

Réviser l'équation de Boole dans le contexte quantique

Rudolf Muradian et Diego Frias

Résumé : Dans cette note, on essaie de clarifier les relations fondamentales entre les *bits* et les *qubits*, en commençant par l'équation très simple de George Boole. On en déduit une expression générique et compacte pour les vecteurs de base des *qubits* qui peut être utile dans des applications ultérieures. On en déduit également une forme générique pour l'opérateur de projection dans l'espace d'information quantique. Les résultats sont également étendus aux cas de dimensions plus élevées de niveau d des *qutrits* et des *qudits*.

1. Introduction

La théorie de l'information quantique est reliée aux aspects les plus fondamentaux de l'informatique. Dans ce travail, on recherche la transition de l'information classique à l'information quantique. On propose un modèle pour comprendre la relation entre les *bits* et les *qubits* basé sur l'équation de Boole $x^2 = x$. La même procédure est alors appliquée pour deviner une expression générale pour les vecteurs de base unitaires pour l'information quantique de niveau d les *qudits*, comme dans (17). En fait, on démontre que les éléments d'une base orthonormale dans l'espace de Hilbert C^d en dimension d peuvent être représentés sous une forme générique très simple.

2. Bits versus qubits

L'unité élémentaire d'information en informatique classique est le *bit de Shannon* ou simplement *bit*, qui peut prendre seulement deux valeurs $x \in \{0, 1\}$. Le bit de Shannon a été introduit sous l'influence évidente des idées du grand mathématicien et penseur George Boole, il a exposé cette idée dans son livre célèbre [1]. À la page 22 de ce livre, Boole introduit sa célèbre équation

$$x^2 = x \quad (1)$$

et continue à la page 26 :

“Nous avons vu... que les symboles de la logique sont sujets à la loi particulière $x^2 = x$. Maintenant il y a deux symboles numériques, à savoir 0 et 1, qui sont sujets à la même loi formelle. Nous savons que $0^2 = 0$ et que $1^2 = 1$; et l'équation, considérée comme algébrique, n'a pas d'autres racines que 0 et 1.”

Nous allons maintenant démontrer qu'un qubit, une généralisation quantique du bit, peut se déduire d'une généralisation matricielle particulière de cette même équation, notamment

$$P(x)^2 = P(x), \quad x \in \{0, 1\} \quad (2)$$

où x est la solution de l'équation habituelle de Boole (1). L'équation (2) avec la condition de normalisation $\text{Tr } P(x) = 1$ peut être résolue analytiquement pour donner

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \quad (3)$$

CEPEDI, Centre de recherche en informatique de Ilhéus, Département de calcul quantique, Ilhéus BA, Brésil.
UESC, Université d'État de Santa Cruz, Département de sciences exactes et technologiques, Ilhéus BA, Brésil
Référence : <https://arxiv.org/pdf/0705.3010.pdf>
Traduction Denise Vella-Chemla : mars 2023.

Il est évident de voir cela en utilisant les identités $x^2 = x$ et $(1 - x)^2 = 1 - x$, qui sont vérifiées pour tout $x \in \{0, 1\}$. La solution (2) correspond à l'opérateur de projection (opérateur d'état ou opérateur de filtre) en mécanique quantique [2], [3] et en général, n'importe quel opérateur de projection P vérifie la propriété $P^2 = P$. L'opérateur de projection $P(x)$ de (3) peut être représenté en fonction des *kets* de Dirac

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \end{pmatrix} \quad (4)$$

et *bras*

$$\langle x| = (1 - x \quad x) \quad (5)$$

comme produit extérieur *ket* \otimes *bra*

$$P(x) = |x\rangle \langle x| \quad (6)$$

De la définition (4), il découle la forme familière de deux vecteurs de base $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui confirme que les *kets* $|0\rangle$ et $|1\rangle$ de Dirac sont les généralisations quantiques des booléens 0 et 1.

3. Extension aux qutrits et qudits

3.1. Qutrits

La quantité d'information dans le système classique de niveau 3 (ternaire) est appelée *trit* et peut prendre trois valeurs, telles que $x \in \{\text{oui}, \text{non}, \text{inconnu}\}$ ou $x \in \{0, 1, 2\}$. De façon similaire, l'unité d'information quantique dans un système quantique de niveau 3 (par exemple une particule de spin 1 dans un champ magnétique) est appelée un *trit quantique* ou *qutrit*. On va montrer que la solution appropriée 3×3 de la généralisation matricielle de l'équation de Boole peut être utilisée pour introduire un vecteur *qutrit ket* normalisé en dimension 3 en forme compacte

$$|x\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-x)(2-x) \\ 2x(2-x) \\ x(x-1) \end{pmatrix}, \quad x \in \{0, 1, 2\} \quad (7)$$

