Les nombres comme fonctions[1]

Yuri I. Manin

Institut Max Planck pour les mathématiques, Bonn, Allemagne

Résumé. Dans ce survol, je discute de la théorie de A. Buium des "équations différentielles dans la direction p–adique" ([Bu05]) et de ses inter-relations avec la "géométrie sur le corps à un élément", sur la base de différentes approches des modèles p–adiques en physique théorique (cf. [VlVoZe94], [ACG13]).

Introduction

Une des plus belles (voire *la* plus belle) des formules mathématiques est l'identité d'Euler

$$e^{\pi i} = -1. \tag{0.1}$$

Elle lie quatre nombres $\pi = 3,1415912\ldots$, $e = 2,71828\ldots$, $i = \sqrt{-1}$, et -1 lui-même, et a une très forte saveur physique étant la base du principe universel des "amplitudes de probabilités d'interférence" en mécanique quantique et en théorie des champs quantique. Le "-1" du côté droit de (0.1) montre comment deux états quantiques de phases opposées peuvent s'annuler l'un l'autre après superposition.

D'un autre côté, de ces quatre nombres $\pi, e, i, -1$, *seul* π ressemble à quelque chose de similaire à une "constante physique" au sens où il peut être (et a été) mesuré avec une certaine approximation.

De plus, les noms traditionnels des classes respectives de nombres, que nous avons tendance de nos jours à percevoir comme des termes mathématiques introduits par des définitions dans les cours de calcul, – *irrationels, transcendants, imaginaires, négatifs,* – ont transmis au cours de l'histoire la perplexité primordiale de l'esprit rationnel, qui découvre ces nombres mais reste réticent à les accepter.

On peut rappeler qu'au moment de leur découverte, ces nombres avaient des sources très différentes de justification : π dans la géométrie euclidienne (qui décrit essentiellement la cinématique des solides dans le vide gravitationnel), -1 dans le commerce ("notion de somme restant dûe"), e dans les débuts de l'informatique (l'implémentation de Napier de la découverte qu'un précalcul spécifique peut faciliter les tâches de tous les jours associées à la multiplication), i dans les débuts de l'histoire des équations polynomiales.

Quand on m'a demandé de donner un exposé au Workshop sur les méthodes p–adiques de modélisation des systèmes complexes, j'ai décidé de présenter d'abord un environnement p–adique de π et e.

Il est probable que la formule "arithmétique" la plus ancienne dans laquelle π intervient soit due à Euler (comme (0.1)):

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_p (1 - p^{-2})^{-1}. \tag{0.2}$$

Pourtant, elle fait intervenir *tous* les nombres premiers p simultanément, et en fait, elle peut être mieux comprise comme un fait de la géométrie *adélique*. En tant que telle, elle ressemble à une généralisation de la formule produit simplette $\prod_v |a|_v = 1$ valide pour tout $a \in \mathbf{Q}^*$, où v parcourt toutes les valuations de $\mathbf{Q}$, les valuations p–adiques et la valuation archimédienne. Pour être plus

[1] Basé sur des exposés à l'*International Workshop on p–adic methods for modelling of complex systems*, Bielefeld, du 15 au 19 Avril 2013, et aux *Journées Arithmétiques*, à Grenoble, du 2 au 5 juin 2013.

Traduction de la note https://arxiv.org/pdf/1312.5160.pdf, Denise Vella-Chemla, juillet 2023.

précis, (0.2) exprime le fait que la mesure naturelle adélique de $\mathrm{SL}(2, A_{\mathbf{Q}})/\mathrm{SL}(2, \mathbf{Q})$ est égale à 1. Pour plus de détails, voir [Ma89], où il était suggéré que la physique quantique fondamentale pouvait être reliée à la théorie des nombres via cette philosophie adélique, *"la démocratie de toutes les valuations"*, et que l'usage exclusif des nombres réels et des nombres complexes dans nos formalismes standards est une affaire de tradition, que nous essayons maintenant de surpasser en remplaçant "la première parmi les égales" valuation archimédienne par une valuation arbitraire non archimédienne.

Maintenant voyons e. Ici, comme le découvreur des nombres p–adiques Kurt Hensel lui-même le remarquait, on a un candidat pour e^p dans chaque corps p–adique, puisque les séries (archimédiennes) pour e^p convergent également p–adiquement :

$$e^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}. \tag{0.3}$$

Puisque la racine de degré p du côté droit de (0.3) comprise comme un nombre p–adique engendre une extension de $\mathbf{Q}_p$ de degré p, il peut n'y avoir aucun nombre algébrique avec de tels composants locaux.

Cet argument semble, d'une manière alléchante, proche d'une preuve de la transcendance de e, bien que, bien sûr, il n'en soit pas un. D'un autre côté, je ne connais aucune formule adélique faisant intervenir e d'une manière semblable à celle dont (0.2) fait intervenir π.

Dans le présent survol, je procède à une discussion consistant en trois parties principales.

A. Je décrirai une classe de nombres (incluant les nombres transcendants) pertinents pour la théorie quantique des champs au sens où ils définissent les coefficients de séries perturbatives pour les intégrales de chemin de Feynman. Ces nombres sont appelés périodes (numériques), ils ont été introduits et étudiés dans [KoZa01].

Grossièrement, les périodes numériques sont des valeurs en des points algébriques de certaines *fonctions transcendantes multi–valuées*, naturellement définies sur plusieurs espaces modulaires, et également appelées traditionnellement périodes de fonctions.

Ces périodes de fonctions satisfont des équations différentielles de type Picard–Fuchs, et de telles équations fournissent les outils principaux pour les étudier.

Dans la seconde partie de ce survol, je me concentrerai sur le programme suivant :

B. Pour un nombre premier p, des périodes numériques aussi peuvent être considérées comme des solutions d'"équations différentielles dans la direction p–adique".

La machinerie complète de telles équations différentielles a été suggérée et développée par Alexandru Buium, cf. sa monographie [Bu05], et je la rappellerai. J'utilise l'expression "les nombres comme des fonctions" pour nommer cette analogie.

Alexandru Buium a montré de façon convaincante que l'analogie correcte pour la dérivation p-adique est (une généralisation naturelle du) quotient de Fermat $\delta_p(a) := (a - a^p)/p$ initialement défini pour $a \in \mathbf{Z}$. De façon inattendue, cette idée formelle a de riches conséquences : Buium était capable de construire des analogues des espaces jets classiques "dans la direction p–adique", avec une théorie des fonctions de ces espaces jets, contenant une quantité incroyable de constructions classiques nécessitant traditionnellement du calcul.

