

Dans une conférence au Collège de France¹ "Langage et mathématique", Alain Connes évoque le fait que le théorème de Morley s'applique à tout corps possédant une racine cubique de l'unité. C'est le cas en particulier du corps des quaternions.

On cherche 3 quaternions Q, R et S qui vérifient $QRS = r$ avec r une racine cubique de l'unité dans le corps des quaternions, et $Q^3R^3S^3 = 1$.

On peut trouver de nombreuses solutions par programme : pour cibler les solutions, on pose :

- ★ $Q = a + bi + cj + dk$,
- ★ $R = a' + b'i + c'j + d'k$
- ★ $S = a'' + b''i + c''j + d''k$.

On développe le produit $QRS = (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)(a'' + b''i + c''j + d''k)$ et on utilise le fait que dans le corps des quaternions, on a $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j$ et $ik = -j$ pour obtenir la valeur suivante pour QRS :

$$\begin{array}{cccc}
 a''(aa' - bb' - cc' - dd') & -b''(a'b + ab' - c'd + cd') & -c''(a'c + b'd + ac' - bd') & -d''(a'd - b'c + bc' + ad') \\
 + a''i(a'b + ab' - c'd + cd') & +b''i(aa' - bb' - cc' - dd') & -c''i(a'd - b'c + bc' + ad') & +d''i(a'c + b'd + ac' - bd') \\
 + a''j(a'c + b'd + ac' - bd') & +b''j(a'd - b'c + bc' + ad') & +c''j(aa' - bb' - cc' - dd') & -d''j(a'b + ab' - c'd + cd') \\
 + a''k(a'd - b'c + bc' + ad') & -b''k(a'c + b'd + ac' - bd') & +c''k(a'b + ab' - c'd + cd') & +d''k(aa' - bb' - cc' - dd')
 \end{array}$$

qui est de la forme :

$$\begin{array}{cccc}
 a''A & -b''B & -c''D & -d''C \\
 + a''B & +b''A & -c''C & +d''D \\
 + a''D & +b''C & +c''A & -d''B \\
 + a''C & -b''D & +c''B & +d''A
 \end{array}$$

On trouve quelques racines cubiques de l'unité possibles, telles que $(-1, 1, 1, 1)$ ou bien $(-1, -1, -1, -1)$ ou encore $(-0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$.

Et on obtient par exemple par programme la solution suivante, qui vérifie bien les contraintes souhaitées.

Si

- ★ $Q = -1 - i - j + k$,
- ★ $R = -1 + i + j - k$,
- ★ $S = -1 + i + j + k$,

alors

- ★ $QRS = r = -0.5 + 0.5i + 0.5j + 0.5k$
- ★ avec $r^3 = 1$
- ★ et $Q^3R^3S^3 = 1$.

1. <https://www.college-de-france.fr/site/colloque-2018/symposium-2018-10-18-10h00.htm>