L'équation classique de Boole pour un *trit* est une équation cubique

$$x(x-1)(x-2) = 0 \quad (8)$$

L'équation matricielle quantique correspondante

$$P(x)^2 = P(x), \quad x \in \{0, 1, 2\} \quad (9)$$

a une solution matricielle 3×3 de la forme

$$P(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-x)(2-x) & 0 & 0 \\ 0 & 2x(2-x) & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1) \end{pmatrix} \quad (10)$$

qui peut aussi être exprimée comme un produit extérieur $P(x) = |x\rangle \langle x|$ avec $|x\rangle$ donné comme dans (7). De (7) et (10), on peut voir qu'un qutrit est décrit par les trois vecteurs de base suivants

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

avec les opérateurs de projection correspondants

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

3.2. Qudits

Une unité d'information quantique dans un système d'information quantique de niveau d , ou *qudit*, peut être introduite de la même manière. Pour des raisons de simplicité, considérons d'abord le cas particulier $d=4$. Les mêmes considérations permettent d'obtenir les vecteurs de base *ket* d'un système de niveau 4 comme

$$|x\rangle = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (1-x)(2-x)(3-x) \\ 3x(2-x)(3-x) \\ 3x(x-1)(3-x) \\ x(x-1)(2-x) \end{pmatrix} \quad x \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (13)$$

et l'opérateur de projection de taille 4×4 correspondant $P(x)$ qui a seulement des termes diagonaux non nuls défini par les entrées du vecteur ci-dessus, c'est-à-dire

$$P(x) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (1-x)(2-x)(3-x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3x(2-x)(3-x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3x(x-1)(3-x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x(x-1)(2-x) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Cet opérateur de projection est une solution de l'équation de Boole matricielle pour $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ avec les propriétés

$$P(x)^2 = P(x), \quad \text{Tr } P(x) = 1 \quad (15)$$

La relation de complétude est remplie :

$$\sum_{x=0}^3 P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Il est facile de généraliser ces résultats au cas général des *qudits*. Pour un système de niveau d : $x \in$

$\{0, 1, 2, \dots, d - 1\}$, le vecteur de base *ket* prend la forme

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \frac{(1-x)(2-x)\cdots(d-1-x)}{(d-1)!} \\ \frac{(0-x)(2-x)\cdots(d-1-x)}{(d-2)!} \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{(-1)^k k! ((d-1-k)!)} \prod_{k'=0, k' \neq k}^{d-1} (k' - x) \\ \vdots \\ \frac{(0-x)(1-x)\cdots(d-2-x)}{(-1)^{d-1} (d-1)!} \end{pmatrix} \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, d - 1\} \quad (17)$$

Un vecteur normalisé général en dimension d peut être développé dans sa base comme

$$\sum_{x=0}^{d-1} a_x |x\rangle \quad (18)$$

où les a_x sont des nombres complexes satisfaisant $\sum_x |a_x|^2 = 1$.

4. Exemple

La représentation des vecteurs de base pour les qubits dans la forme (4) permet de représenter la base d'intrication de Bell pour deux qubits sous forme compacte. En utilisant le circuit bien connu de *Hadamard* et des portes *cnot*, on obtient à partir de (4) la forme compacte explicite suivante pour les états de Bell

$$|B_{xy}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) \\ y-xy \\ x-xy \\ xy \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ y-2xy \\ (1-2x)(1-y) \end{pmatrix} \quad (19)$$

qui peut être comparée à d'autres expressions bien connues, par exemple dans [4].

5. Conclusions

En commençant à partir de l'équation plutôt simple de Boole et de sa généralisation matricielle, nous avons trouvé une représentation générique et compacte des vecteurs de base pour le cas des *qubits*, des *qutrits* et des *qudits*. Nous espérons que nos résultats pourront aider dans la formalisation d'algorithmes quantiques et être utilisés par le chercheur dans les domaines de l'information et du calcul quantiques.

Remerciements : Ce travail a été financé par la FAPESB (Fondation de recherche de l'état de Bahia, Brésil). **Références**

- [1] G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, London, McMillan&Co, 1854, p. 22-26. <https://www.gutenberg.org/files/15114/15114-pdf.pdf>.
- [2] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon, Oxford, 1958. <https://digbib.bibliothek.kit.edu/volltexte/wasbleibt/57355817/57355817.pdf>.
- [3] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, p. 66.
- [4] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.