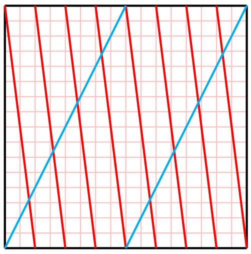
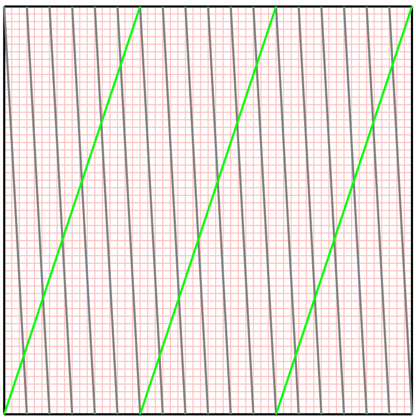
Tore et nombres premiers (DV, 12.7.2015)

On essaie d'appréhender l'espace des nombres premiers. On va utiliser pour cela des solénoides du tore. On associe à chaque entier n le solénoide qui effectue n tours du tore selon les méridiens pour 1 tour selon les parallèles avant de se refermer sur lui-même.
Par exemple, ci-dessous sont représentés sur la première représentation plane du tore les solénoides associés aux nombres 2 (cyan) et -8 (rouge), sur la seconde les solénoides associés aux nombres 3 (vert) et -18 (gris).



$y = 2x \ (mod\ 1), \ y = -8x \ (mod\ 1)$



$y = 3x \ (mod\ 1), \ y = -18x \ (mod\ 1)$

On compte les intersections des solénoïdes sur le tore en utilisant le fait que

$$\begin{cases} x, y \in [0,1[, \\ y = px, \\ y = -qx \end{cases} \implies y = px = -qx \ (mod\ 1) \implies (p+q)x = 0 \ (mod\ 1)$$

équivaut à

$$(p+q)x = k, k \in \mathbb{Z} \implies k \in [0, p+q[\text{ si p + q} \geqslant 0$$

Dans les dessins ci-dessus, on compte effectivement 6 intersections sur le premier tore et 15 sur le second. On peut "voir" sur le tore la divisibilité : si $d \mid n$ alors, la droite du tore $y = dx \ (mod\ 1)$ et la droite $y = -nx \ (mod\ 1)$ du tore ont d intersections dans le plan équatorial (d'équation $y = 0 \ (mod\ 1)$).

On définit une fonction f qui à deux entiers n et m associe $f(m, n)$ le nombre d'intersections de leur solénoïde qui appartiennent au parallèle d'équation $y = 0 \ (mod\ 1)$.

$$\forall n > m \geqslant 1, f(n, m) = pgcd(n, m)$$

Cette fonction permet de lier géométriquement les nombres premiers. Le solénoïde d'un nombre premier p ne partage qu'un point sur le parallèle $y = 0 \ (mod\ 1)$ avec tout solénoïde associé à un nombre x avec lequel il est premier, que x soit premier lui-même, ou bien composé non divisible par p. La fonction f permet ainsi d'avoir une vision géométrique du treillis de la relation de divisibilité.