Ces périodes numériques qui étaient déjà traitées par Buium incluent les périodes des variétés abéliennes sur les corps de nombres (ou même p-adiques). (Mais le lecteur devrait être attentif au fait que, en l'absence d'uniformisation, cette dernière assertion seulement décrit très grossièrement un dessin assez compliqué ; voir pour plus de détails le texte principal).

C. Pour les équations différentielles de Buium, "les constantes dans la direction p–adique" s'avèrent être les racines de l'unité et zéro : les représentants de Teichmüller des classes résiduelles modulo p.

Jusqu'à récemment, la géométrie algébrique sur de telles constantes était motivée par des connaissances très différentes : pour un survol plus détaillé, voir [Ma95], [Ma08]. Elle est connue comme la "théorie du corps $\mathbf{F}_1$".

Brièvement, ce dernier champ de recherche se focalise sur le but suivant : pour faire une analogie entre, disons, $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ (ou le spectre d'anneaux d'entiers algébriques) d'un côté, et les courbes algébriques de l'autre, si élaborée et précise qu'on puisse utiliser une version de la technique d'André Weil, Alexander Grothendieck et Pierre Deligne pour approcher la conjecture de Riemann pour la fonction zeta de Riemann et les fonctions arithmétiques similaires.

Un pont solide entre la $\mathbf{F}_1$–géométrie et les équations différentielles arithmétiques a été construit par James Borger : cf. [Bor11a,b], [Bor09], [BorBu09]. Pour le dire brièvement, pour définir la dérivée p–adique δ_p des éléments d'un anneau commutatif, on a besoin d'un *ascenseur* de l'application de Frobenius, c'est-à-dire d'un endomorphisme $a \mapsto F(a)$, tel que $F(a) \equiv a^p \,(\mathrm{mod}\, p)$. Borger a remarqué qu'un système très naturel de tels ascenseurs pour tous les p simultanément est codé par la *psi–structure* comme on l'appelle, ou par une légère modification, la *lambda–structure,* et il a alors suggéré de considérer une structure comme *une donnée de descente sur* $\mathrm{Spec}\,A$ *vers* $\mathbf{F}_1$. Une notion reliée de "coordonnée cyclotomique" dans $\mathbf{F}_1$ a été suggérée indépendamment dans [Ma08]. En particulier, $a \in A$ est une coordonnée cyclotomique (selon un nombre premier p) si $F(a) = a^p$. Je reviendrai à ces idées dans la dernière partie de ce survol.

Finalement, je mentionnerai qu'il existe une théorie profonde très bien développée des "périodes p–adiques" pour les variétés algébriques définie sur les corps p–adiques qui a remplacé l'intégration classique des formes différentielles sur les cycles topologiques avec une comparaison avec les théories de cohomologie de de Rham et étale : voir [Fa88] et une récente contribution et un bref survol [Be11]. Les périodes dans ce paradigme appartiennent à un très grand champ de Fontaine B_{dR}. L'approche des périodes par la géométrie p-adique de Buium que nous décrivons dans ce survol a une saveur très différente. Il serait certainement important de trouver des connexions entre ces deux théories.

1. Périodes

1.1. Périodes numériques. M. Kontsevich et D. Zagier ont introduit un important sous-anneau $P \subset \mathbf{C}$ contenant tous les nombres algébriques et de nombreux nombres importants en physique (voir [KoZa01]).

1.1.1. Définition. *$\alpha \in P$ si et seulement si les parties réelle et imaginaire de α sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions dans $\mathbf{Q}(x_1, \dots, x_n)$ sur des séquences dans $\mathbf{R}^n$ données par des inégalités polynomiales avec coefficients dans $\mathbf{Q}$.*

1.1.2. Exemples.

a) Tous les nombres algébriques sont des périodes.

b) $\pi = \int\int_{x^2+y^2\le 1} dxdy.$

c) $\Gamma\,(p/q)^q \in P.$

Il n'est pas difficile de prouver que les périodes forment un sous-anneau de $\mathbf{C}$. Les intégrales de Feynman (d'une certaine classe) sont des périodes. Mais on ne sait toujours pas si π^{-1}, e, ou la constante d'Euler γ sont des périodes (probablement pas). Il y a une connexion forte entre les périodes et les motifs de Grothendieck (voir [KoZa01]), et $2\pi i$ correspond au motif de Tate. Puisque dans le formalisme motivique, on inverse formellement le motif de Tate, il est également utile d'étendre l'anneau de période par $(2\pi i)^{-1}$.

d) Les ζ–valeurs multiples (Euler)

$$\zeta(n_1, ..., n_m) = \sum_{0<k_1<...<k_m} \frac{1}{k_1^{n_1} \dots k_m^{n_m}}\,, \qquad n_i \geq 1, n_m > 1\,. \tag{1.1}$$

sont des périodes.

Pour le voir, on reproduit la formule intégrale de Leibniz et de Kontsevich pour elles.

Soit $n_1, \dots, n_m$ des entiers positifs comme dans (1.1). Posons $n := n_1 + \dots + n_m$, et $\underline{\varepsilon} := (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 0$ ou 1, et $\varepsilon_i = 1$ précisément quand $i \in \{1, n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{m-1} + 1\}$. De plus, posons

$$\omega(\underline{\varepsilon}) := \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge ... \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}$$

et

$$\Delta_n^0 := \{(t_1^0, \dots, t_n^0) \in \mathbf{R}^n \quad | \quad 0 < t_1^0 < \dots < t_n^0 < 1\}$$

Alors on a

$$\zeta(n_1, \dots, n_m) = \zeta(\underline{\varepsilon}) = (-1)^m \int_{\Delta_n^0} \omega(\underline{\varepsilon}).$$

Pour de plus amples détails, voir [GoMa04], où les motifs mixtes associés à ces périodes ont été identifiés : ils sont construits en utilisant les espaces modulaires $\overline{M}_{0,n}$ et leurs stratifications canoniques.

1.2. Fonctions–périodes. Parfois on peut introduire des paramètres dans la description des éléments de P esquissée ci-dessus et ainsi passer à l'étude des périodes comme des fonctions. À cette fin, il est d'abord pratique de réécrire la définition d'une façon plus appropriée dans le paradigme géométrico–algébrique, comme cela a déjà été fait dans [KoZa01], sec. 4.1.

