2024

On souhaite simplifier au maximum l'expression trouvée pour le nombre de nombres premiers qui ferait appel à la fonction de Lambert : on utilise ce programme, qui calcule la fonction

$$f(x) = \exp(\mathrm{W}(x))$$

et la compare à la fonction qui compte le nombre de nombres premiers jusqu'à une certaine grandeur, dont on fournit les valeurs en dernière colonne du tableau.

```
import math
from math import log,exp,pi,e
import scipy
from scipy.special import lambertw

for x in range(1,30):
puiss = 10**x
print(x,' --> ',exp(lambertw(puiss)),' ',log(puiss))
```

On voit qu'il semble suffire de calculer le nombre de nombres premiers jusqu'à $\dfrac{x}{\ln(x)}$ et de le soustraire à l'exponentielle de l'image par la fonction de Lambert de x pour obtenir de façon vraiment assez précise le nombre de nombres premiers inférieurs à x.

x	$f(x)$	$\ln(x)$	$\dfrac{x}{\ln\ (x)}$	$\pi\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)$	$f(x)-\pi\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)$	$\pi(x)$
10^2	29.536	4.605	21.714	8	21	25
10^3	190.490	6.907	144.764	34	156	168
10^4	1382.772	9.210	1085.736	180	1202	1229
10^5	10770.556	11.512	8685.889	1081	9689	9592
10^6	87847.539	13.815	72382.413	7163	80684	78498
10^7	739954.524	16.118	620420.688	50644	689310	664579
10^8	6382029.546	18.420	5428681.023	376205	6005824	5761455
10^9	56048389.142	20.723	48254942.433	2902459	53145930	50847534
10^{10}	499283891.760	23.025	434294481.903	23063876	476220015	455052511
10^{11}	4499007864.959	25.328	3948131653.665	187615079	4311392785	4118054813
10^{12}	40924895425.762	27.631	36191206825.270			37607912018
10^{13}	375223433706.592	29.933	334072678387.116			346065536839
10^{14}	3463410382716.749	32.236	3102103442166.084			3204941750802
10^{15}	32152769680485.887	34.538	28952965460216.790			29844570422669
10^{16}	299987153634086.940	36.841	271434051189532.380			279238341033925
10^{17}	2811170013516462.000	39.143	2554673422960305.000			2623557157654233
10^{18}	$2.644e+16$	41.446	$2.412e+16$			24739954287740860
10^{19}	$2.496e+17$	43.749	$2.285e+17$			234057667276344607

Tableau de l'erreur relative entre $f(x) - \pi\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)$ *et* $\pi(x)$

x	$\dfrac{\text{der.colonne} - \text{avant} - \text{der}}{\text{der.colonne}}$
10^2	0.16
10^3	0.071
10^4	0.0219
10^5	0.010
10^6	0.027
10^7	0.037
10^8	0.042
10^9	0.045
10^{10}	0.046
10^{11}	0.0469

L'erreur qui semble initialement décroître est décevante à partir de 10^6, la tentative de simplifier l'expression pour $\pi(x)$ était un nouveau coup d'épée dans l'eau.

Ci-dessous l'image d'une page d'une page extraite d'une référence bibliographique très illustrante de la fonction de Lambert.

6 A Final Pair of Expansions

The iterations (76–77) may be used to show that $W(z)$ can be written as

$$W(z) = \cfrac{z}{\exp \cfrac{z}{\exp \cfrac{z}{\exp \cfrac{z}{\ddots}}}} \tag{98}$$

or

$$W(z) = \ln \cfrac{z}{\ln \cfrac{z}{\ln \cfrac{z}{\ddots}}} \tag{99}$$

according as $|W(z)| < 1$ or $|W(z)| > 1$. These curious formulae are just the iterated exponential in disguise, and indeed are naturally discovered from rewriting $W(z) = z/\exp W(z)$ and $W(z) = \ln(z/W(z))$ as iterations.