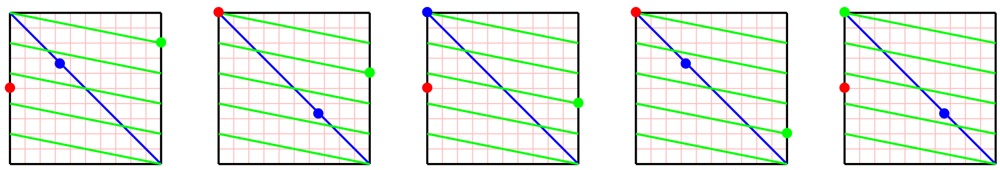
A tore ou à raison ? (DV, 14.7.2015)

On essaie d'appréhender l'espace des nombres premiers. On est attaché à une modélisation qui code chaque nombre entier par le n-uplet infini de ses restes modulaires selon l'infinité des nombres premiers. *Exemple* : 11 est codé par (1,2,1,4,0,11,11,11,11...). L'objectif consiste à associer à chaque reste modulaire $x\ mod\ p$ un point du tore. Pour fixer les idées, on ne va considérer que les restes modulo les 3 premiers nombres premiers 2, 3 et 5. Aux nombres de 1 à 30, on va associer leur triplet de restes modulo 2, 3 et 5 ainsi :

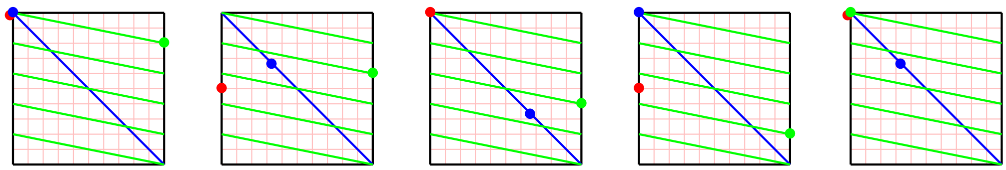
$x \rightarrow (x\ mod\ 2,\ x\ mod\ 3,\ x\ mod\ 5)$	$x \rightarrow (x\ mod\ 2,\ x\ mod\ 3,\ x\ mod\ 5)$
$1 \rightarrow (1,1,1)$	$29 \rightarrow (1,2,4)$
$2 \rightarrow (0,2,2)$	$28 \rightarrow (0,1,3)$
$3 \rightarrow (1,0,3)$	$27 \rightarrow (1,0,2)$
$4 \rightarrow (0,1,4)$	$26 \rightarrow (0,2,1)$
$5 \rightarrow (1,2,0)$	$25 \rightarrow (1,1,0)$
$6 \rightarrow (0,0,1)$	$24 \rightarrow (0,0,4)$
$7 \rightarrow (1,1,2)$	$23 \rightarrow (1,2,3)$
$8 \rightarrow (0,2,3)$	$22 \rightarrow (0,1,2)$
$9 \rightarrow (1,0,4)$	$21 \rightarrow (1,0,1)$
$10 \rightarrow (0,1,0)$	$20 \rightarrow (0,2,0)$
$11 \rightarrow (1,2,1)$	$19 \rightarrow (1,1,4)$
$12 \rightarrow (0,0,2)$	$18 \rightarrow (0,0,3)$
$13 \rightarrow (1,1,3)$	$17 \rightarrow (1,2,2)$
$14 \rightarrow (0,2,4)$	$16 \rightarrow (0,1,1)$
$15 \rightarrow (1,0,0)$	

On représente le premier reste verticalement sur le tore (le reste 0 (mod 2) est le point $(0,0)$ tandis que le reste 1 (mod 2) est le point $(0,1/2)$), le second reste sur la pente bleue et le troisième reste sur la pente verte. On imagine aisément qu'on pourrait ajouter un point à chaque triplet, le transformant en quadruplet, pour prendre en compte le reste modulo 7, et ainsi infiniment, selon l'infinité des nombres premiers.

Présentons sur 10 représentations planes de tores les points associés aux nombres de 1 à 10.



restes de 1 restes de 2 restes de 3 restes de 4 restes de 5



restes de 6 restes de 7 restes de 8 restes de 9 restes de 10

Comment passe-t-on de l'ensemble de points associés à un entier à l'ensemble de points associés à l'entier suivant (cf. la fonction *succ* de l'axiomatique de Peano) ? Il suffit d'appliquer à chacun des points associés à x la "bonne" rotation, selon le module sur lequel on est alors focalisé. Si le module est 3, il s'agit d'effectuer une rotation d'un tiers de tour dans la bonne direction. Modulo 5, la rotation est d'1/5 de tour, etc.

La représentation matricielle d'une rotation d'un tiers de tour en dimension 2 est la matrice

$$\begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{3} & -sin\frac{2\pi}{3} \\ sin\frac{2\pi}{3} & cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

On lit dans un cours que la généralisation en dimension supérieure est faisable moyennant quelques ajustements : il faut utiliser plutôt une représentation des rotations comme s'effectuant selon un seul angle autour d'un axe dirigé par un vecteur unitaire et une rotation quelconque est un produit de telles rotations axiales.

On imagine qu'il ne doit peut-être pas être compliqué de généraliser ces idées en dimension infinie (l'infinité de l'ensemble des nombres premiers).

On comprend que les nombres premiers ont leur ensemble associé de points du tore qui ne contient qu'une seule occurrence du point $(0, 0)$ tandis que les nombres composés ont leur ensemble associé de points du tore qui contient plusieurs de telles occurrences.

Rêve éveillé

On est également tenté de voir une sorte de symétrie entre les points de coordonnée $y = \theta$ et $y = 1 - \theta$. Cela nous ramène à une analogie qu'on avait faite qui liait le $1/2$ de la droite de partie réelle $1/2$ et le $n/2$ qui intervient sans arrêt lors de l'étude des décompositions de Goldbach d'un nombre n[1][2][3].

[1]On n'a pas considéré ici les points du tore comme ayant des coordonnées complexes mais on pourrait imaginer que le point (x, y) représente le nombre complexe $x + iy$.

[2]http://denise.vella.chemla.free.fr/analogie.pdf

[3]Cela nous fait également penser à un extrait d'un article feuilleté de Marc Rieffel "*C*-algebras associated with irrational rotations*" (bien que les coordonnées des points du tore qui interviennent ici soient rationnelles, les rotations sur le tore sont irrationnelles). Cette note fournit un théorème de Rieffel qui énonce (il faudrait stipuler toutes les conditions correspondantes) "$\forall t \in (\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \cap [0, 1]$, il existe un projecteur de $\mathcal{A}_0$ dont la trace est t" et plus loin, "échanger u et v change θ en $1 - \theta$" ce qui entraîne l'apparition un peu plus loin dans la note de la formule

$$g(e^{2i\pi t}) = \sqrt{f(e^{2i\pi t})(1 - f(e^{2i\pi t}))}$$

.