Considérons un quadruplet (V, D, ω, γ). Ici, V est une variété algébrique de dimension pure n, munie du diviseur D avec croisements normaux, n–forme ω régulière en dehors de D, et une classe d'homologie $\gamma \in H_n(V(\mathbf{C}), D(\mathbf{C}); \mathbf{Q})$. De plus, (V, D, ω) doit être définie sur $\mathbf{Q}$, et l'intégrale $\int_\gamma \omega$ doit converger. Alors l'ensemble de telles intégrales coïncide avec l'anneau de périodes P défini ci-dessus.

La façon de relativiser cette définition est maintenant claire, en remplaçant V par un morphisme relativement lisse $f : V \to S$ défini sur $\mathbf{Q}$, muni d'une S–famille appropriée de donnéees (D, ω, γ) ayant les propriétés nécessaires dans le sens de la fibre.

Alors on obtient des fonctions intéressantes, généralement transcendantes sur la base S, et éventuellement sur les espaces / piles modulaires, et ces fonctions satisfont les (versions des) équations classiques de Picard–Fuchs.

1.2.1. Exemple 1. Soit S la droite affine avec t–coordonnée, et les points $t = 0, 1$ effacés. Sur elle, on a la famille E des courbes elliptiques E_t, qui sont des fermetures projectives de la courbe affine $E_t : Y^2 = X(X-1)(X-t)$.

Voici l'équation différentielle linéaire pour les périodes de la 1–forme relative sur la base dX/Y le long des 1–cycles fermés dans le sens de la fibre de E_t:

$$L_t\omega := 4t(1-t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + 4(1-2t)\frac{d\omega}{dt} - \omega = 0. \tag{1.2}$$

Exemple 2. L'équation différentielle non linéaire pour les périodes de dX/Y sur les 1–cycles relatifs avec bornes aux sections $P := (X(t), Y(t))$ d'ordre fini :

$$\mu(P) = 0, \tag{1.3}$$

où

$$\mu(P) := \frac{Y(t)}{2(X(t)-t)^2} - \frac{d}{dt}\left[2t(t-1)\,\frac{X'(t)}{Y(t)}\right] + 2t(t-1)X'(t)\,\frac{Y'(t)}{Y(t)^2}. \tag{1.4}$$

Notons que μ, défini par (1.3) et étendu à la fonction sur l'ensemble des L–points de la fibre générique E_t avec des valeurs dans n'importe quelle extension différentielle L de $\mathbf{Q}(t)$ est "un caractère différentiel" :

$$\mu(P+Q) = \mu(P) + \mu(Q) \tag{1.5}$$

Pour expliquer (et prouver) ces résultats, il suffit de noter que

$$\mu(P) = L_t \int_\infty^P dX/Y$$

parce que

$$L_t(dX/Y) = d\frac{Y}{(X-t)^2}.$$

1.3. Intégrales de Feynman perturbatives. Ici je décrirai brièvement l'origine heuristique de l'ensemble des périodes numériques (et des fonctions–périodes) indexées par des graphes étiquetés pertinent pour la théorie quantique des champs, suivant [Ma09], sec. 1. Pour une étude plus précise de (certaines) intégrales apparaissant de cette façon, voir [MüWZa12] et [W13].

Une intégrale de chemin de Feynman est une expression heuristique de la forme

$$\frac{\int_P e^{S(\varphi)} D(\varphi)}{\int_P e^{S_0(\varphi)} D(\varphi)} \tag{1.6}$$

ou, plus généralement, une expression heuristique similaire pour *les fonctions de corrélation.*

Ici le domaine d'intégration P représente un espace fonctionnel de *corps classiques* φ sur une *variété d'espace-temps* M. L'espace-temps peut être muni d'une mesure de Minkowski ou euclidienne. Dans les modèles de gravité quantique, la mesure est un de ces corps. Les corps peuvent être des corps de fonctions scalaires, de tenseurs de différents rangs, de sections de fibrés vectoriels, de relations.

$S : P \to \mathbf{C}$ est une fonctionnelle d'*action classique* : généralement $S(\varphi)$ s'exprime comme une intégrale sur M d'une densité locale sur M qu'on appelle le *lagrangien.* Dans notre notation (1.6) $S(\varphi) = -\int_M L(\varphi(x))dx$. la densité du lagrangien peut dépendre de dérivés, inclut des distributions, etc.

Habituellement $S(\varphi)$ est représentée comme la somme d'une *partie quadratique* $S_0(\varphi)$ (le lagrangien des corps libres) et de termes restants qui sont interprétés comme des interactions et sont traités de façon perturbative.

Finalement, la mesure d'intégration $D(\varphi)$ et l'intégrale elle-même $\int_P$ devraient être simplement considérées comme une partie de l'expression totale (1.6) exprimant l'idée d'une "sommation des amplitudes de probabilités quantiques sur toutes les trajectoires classiques".

Pour expliquer l'apparence et la combinatoire des graphes de Feynman, considérons un modèle jouet, dans lequel P est remplacée par un espace réel de dimension finie. On le munit d'une base indexée par un ensemble fini de "couleurs" A, et d'une mesure euclidienne g codée par le tenseur symétrique (g^{ab}), $a, b \in A$. On pose $(g^{ab}) = (g_{ab})^{-1}$.

L'action fonctionnelle $S(\varphi)$ sera une série formelle en coordonnées linéaires sur P, (φ^a), de la forme

$$S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_1(\varphi), \quad S_0(\varphi) := -\frac{1}{2}\sum_{a,b} g_{ab}\varphi^a\varphi^b,$$

$$S_1(\varphi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{a_1,\dots,a_k \in A} C_{a_1,\dots,a_k}\varphi^{a_1}\dots\varphi^{a_k} \tag{1.7}$$

où les $(C_{a_1,\dots,a_n})$ sont certains tenseurs symétriques. Si ces tenseurs s'évanouissent pour tous les rangs suffisamment grands n, $S(\varphi)$ devient un polynôme et peut être considéré comme une fonction authentique sur P. Ci-dessous, on traitera (g_{ab}) et $(C_{a_1,\dots,a_n})$ comme des variables formelles indépendantes, "des coordonnées formelles sur l'espace des théories".

Maintenant, on peut exprimer la version jouet de (1.6) comme une série sur des (classes d'isomorphismes de) graphes.

