Unitaires permutant deux projections orthogonales

Barry Simon[1,2]

Résumé : Soient P et Q deux projections orthogonales sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Wang, Du et Dou ont démontré qu'il existe un unitaire, U, avec $UPU^{-1} = Q, \quad UQU^{-1} = P$ si et seulement si $\dim(\ker P \cap \ker(1-Q)) = \dim(\ker Q \cap \ker(1-P))$ (les deux pouvant être infinis). On fournit une nouvelle preuve en utilisant la machinerie supersymétrique de Avron, Seiler et Simon.

Je suis ravi de cette opportunité d'offrir un bouquet d'anniversaire à Rajendra Bhatia que j'admire depuis longtemps. Il m'a dit un jour avoir appris l'analyse fonctionnelle de Reed–Simon. Il a plus que renvoyé l'ascenseur puisque j'ai tant appris de ses livres, et notamment que beaucoup de la théorie matricielle est vraiment de l'analyse. En particulier, mon intérêt pour le théorème de Loewner sur les fonctions sur les matrices monotones a été stimulé par sa présentation claire de la preuve de Krein–Millman de ce résultat. Lorsque j'écrivais ma propre monographie au sujet du théorème de Loewner, j'ai découvert à plusieurs reprises des domaines d'application et d'extension de ce résultat dans lesquels Bhatia était un acteur-clef et où invariablement, sa prose lucide m'aidait à absorber les développements.

Soient P and Q deux projections orthogonales sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. C'est un résultat de base dans la théorie des perturbations des valeurs propres que quand

$$\|P - Q\| < 1 \tag{1}$$

il existe un unitaire U tel que

$$UP = QU \tag{2}$$

On sait même qu'il existe des unitaires, U, tels que

$$UPU^{-1} = Q, \quad UQU^{-1} = P \tag{3}$$

La question la plus simple faisant intervenir (2) remonte à Sz-Nagy [14] et a été approfondie par Kato [10] qui a trouvé une formule plus propre pour U que celle de Sz-Nagy, notamment Kato a utilisé

$$U = [QP + (1-Q)(1-P)]\left[1 - (P-Q)^2\right]^{-1/2} \tag{4}$$

En utilisant la formule de Nagy, Wolf [16] l'avait étendue à des paires arbitraires de projections sur un espace de Banach (nécessitant seulement que U soit inversible plutôt qu'unitaire) tant que

$$\|P - Q\|\|P\|^2 < 1 \qquad \|P - Q\|\|Q\|^2 < 1 \tag{5}$$

Pour les projections non–orthogonales et les projections sur un espace de Banach, en général, $\|P\| \geq 1$ avec égalité dans le cas de l'espace de Hilbert seulement si P est orthogonale de telle façon que (5) est strictement plus forte que (1). Un avantage de la forme de Kato (4), est que dans le cas de l'espace de Banach où la racine carrée peut être définie par une série de puissances, seule (1) est nécessaire.

Pour les applications qu'ils avaient à l'esprit, il est critique non seulement que U existe mais que sur l'ensemble des paires qui vérifient (1), U soit analytique dans P et Q. Car

[1] Département de mathématiques et physique, Mathématiques 253-37, Institut californien de technologie, Pasadena, CA 91125.

[2] Recherche en partie financée par la subvention de la Fondation nationale scientifique américaine NSF DMS-1265592 et en partie par la subvention israëlienne BSF No. 2010348.

Traduction : Denise Vella-Chemla, mars 2023.

ils considéraient une famille analytique, $A(z)$, et λ_0 une valeur propre isolée de $A(0)$ de multiplicité algébrique finie. Alors on peut définir

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \lambda_0| = r} (\lambda - A(z))^{-1} d\lambda$$

pour des petites valeurs fixées de r et pour $|z|$ petit. Pour $|z|$ très petit, $\|P(z) - P(0)\| < 1$. Si $U(z)$ est donné par (4) avec $Q = P(z)$, alors $U(z)A(z)U(z)^{-1}$ laisse $\operatorname{ran} P(0)$ invariant et l'étude des valeurs propres de $A(z)$ à proximité de λ_0 se réduit au problème de dimension finie $U(z)A(z)U(z)^{-1} \restriction \operatorname{ran} P(0)$. Voir les livres de Kato [11], Baumgärtel [3] ou Simon [13] ï¿½ ce sujet.

Il y a une riche structure de paires de projections orthogonales lorsqu'il est possible que (1) échoue et qui utilise deux approches. L'une revient à Krein et al. [12], Diximier [6], Davis [5] et Halmos [7]. Soit

$$K_{P,Q} = \operatorname{ran} P \cap \ker Q \tag{6}$$

Les quatre espaces mutuellement orthogonaux $\mathcal{K}_{P,Q}$, $\mathcal{K}_{P,1-Q}$, $\mathcal{K}_{1-P,Q}$, $\mathcal{K}_{1-P,1-Q}$ sont invariants pour P et Q et leur complémentaire orthogonaux mutuels ont un type de structure matricielle 2×2. Böttcher-Spitkovsky [4] ont une vision compréhensible de cette approche. En les suivant, on appellera cette approche l'approche de Halmos puisque son article a une version très claire de cette approche.

