Théorème de Morley dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ (Denise Vella-Chemla, 28.1.2019)

Dans une conférence au Collège de France[1] *"Langage et mathématique"*, Alain Connes évoque le fait que le théorème de Morley s'applique à tout corps possédant une racine cubique de l'unité. C'est le cas en particulier de tout corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que 3 divise $p-1$.

Etudions le cas $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ qui possède 3 racines de l'unité : la racine triviale 1, et les deux racines 3 et 9. En effet, $3^3 = 27 \equiv 1$ $(mod\ 13)$ et $9^3 = 729 \equiv 1$ $(mod\ 13)$.

Il y a plein de solutions possibles, qui vérifient les spécifications énoncées dans l'article, mais on va simplement en montrer une, illustrative, et qui fixera[2] bien les idées.

On rappelle la table de 13, pour faciliter les calculs modulaires : 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130, 143, ...

On triche un peu : on connaît d'avance ce qu'on cherche : trois opérateurs f, g et h tels que $fgh = \begin{pmatrix} 3 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il faut aussi qu'on ait $f^3g^3h^3 = 1$ (autre notation pour $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). Par programme, on obtient de très nombreuses solutions respectant ces deux contraintes. Fixons-nous sur une et voyons ce qu'il en est :

$$f = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a bien $fgh = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qu'on a $M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b + b(a+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ce qui donne comme cubes de f, g et h :

$$\begin{aligned} f^3 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ g^3 &= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ h^3 &= \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vériFie qu'on a bien $f^3g^3h^3 = 1$ par le calcul :

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$fg = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour point fixe

$$fix(fg) = 2 \text{ (car } 10 \times 2 + 8 = 28 \equiv 2 \text{ (mod 13))}.$$

On calcule

$$gh = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour point fixe

$$fix(gh) = 1 \text{ (car } 11 \times 1 + 3 = 14 \equiv 1 \text{ (mod 13))}.$$

1. https://www.college-de-france.fr/site/colloque-2018/symposium-2018-10-18-10h00.htm
2. C'est le cas de le dire, dans la mesure où on cherche des opérateurs et leur point fixe !

On calcule

$$hf = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour point fixe

$$fix(hf) = 11 \text{ (car } 8 \times 11 + 1 = 89 \equiv 11 \pmod{13}).$$

Et là, ce qui est assez extraordinaire, c'est qu'on a bien notre racine de l'unité $j = 3$, qui vérifie $fix(gh) + j\ fix(hf) + j^2\ fix(fg) = 0$.

En effet, dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, 1+3×11 $+\ 9 \times 2 = 52 \equiv 0$ (mod 13).

On a donc bien un théorème de Morley qui s'applique dans le corps premier $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, et il a de multiples manières de s'appliquer.

On peut refaire les mêmes vérifications pour les matrices de coefficients $a_1 = 12, b_1 = 1, a_2 = 10, b_2 = 2, a_3 = 3, b_3 = 6$ et la racine cubique de l'unité 9.