Ici, un graphe τ consiste en deux ensembles finis, les arêtes E_τ et les sommets V_τ, et l'application d'incidence envoyant E_τ vers l'ensemble des paires non ordonnées de sommets. Chaque sommet est supposé être incident à au moins une arête. Il y a un *graphe vide.*

La formule pour (1.6) incluant un ou plusieurs paramètres formels λ ("constante de Planck") ressemble à la formule suivante :

$$\frac{\int_P e^{\lambda^{-1}S(\varphi)}D(\varphi)}{\int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}D(\varphi)} = \sum_{\tau\in\Gamma} \frac{\lambda^{-\chi(\tau)}}{|\,\tau|}\, w(\tau) \tag{1.8}$$

Du côté droit de (1.8), la sommation est prise sur (les représentants de) toutes les classes d'isomorphismes de tous les graphes finis τ. Le poids $w(\tau)$ d'un tel graphe est déterminé par la fonctionnelle d'action (1.2) comme suit :

$$w(\tau) := \sum_{u\colon F_\tau\to A} \prod_{e\in E_\tau} g^{u(\partial e)} \prod_{v\in V_\tau} C_{u(F_\tau(v))}\,. \tag{1.9}$$

Ici F_τ est l'ensemble des drapeaux, ou "demi-arêtes" de τ. Chaque arête e consiste en une paire de drapeaux dénotée par ∂e, et chaque sommet v détermine l'ensemble des drapeaux qui lui est incident, dénoté $F_\tau(v)$. Finalement, $\chi(\tau)$ est la caractéristique d'Euler de τ.

Le passage du côté gauche de (1.8) au côté droit est par définition le résultat d'une intégration terme à terme de la série formelle qui peut être obtenue à partir de la série de Taylor de l'exposant dans l'intégrande. Concrètement

$$\int_P e^{\lambda^{-1}S(\varphi)}D(\varphi) = \int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}\left(1+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-N}S_1(\varphi)^N}{N!}\right)\prod_a d\varphi^a \ :=$$

$$\int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}\prod_a d\varphi^a \ +$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-N}}{N!}\sum_{k_1,\dots,k_N=1}^{\infty}\frac{1}{k_1!\dots k_N!}\sum_{a_j^{(i)}\in A, 1\le j\le k_i}\prod_{i=1}^{N} C_{a_1^{(i)},\dots,a_{k_i}^{(i)}}\int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}\prod_{i,j}^{N}\varphi^{a_j^{(i)}}\prod_a d\varphi^a\,. \tag{1.10}$$

Cette définition a du sens si le côté droit de (1.10) est compris comme une série formelle d'un nombre infini de variables pondérées indépendantes $C_{a_1,\dots,a_k}$, le poids de $C_{a_1,\dots,a_k}$ étant k. En fait, les intégrales gaussiennes dans les coefficients convergent uniformément, et on peut utiliser ce qu'on appelle le lemme de Wick.

La dernière remarque est que les *périodes* apparaissant dans les modèles concrets des théories quantiques des champs sont des *poids (1.9)*, dans lesquels la *sommation* sur les applications $u : F_\tau \to A$ est remplacé par l'*intégration* sur certaines variables continues comme les positions / momenta /couleurs des particules se déplaçant le long des arêtes de graphes respectifs de Feynman : cf. [W13], [MüWZa12] et les références qu'ils fournissent.

2. Équations différentielles arithmétiques

2.1. Analogies entre les nombres p–adiques et les séries formelles. En combinant les leçons des exemples précédents, on suggère maintenant que pour voir les "propriétés p–adiques" des périodes numériques des nombres transcendants importants pour la physique, on essaie de concevoir une théorie des "dérivations dans la direction p–adique" et que l'on interprète les périodes numériques comme les solutions d'équations différentielles dans la direction p–adique.

Ci-dessous, on présente les bases d'une telle théorie due à A. Buium. On commence avec la table d'analogies suivante. Du côté des séries formelles, on considère des anneaux de la forme $k[[t]]$ où k est un corps de caractéristique zéro. Du côté p–adique, on considère l'extension non ramifiée maximale R de $\mathbf{Z}_p$.

Séries formelles	p-adique
$\sum a_i t^i \in k[[t]] =: L$	$\sum \varepsilon_i p^i \in R := \mathbf{Z}_p^{un}$
Corps de constantes : $a_i \in k$	Monoïde : $\varepsilon_\mathrm{i} \in \mu_\infty \cup \{0\}$ (*représentants de Teichmüller*)
Dérivation : d/dt	$\delta_p(*) := \frac{\Phi(*)-*^p}{p}$ ($\Phi :=$ *ascenseur de Frobenius*)
Opérateurs différentiels polynomiaux(OPD) :	OPD p-adique :
$D \in L[T_0, T_1, \dots, T_n]$	$D_p \in \overline{R[T_0, T_1, \dots, T_n]}$ *complétion* (p-*adique* !)

Action de OPD^2 : $f \mapsto D(f, f', \dots f^{(n)})$ or $D_p(f, \delta_p f, \dots, \delta_p^n f)$

L'ascenseur de Frobenius $\Phi : R \to R$ qui intervient dans la définition de la dérivée p–adique δ_p est donné explicitement comme $\Phi(\sum \varepsilon_i p^i) := \sum \varepsilon_i^p p^i$.

2.2. Exemples et applications. Ici on donne des exemples d'opérateurs différentiels p–adiques intéressants.

2.2.1. Exemple 1 : *dérivée logarithmique p–adique.* C'est un analogue de l'application

$$\mathbf{G}_m(L) \to \mathbf{G}_a(L) : \quad f \mapsto f'/f \tag{2.1}$$

où un point $x \in \mathbf{G}_m(L)$ est représenté par la valeur $f \in L^*$ en x d'un caractère algébrique fixé t de $\mathbf{G_m}$ tel que $\mathbf{G_m} = \mathrm{Spec}\,[t, t^{-1}]$. De façon similaire, sa version p–adique est le caractère différentiel

$$\mathbf{G}_m(R) \to \mathbf{G}_a(R) :$$

$$a \mapsto \delta_p a \cdot a^{-p} - \frac{p}{2}(\delta_p a \cdot a^{-p})^2 + \frac{p^2}{3}(\delta_p a \cdot a^{-p})^3 - \dots \tag{2.2}$$

Exemple 2 : *Symbole de réciprocité quadratique :*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!} (\delta_p a)^k a^{-pk}\right) .$$

Exemple 3 : *Un analogue p–adique du caractère différentiel μ du groupe de sections d'une courbe elliptique générique :*

$$\mu(P) = (4t(1-t)\frac{d^2}{dt^2} + 4(1-2t)\frac{d}{dt} - 1) \int_{\infty}^{P} \frac{dX}{Y}$$

comme un opérateur différentiel p–adique non linéaire agissant sur les coordonnées de P.

