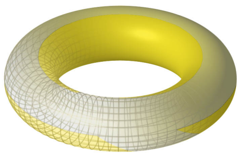
Tore ∞-dimensionnel (DV, 8.5.2016)

On voudrait présenter ici un objet, classique pour les mathématiciens, mais qui semble correspondre au modèle de représentation des entiers qu'on a en tête depuis un certain temps et qui consiste à représenter les entiers par leurs restes dans les divisions euclidiennes par les différents nombres premiers.

Il s'agit du tore ∞-dimensionnel.

Le tore est le produit topologique de 2 cercles (il est engendré par la rotation d'un cercle autour d'un autre cercle). Voici le dessin d'un tore de dimension 2 extrait de l'article "théorème de Minkowski" de wikipedia.



Il faut imaginer le tore ∞-dimensionnel comme sous-tendant un réseau engendré par une infinité de cercles tournant les uns autour des autres.

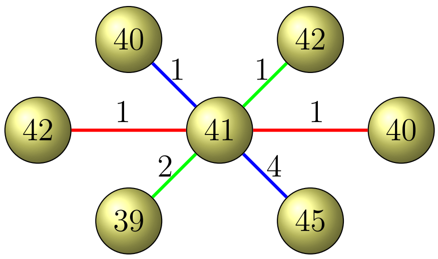
Ce tore est dit ∞-dimensionnel parce qu'il y a une infinité de nombres premiers et que chaque rotation *sur* l'un des cercles correspond au fait de se promener dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, mais de manière continue (en considérant qu'il y aura lors de cette promenade continue trois "arrêts discrets" aux stations "reste $0 \pmod 3$", "reste $1 \pmod 3$" et "reste $2 \pmod 3$" symbolisés habituellement par les trois sommets $e^0, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}$ d'un triangle équilatéral sur le cercle unité).

On voudrait se promener sur les "arêtes courbes" de cet objet (des arcs sur les cercles engendrant le tore), selon une promenade similaire à celle de l'algorithme du simplexe de Dantzig le long des arêtes d'un polyèdre convexe à n dimensions, si ce n'est que dans le cas du simplexe, n est fini. On rappelle l'algorithme du simplexe qui est géométriquement très simple : on cherche une solution optimale d'un système d'inéquations linéaires ; chaque itération de l'algorithme consiste à passer d'un sommet (face de dimension 0) du polyèdre convexe déterminé par les équations à un sommet adjacent en suivant une arête (face de dimension 1) particulière de ce polyèdre, de manière à faire décroître une fonction de coût.

D'une façon analogue, on souhaiterait que la promenade le long des arcs de cercles du tore ∞-dimensionnel permette idéalement d'atteindre un nombre premier à partir d'un autre, en ayant préalablement défini une distance qu'on chercherait à optimiser. Dans un premier temps, on pourrait se contenter de passer d'un sommet respectant certaines contraintes à un autre les respectant aussi toutes, ou bien en respectant certaines, ou bien n'en respectant aucune.

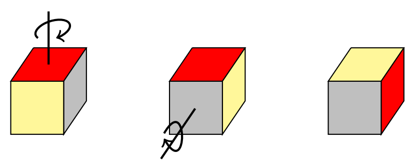
Pour illustrer ces idées, on se place en dimension 3 et on présente sur le dessin ci-dessous un *zoom* sur une portion du maillage sur laquelle on voit le nombre 41 et 6 de ses voisins sur le tore ∞-dimensionnel. Chaque direction correspond à un nombre premier p : le réseau de mailles rouges correspond au nombre premier 2, le réseau vert au nombre premier 3 et le réseau bleu au nombre premier 5. Jusque là, un nombre n (ou plutôt sa classe d'appartenance modulo p) avait comme voisins dans chaque direction les classiques $n-1$ et $n+1$ avec $\dot{0} = \dot{p}$ selon chaque direction du tore, dans la mesure où chaque direction correspond à l'un des groupes cycliques $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sur les arcs du schéma, on a noté la distance habituelle selon le nombre premier maille du réseau qui est la différence des restes. On a vu dans *Distance suprême* qu'une distance classique (racine de la somme des carrés des différences des coordonnées dans les différents réseaux) éloigne au maximum les nombres premiers de leurs 2 voisins classiques (prédécesseur et successeur au sens de l'arithmétique de Peano).

On voit qu'on a fait un autre choix de voisinage : un nombre (ici 41) ne se voit pas attribuer ses voisins "classiques" (40 et 42, $n-1$ et $n+1$ comme voisins de n). En effet, peut-être qu'il pourrait être sensé qu'un nombre ait comme voisins selon la direction p les nombres les plus proches de lui (au sens habituel sur les entiers), entre lesquels il se situe et qui sont divisibles par p ; par exemple, 41 est selon la direction (mod 5) compris entre 40 et 45. Il faut avoir à l'esprit que 40 et 45, puisqu'on est sur un tore, correspondent en fait au même point (ils sont tous les deux dans la classe d'équivalence $\dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Il faut noter que 2 points correspondent au nombre 42, ceci pour faciliter la lecture du dessin, mais ces points doivent être imaginés comme n'en étant qu'un seul.



Il faudrait trouver une distance judicieuse. Toutes ces rotations, selon de multiples directions, donnent le tournis. Elles font penser à l'attraction *Danse avec les robots* du futuroscope de Poitiers, si ce n'est que les rotations dans ce cas, forcément, ne sont combinées que selon 3 directions.

On rappelle que la combinaison de 2 rotations est non-commutative. Pour le comprendre aisément, on peut penser à un cube posé sur la table : ses faces supérieure et inférieure sont rouges, ses faces latérales sont alternativement grises et jaunes, une face jaune est dirigée vers l'avant. Faisons subir au cube une rotation d'un quart de tour selon la direction verticale (sa face inférieure restant en contact intégral avec la table, i.e. sans renverser le cube), puis renversons le cube vers la droite (lui faisant ainsi subir une rotation d'axe horizontal traversant les faces avant et arrière en leur centre). La face rouge supérieure "devient" la face latérale droite du cube (on pense cela parce qu'on a comme "gardé la mémoire" d'un cube transparent qui sous-tendrait la coloration initiale du cube mais l'objet cube n'a évidemment pas changé).



Si on effectue les transformations dans l'ordre inverse, la face rouge supérieure est, dès la première rotation, "descendue en face latérale droite", et la deuxième rotation ne peut fatalement pas la laisser là, elle l'envoie vers l'avant du cube. On note systématiquement l'invariance des faces traversées par les axes de rotation.