De tels analogues ont été construits dans [Bu95] également pour des variétés abéliennes de dimension arbitraire et appelés caractères δ_p–différentiels $\psi(P)$. Plus précisément, soit E une courbe elliptique sur R. Alors il existe une application différentielle additive $\psi : E(R) \to R^+$ d'ordre 2 (comme dans le cas géométrique) ou 1 (comme pour $\mathbf{G}_m$).

Un caractère d'ordre 2 existe si E a une bonne réduction et n'est pas l'élévation canonique de sa réduction dans le sens de Serre–Tate : cf. une discussion supplémentaire dans la section 4.4 ci-dessous.

Un caractère d'ordre 1 existe si soit E a une bonne réduction ordinaire et est l'élévation canonique, soit E a une mauvaise réduction multiplicative.

En utilisant ces caractères multiplicatifs, A. Buium et l'auteur du présent article ont construit dans [BuMa13] des *"équations de Painlevé VI avec temps p–adique."*

2.3. Formalisme général des p–dérivations. Dans l'algèbre commutative, étant donné un anneau A et un A–module N, *une dérivation de A avec valeurs dans N* est une application additive $\partial : A \to N$ telle que $\partial(ab) = b\partial a + a\partial b$. De façon équivalente, l'application $A \to A \times N : a \mapsto (a, \partial a)$ est un homomorphisme d'anneaux, où $A \times N$ est muni de la structure d'anneau commutatif avec addition composant par composant, et hérite de la multiplication de A sur $A \times \{0\}$ et a $\{0\} \times N$ comme idéal de carré zéro.

De façon similaire, en géométrie arithmétique, Buium définit *une p–dérivation de A avec valeurs dans une A–algèbre B, $f : A \to B$,* comme une application $\delta_p : A \to B$ telle que l'application $A \to B \times B : a \mapsto (f(a), \delta_p(a))$ est un homomorphisme d'anneaux $A \to W_2(B)$ où $W_2(B)$ est l'anneau des vecteurs de Witt p–typiques de longueur 2. Ici, les vecteurs de Witt de la forme $(0, b)$ forment l'idéal de carré zéro seulement si $pB = \{0\}$.

En rendant cette définition explicite, on obtient $\delta_p(1) = 0$, et la version suivante des formules d'additivité et de Leibniz :

$$\delta_p(x + y) = \delta_p(x) + \delta_p(y) + C_p(x, y), \tag{2.3}$$

$$\delta_p(xy) = f(x)^p \cdot \delta_p(y) + f(y)^p \cdot \delta_p(x) + p \cdot \delta_p(x) \cdot \delta_p(y), \tag{2.4}$$

où

$$C_p(X, Y) := \frac{X^p + Y^p - (X + Y)^p}{p} \in \mathbf{Z}[X, Y]. \tag{2.5}$$

En particulier, cela implique que pour toute p–dérivation $\delta_p : A \to B$, l'application respective $\phi_p : A \to B$ définie par $\phi_p(a) := f(a)^p + p\delta_p(a)$ est un homomorphisme d'anneaux satisfaisant $\phi_p(x) \equiv f(x)^p \pmod p$, c'est-à-dire un "ascenseur de l'application de Frobenius appliquée à f".

Inversement, en ayant un tel ascenseur du Frobenius, on peut reconstruire de manière unique la dérivation respective δ_p *sous la condition que B n'ait pas de p–torsion :*

$$\delta_p(a) := \frac{\phi_p(a) - f(a)^p}{p}$$

en généralisant la définition donnée en 2.1 pour $A = B = R$ et le morphisme identique.

En travaillant avec les p–dérivations $A \to A$ par rapport à l'application identité $A \to A$ et en conservant p fixé, on peut appeler (A, δ) un δ–anneau. Les morphismes de δ–anneaux sont des morphismes d'algèbre compatibles avec leurs p–dérivations.

2.4. p–jets espaces. Soit A une R–algèbre. *Un séquence de prolongement* pour A consiste en une famille de R–algèbres p–adiquement complètes $A^i, i \geq 0$, où $A^0 = A\hat{}$ est la complétion p–adique de A, et d'applications $\varphi_i, \delta_i : A^i \to A^{i+1}$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) les φ_i sont des homomorphismes d'anneaux, chaque δ_i est une p–dérivation par rapport à φ_i, compatible avec δ sur R.

b) $\delta_i \circ \varphi_{i-1} = \varphi_i \circ \delta_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$.

Les séquences de prolongements forment une catégorie avec morphismes triviaux, homomorphismes d'anneaux $f_i : A^i \to B^i$ commutant avec φ_i et δ_i, et dans leur sous-catégorie avec A^0 fixé *il existe un élément initial, défini à isomorphisme unique près* (cf. [Bu05], Chapitre 3). On peut l'appeler la séquence universelle de prolongement.

Dans le langage géométrique, si $X = \operatorname{Spec} A$, le spectre formel du $i^{\text{ième}}$ anneau A^i dans la séquence de prolongement universelle est dénoté par $J^i(X)$ et on le désigne comme *le $i^{\text{ième}}$ p–jet espace de X*. Inversement, $A^i = O(J^i(X))$, l'anneau des fonctions globales.

Les morphismes géométriques (des schémas formels sur $\mathbf{Z}$) correspondant à ϕ_i sont dénotés par $\phi^i : J^i(X) \to J^0(X) =: X\hat{}$(complétion p–adique formelle de X).

Cette construction est compatible avec la localisation de telle façon qu'elle peut être appliquée à des schémas non nécessairement affines : cf. [Bu05], Chapitre 3.

3. Version du calcul de Buium arithmétiquement global et lambda–anneaux

3.1. Introduction. Les nombres p–adiques ont été considérés dans la sec. 2 ci-dessus comme des analogues des fonctions formelles / germes locaux des fonctions à une variable.

Dans cette section, on discute de la question suivante : existe-t-il une version (plus) globale des "fonctions arithmétiques", éléments d'un anneau A, admettant des dérivations p–adiques δ_p par rapport à plusieurs, éventuellement tous les nombres premiers p ?

Un exemple évident est $\mathbf{Z}$:

$$\delta_p(m) = \frac{m - m^p}{p}.$$

Généralement, on a besoin d'"ascenseurs des Frobenii" : de tels endomorphismes d'anneaux $\Phi_p : A \to A$ tels que $\Phi(a) \equiv a^p \pmod{\mathrm{p}}$. Alors on peut poser

$$\delta_p(a) = \frac{\Phi_p(a) - a^p}{p}.$$

Un cadre général pour un système cohérent de tels ascenseurs est donné par la définition suivante :

3.2. Définition. *Un système de psi–opérations sur un anneau commutatif unitaire A est une famille d'endomorphismes d'anneaux $\psi^k : A \to A$, $k \geq 1$, tels que :*

$$\psi^1 = id_A, \quad \psi^k \psi^r = \psi^{kr},$$

$$\psi^p x \equiv x^p \pmod{pA} \quad \text{pour tout premier } p.$$

Une autre structure importante est introduite par la définition suivante :

3.3. Définition. *Un système de lambda–opérations sur un anneau commutatif unitaire A est une famille d'endomorphismes de groupes additifs $\lambda^k : A \to A$, $k \geq 0$, tels que*

$$\lambda^0(x) = 1, \ \lambda^1 = id_A,$$

$$\lambda^n(x+y) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(x)\lambda^j(y).$$

Ces structures sont liées de la façon suivante :

3.4. Proposition.

(a) Si A n'a pas de torsion additive, alors n'importe quel système de psi–opérations définit un système unique de lambda–opérations satisfaisant les relations de compatibilité :

$$(-1)^{k+1} k \lambda^k(x) = \sum_{i+j=k,\, j \geq 1} (-1)^{j+1} \lambda^i(x) \psi^j(x).$$

(b) Généralement, n'importe quel système de lambda–opérations définit un unique système de psi–opérations satisfaisant les mêmes relations de compatibilité.

Brièvement, un tel anneau, avec les psi et les lambda est appelé *un lambda–anneau.*

3.5. Exemple : un anneau de Grothendieck.

Soit $R =$ un anneau commutatif unitaire.

Dénotons par $A = A_R$ le K_0–groupe de Grothendieck de la catégorie additive, constitué de paires (P, φ), où P est un R–module projectif de type fini, $\varphi : P \to P$ un endomorphisme. Dénotons par $[(P, \varphi)] \in A$ la classe des (P, φ).

La structure d'anneau sur A est induite par le produit tensoriel : $[(P, \varphi)][(Q, \psi)] := [(P \otimes Q, \varphi \otimes \psi]$.

Les lambda–opérations sur A sont définies par $\lambda^k [(P, \varphi)] := [(\Lambda^k P, \Lambda^n \varphi)]$.

3.6. Exemple : le grand anneau de Witt $W(R)$.

À nouveau, appelons $R =$ un anneau commutatif unitaire.

Définissons le groupe additif de $W(R)$ comme *le groupe multiplicatif* $1 + TR[[T]]$.

La multiplication $*$ dans $W(R)$ est définie sur les éléments $(1-at)$ par $(1-aT)*(1-bT) := 1-abT$, et alors étendue à la totalité de l'ensemble $W(R)$ par distributivité, par continuité dans la topologie (T)–adique, et par fonctorialité dans R.

De façon similaire, les lambda–opérations dans $W(R)$ sont définies par $\lambda^k (1-aT) := 0$ pour $k \geq 2$, et alors étendues par formules d'addition (Déf. 3.3) et par continuité.

4. Racines de l'unité comme constantes : Géométries sur des "corps de caractéristique 1"

4.1. Histoire initiale. Dans l'article [T57], J. Tits a remarqué que certains invariants numériques de base reliés à la géométrie des groupes classiques sur les corps finis $\mathbf{F}_q$ ont des valeurs bien définies pour $q = 1$, et ces valeurs admettent des interprétations combinatoires suggestives.

Par exemple, si $q = p^k$, p un nombre premier, $k \geq 1$, alors

$$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{F}_q) = \frac{(\mathbf{A}^n(\mathbf{F}_q) \setminus \{0\})}{\mathbf{G}_m(\mathbf{F}_q)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} =: [n]_q,$$

$$Gr\,(n, j)(\mathbf{F}_q) = \{\mathbf{P}^j(\mathbf{F}_q) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{F}_q)\} =: \binom{n}{j}_q,$$

et les valeurs pour $q = 1$ du côté droit sont les cardinaux des ensembles

$$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{F}_1) := \text{un ensemble fini } P \text{ de cardinal } n,$$

$$Gr\,(n, j)(\mathbf{F}_1) := \text{l'ensemble des sous-ensembles de } P \text{ de cardinal } j.$$

Tits a suggéré un programme : trouver le sens de la géométrie algébrique sur *"un corps de caractéristique un"* de telle façon que la "géométrie projective" ci-dessus devienne un cas particulier de la géométrie des groupes de Chevalley et de leurs espaces homogènes.

La première implémentation du programme de Tits a été réalisée seulement en 2008 par A. Connes et C. Consani, cf. [CC11], d'après le travail fondateur de C. Soulé [So04]. Pourtant, ils ont eu besoin de $\mathbf{F}_{1^2}$ comme corps de définition.

Plus tôt, dans un manuscrit non publié [KaS], M. Kapranov et A. Smirnov avaient introduit des corps $\mathbf{F}_{1^n}$ existant de leur propre chef.

Ils ont défini $\mathbf{F}_{1^n}$ comme le monoïde $\{0\} \cup \mu_n$, où μ_n est l'ensemble des racines de l'unité d'ordre n. De plus, ils ont défini un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_{1^n}$ comme ensemble pointé $(V, 0)$ avec une action de μ_n libre sur $V \setminus \{0\}$. Le groupe $\mathrm{GL}(V)$, par définition, est constitué des permutations de V compatibles avec l'action de μ_n. Kapranov et Smirnov ont défini l'application déterminant : $GL(V) \to \mu_n$ et ont démontré une belle formule pour le symbole résidu de puissance.

Notamment, si $q = p^k \equiv 1 \pmod n$ et μ_n est plongé dans $\mathbf{F}_q^*$, $\mathbf{F}_q$ devient un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_{1^n}$, et le symbole de résidu de puissances

$$\left(\frac{a}{\mathbf{F}_q}\right)_n := a^{\frac{q-1}{n}} \in \mu_n$$

est *le déterminant de la multiplication par* a dans la $\mathbf{F}_{1^n}$–géométrie.

Cf. également [Sm92], [Sm94].

Comme on l'a mentionné en sec. 2, les constantes par rapport à la dérivation de Buium δ_p dans $R := \mathbf{Z}_p^{un}$ sont les racines de l'unité (de degré premier à p) complétées par 0.

Par conséquent, dans le contexte de la géométrie différentielle "dans la direction p–adique", un projet indépendant de géométrie algébrique "sur les racines de l'unité", ou "en caractéristique 2", ou bien "sur les corps $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_{1^n}, \mathbf{F}_{1^\infty}$" acquiert une nouvelle motivation. De plus, il s'enrichit de nouvelles connaissances : alors qu'en première instance, les schémas en caractéristique 1 ont été construits en collant des "spectres de monoïdes commutatifs", maintenant, on peut les concevoir comme des $\mathbf{Z}$–schémas munis d'une lambda–structure considérée comme une donnée descendante : voir [Bor11a,b], [Bor09]. Voici un bref survol de la philosophie de Borger qui montre que ses schémas forment un habitat naturel également pour les géométries p–adiques différentielles.

4.2. Philosophie de Borger. La catégorie des $\mathbf{F}_1$–schémas affines Aff_1 peut être définie comme la catégorie opposée des anneaux munis de lambda–structures, (A, Λ_A), et des morphismes compatibles. Le foncteur d'oubli de la catégorie usuelle des schémas affines $\mathrm{Aff}_1 \to \mathrm{Aff}$: $(A, \Lambda) \mapsto A$ est interprété comme le foncteur de l'extension de base $* \mapsto * \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbf{Z}$.

Ainsi, une lambda–structure sur un anneau A est *une donnée de descente sur* $\mathrm{Spec}\, A$ vers $\mathbf{F}_1$.

En particulier, $W(\mathbf{Z})$ doit être considéré comme (une complétion de ?) $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbf{Z}$.

Plus généralement, en utilisant la théorie générale des topos, Borger globalise cette construction, en construisant une *géométrie algébrique de* λ*–schémas,* naturelle, à laquelle on devrait penser comme à une *géométrie algébrique sur* $\mathbf{F}_1$ montée (lifted).

Exactement comme la totalité de la géométrie algébrique habituelle est contenue dans le gros topos étale de $\mathbf{Z}$, la géométrie λ–algébrique est contenue dans un gros topos, auquel on devrait penser comme à un gros topos étale sur $\mathbf{F}_1$. Il y a une application de topoi du gros topos étale vers le gros topos sur $\mathbf{F}_1$.

Les schémas de type fini sur $\mathbf{F}_1$ (en ce sens, comme dans la plupart des autres approches) sont *des objets très rigides, combinatoires.* Ce sont principalement les quotients de variétés toriques par des relations d'équivalence toriques.

Les schémas de type non fini sur $\mathbf{F}_1$ sont plus intéressants. Le grosse cohomologie de de Rham–Witt de X "est" la cohomologie de de Rham de X "vue comme un $\mathbf{F}_1$–schéma". Elle devrait contenir l'information complète du motif de X et est probablement une théorie de cohomologie de Weil universelle concrète.

La restriction de Weil aux scalaires de $\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{F}_1$ existe et est une version arithmétiquement globale de l'espace p–jet de Buium.

En conclusion, mentionnons quelques défis restant.

4.3. Facteurs d'Euler à l'infini et $\mathbf{F}_1$–géométrie. Dans [Ma95], je suggérais qu'il devrait exister une catégorie de $\mathbf{F}_1$–motifs visibles à travers le point $q = 1$ de comptage des $\mathbf{F}_1$–schémas. Des prédictions à propos d'un tel point de comptage ont été justifiées dans la géométrie de Soulé, cf. [So04]. En particulier, les zétas des puissances non négatives du "motif de Lefschetz (dual de Tate)" $\mathbf{L}$ doivent être :

$$Z(\mathbf{L}^{\times n}, s) = \frac{s+n}{2\pi}.$$

Cela fournit un *pont conjectural entre la* $\mathbf{F}_1$*–géométrie* et la géométrie de $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ à l'infini archimédien, c'est-à-dire la *géométrie d'Arakelov* : un Γ–facteur de zetas classiques, par exemple,

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s) := [(2\pi)^{-s}\Gamma(s)]^{-1} = \prod_{n\geq 0} \frac{s+n}{2\pi}$$

(produit régulier) ressemble à $\mathbf{F}_1$–zeta de l'espace projectif dualisé de dimension infinie sur $\mathbf{F}_1$.

Pourtant, ce phénomène reste une observation isolée, et le premier archimédien reste encore "le premier parmi les égaux", brisant la symétrie de toutes les valuations.

4.4. D'autres géométries "sous $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$". En géométrie algébrique traditionnelle, le rôle spécial de $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ est relié au fait que c'est l'objet terminal de la catégorie des schémas. Puisqu'il est très loin d'être un "objet comme un point", il semble naturel d'imaginer que $\operatorname{Spec}\mathbf{F}_1$, étant "réellement comme un point", le remplacera. Pourtant, la croyance que dans une géométrie algébrique étendue, il y aurait nécessairement un objet terminal est infondée. Déjà dans la catégorie la plus simple des piles de Deligne–Mumford sur un corps k, en admettant des quotients par rapport à l'action triviale de n'importe quel groupe fini G, il n'y a pas d'objet terminal, parce qu'on a des morphismes non triviaux $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} k/G$.

Cela a amené plusieurs auteurs à contempler des géométries plus générales, s'étalant "sous $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$" mais non nécessairement à la base de l'abîme insondable : cf. le projet de Toën–Vaquié [TV05].

Par exemple, dans le cadre de Borger–Buium, on peut considérer les schémas pour lesquels les ascenseurs de Frobenius sont seulement donnés pour des sous-ensembles de l'ensemble des nombres premiers, éventuellement pour un seul premier p, comme dans les ascenseurs canoniques de Serre–Tate de variétés abéliennes en caractéristique p : cf. [Katz81].

Plus précisément, pour le cas le plus simple des courbes elliptiques, dénoté par M, la complétion p–adique de la pile modulaire des courbes elliptiques sans locus super-singulier. On peut définir l'ascenseur de Frobenius sur cette pile : il envoie une courbe elliptique vers son quotient par le sous-groupe canonique. Ce dernier est défini comme l'unique schéma fermé de sous-groupes dont le dual de Cartier est l'ascenseur étale vers $\mathbf{Z}_p$ du dual de Cartier du noyau de Frobenius sur la fibre p. Cet endomorphisme élève également vers un endomorphisme naturel de la courbe elliptique universelle. Ainsi, James Borger suggère de dire que M "fait descendre vers le F_1 p–typique", et on peut dire la même chose à propos de la courbe elliptique universelle sur lui. Les courbes elliptiques p–adiques avec ascenseur de Frobenius sont appelées ascenseurs canoniques.

Notons que si on remplace la direction p–adique par la direction fonctionnelle, on pourrait parler simplement de familles de courbes elliptiques avec invariants de constantes absolues. Mais les invariants absolus p–adiques des ascenseurs canoniques ne sont en aucun cas des "constantes" au sens naïf, dont il a été question dans la sec. 2, c'est-à-dire que ce ne sont pas des représentants de Teichmüller : cf. un article récent de Finotti, "Coordinates of the j–invariant of the canonical lifting", posté à l'adresse http://www.math.utk.edu/ finotti/, et [Er13].

Une meilleure compréhension de la divergence représenterait un défi intéressant pour la géométrie différentielle p–adique.

Remerciements. Ma collaboration avec A. Buium sur [BuMa13] m'a grandement aidé à concevoir le présent survol. J. Borger m'a généreusement expliqué quelques-unes de ses constructions et motivations. Igor Volovich a stimulé l'écriture finale en m'invitant à donner un exposé au Workshop international sur les méthodes p-adiques pour modéliser les systèmes complexes, à Bielefeld, du 15 au 19 avril 2013. Je leur suis reconnaissant à tous.

Références

[ACG13] A. Abdessalam, A. Chandra, G. Guadagni. *Rigorous quantum field theory functional integrals over the p–adics I: anomalous dimensions.* arXiv:1302.5971

[Be11] A. Beilinson. *p–adic periods and derived De Rham cohomology.* Journ. AMS, vol. 25, no. 3 (2012), 319–327. arXiv:1102.1294

[Bor09] J. Borger. *Lambda–rings and the field with one element.* arXiv:0906.3146

[BorBu09] J. Borger, A. Buium. *Differential forms on arithmetic jet spaces.* Selecta Math. (N.S.) 17 (2011), no. 2, 301–335. arXiv:0908.2512

[Bor11a] J. Borger. *The basic geometry of Witt vectors, I: The affine case.* Algebra Number Theory 5 (2011), no. 2, 231–285.

[Bor11b] J. Borger. *basic geometry of Witt vectors. II: Spaces.* Math. Ann. 351 (2011), no. 4, 877–933.

[Bu95] A. Buium. *Differential characters of Abelian varieties over p–adic fields.* Inv. Math., vol. 122 (1995), 309–340.

[Bu05] A. Buium. *Arithmetic Differential Equations.* AMS Math Surveys and Monographs, vol. 118, 2005.

[BuMa13] A. Buium, Y. Manin. *Arithmetic Differential Equations of Painlevé VI Type.* arXiv:1307.3841

[CC11] A. Connes, C. Consani. *On the notion of geometry over* $\mathbf{F}_1$. J. Algebraic Geom. 20 (2011), no. 3, 525–557.

[CCMa08] A. Connes, C. Consani, M. Marcolli. *Fun with* F_1. J. Number Theory 129 (2009), no. 6, 1532–1561. math.AG/0806.2401

[De04] A. Deitmar. *Schemes over* F_1. In: Number Fields and Function Fields – Two Parallel Worlds. Ed. by G. van der Geer, B. Moonen, R. Schoof. Progr. in Math, vol. 239, 2005. math.NT/0404185

[Er13] A. Erdogan. *A universal formula for the* j*–invariant of the canonical lifting.* arXiv:1211.1152

[GoMa04] A. Goncharov, Yu. Manin. *Multiple zeta–motives and moduli spaces* $\overline{M}_{0,n}$. Compos. Math. 140:1 (2004), 1–14. math.AG/0204102

[Fa88] G. Faltings. *p–adic Hodge theory.* J. Amer. Math. Soc., 1(1988), 255–288.

[KaS] M. Kapranov, A. Smirnov. *Cohomology determinants and reciprocity laws: number field case.* Manuscrit non publié, 15 pp.

[Katz81] Katz, N. *Serre–Tate local moduli.* Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), pp. 138–202, Lecture Notes in Math., 868, Springer, Berlin-New York, 1981.

[KoZa01] M. Kontsevich, D. Zagier. *Periods.* In: Mathematics unlimited—2001 and beyond, 771–808, Springer, Berlin, 2001.

[LeBr13] L. Le Bruyn. *Absolute geometry and the Habiro topology.* arXiv:1304.6532

[Ma89] Yu. Manin. *Reflections on arithmetical physics.* In: Conformal Invariance and string theory (Poiana Brasov, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1989, 293–303. Reimprimé dans "Mathematics as Metaphor", Essais choisis par Yu. I. Manin, AMS 2007, pp. 149–155.

[Ma95] Yu. Manin. *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa).* Astérisque 228:4 (1995), 121–163.

[Ma08] Yu. Manin. *Cyclotomy and analytic geometry over* $\mathbf{F}_1$. In: Quanta of Maths. Conference in honour of Alain Connes. Clay Math. Proceedings, vol. 11 (2010), 385–408. Preprint math.AG/0809.2716.

[Ma09] Yu. Manin. *Renormalization and computation I: motivation and background.* In: Proceedings OPERADS 2009, eds. J. Loday and B. Vallette, Séminaires et Congrès 26, Soc. Math. de France, 2012, pp. 181–223. Preprint math.QA/0904.4921

[MüWZa12] S. Müller–Stach, S. Weinzierl, R. Zayadeh. *Picard–Fuchs equations for Feynman integrals.* arXiv:1212.4389

[Sm92] A. L. Smirnov. *Hurwitz inequalities for number fields. (Russian).* Algebra i Analiz 4 (1992), no. 2, 186–209; traduction dans St. Petersburg Math. J. 4 (1993), no. 2, 357–375.

[Sm94] A. L. Smirnov. *Absolute determinants and Hilbert symbols.* Preprint MPI 94/72, Bonn, 1994.

[So04] C. Soulé. *Les variétés sur le corps à un élément.* Mosc. Math. J. 4:1 (2004), 217–244.

[Ti57] J. Tits. *Sur les analogues algébriques des groupes semi–simples complexes.* Colloque d'algèbre supérieure, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Établissement Ceuterick, Louvain, 1957, 261–289.

[TV05] B. Toën, M. Vaquié. *Au–dessous de* $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$*.* J. K-Theory 3 (2009), no. 3, 437–500. math.AG/0509684

[VlVoZe94] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov. *p–adic analysis and mathematical physics.* Series on Soviet and East European Math., 1. World Scientific, River Edge, NJ, 1994.

[W13] S. Weinzierl. *Periods and Hodge structures in perturbative quantum field theory.* arXiv:1302.0670 [hep–th]