Une seconde approche, introduite par Avron–Seiler–Simon [2], utilise les opérateurs

$$A = P - Q, \qquad B = 1 - P - Q \tag{7}$$

qui par simple calcul, vérifient

$$A^2 + B^2 = 1, \quad AB + BA = 0 \tag{8}$$

$$[P, A^2] = [Q, A^2] = [P, B^2] = [Q, B^2] = 0$$

Les dernières équations (au moins pour A) remontent aux années 1940 et ont été fournies par Dixmier, Kadison et Mackey. La définition de B et la première équation dans (8) ont été notées par Kato [10] qui a trouvé la seconde équation en 1971 mais ne l'a jamais publiée. Comme (8) fait intervenir un anti-commutateur s'évanouissant, on appelle l'usage des opérateurs dans (7) l'approche super-symétrique. Une conséquence de (8) est qu'elle implique que si $P - Q$ est de trace classe, donc sa trace est un entier - en effet, comme on le notera ci-après, c'est l'indice d'un certain opérateur de Fredholm.

Les deux approches sont reliées comme cela a été montré par Amerein–Sinha [1] (voir aussi Takesaki [15, pp 306-308] et Halpern [9]). Dans [17], Wang, Du et Dou ont démontré le joli théorème suivant

Théorème 1 : Soient P et Q deux projections orthogonales sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Alors il existe un unitaire vérifiant (3) si et seulement si

$$\dim(\mathcal{K}_{P,Q}) = \dim(\mathcal{K}_{1-P,1-Q}) \tag{9}$$

La littérature sur les paires de projections est si importante qu'il est possible que ceci ait été prouvé ailleurs. Leur démonstration utilise la représentation de Halmos. Notre but ici est de fournir une preuve super-symétrique qui nous semble plus simple et plus algébrique (bien que nous comprenions que la simplicité est dans l'œil de celui qui regarde). Notre preuve aura aussi une forme explicite simple pour U. Avant de nous tourner vers la démonstration, nous souhaitons noter les corollaires du théorème 1.

On remarque d'abord que puisque $\operatorname{ran} R = \ker(1-R)$ pour toute projection R et $P, Q \geq 0$, on a que

$$\mathcal{K}_{P,Q} = \{\varphi \mid A\varphi = \varphi\}, \quad \mathcal{K}_{1-P,1-Q} = \{\varphi \mid A\varphi = -\varphi\}$$

Ainsi (1) $\Rightarrow \dim \mathcal{K}_{P,Q} = \mathcal{K}_{1-P,1-Q} = 0$, donc le théorème 1 implique

Corollaire 2 : (1) $\Rightarrow$ l'existence de U vérifiant (3).

Le second corollaire concerne le cas où $P-Q$ est compact. Dans ce cas $K = QP \restriction \operatorname{ran} P$ comme application de $\operatorname{ran} P$ dans $\operatorname{ran} Q$ est de Fredholm et $\mathcal{K}_{P,Q} = \ker K$ alors que $\mathcal{K}_{1-P,1-Q} = \operatorname{ran} K^{\perp}$ donc (9) est équivalent à dire que l'indice de K est 0 donc on obtient le

Corollaire 3 : Si $P-Q$ est compact, alors il existe un U vérifiant (3) si et seulement si $\operatorname{Index} = 0$.

Avron et al [2] avaient essentiellement ces deux corollaires de nombreuses années avant [17] et le présent article fait la remarque qu'alors que [2] n'a pas considéré le cas général du théorème 1, il y a un petit ajout à leur argument qui prouve le résultat général.

Lemme 4 : Pour prouver le théorème 1, il suffit de le prouver dans le cas où $\mathcal{K}_{P,Q} = \mathcal{K}_{1-P,1-Q} = \{0\}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}_1 = \mathcal{K}_{P,Q} \oplus \mathcal{K}_{1-P,1-Q}$ et $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^{\perp}$. Notons que $\mathcal{K}_{P,Q}$ est orthogonal à $\mathcal{K}_{1-P,1-Q}$ puisque $\operatorname{ran} P$ est orthogonal à $\ker P$. P et Q laissent $\mathcal{H}_1$ invariant et donc $\mathcal{H}_2$.

S'il existe U vérifiant (3), alors U est une application unitaire de $\mathcal{K}_{P,Q}$ vers $\mathcal{K}_{1-P,1-Q}$ de telle façon que leurs dimensions sont égales et (9) est vérifiée. D'un autre côté, si (9) est vérifiée, il existe une application unitaire V sur $\mathcal{H}_1$ qui envoie $\mathcal{K}_{P,Q}$ sur $\mathcal{K}_{1-P,1-Q}$ et vice versa. Clairement $VP \restriction \mathcal{H}_1 V^{-1} = Q \restriction \mathcal{H}_1$ et $VQ \restriction \mathcal{H}_1 V^{-1} = P \restriction \mathcal{H}_1$ puisque $P \restriction \mathcal{K}_{P,Q} = \mathbf{1}, P \restriction \mathcal{K}_{1-P,1-Q} = 0, Q \restriction \mathcal{K}_{P,Q} = 0, Q \restriction \mathcal{K}_{1-P,1-Q} = \mathbf{1}$.

$P_2 = P \restriction \mathcal{H}_2, Q_2 = Q \restriction \mathcal{H}_2$ vérifie $\mathcal{K}_{P_2,Q_2} = \mathcal{K}_{1-P_2,1-Q_2} = \{0\}$. Ainsi les cas particuliers du théorème implique qu'il y a un unitaire $W : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ avec $WP_2W^{-1} = Q_2, WQ_2W^{-1} = P_2$. $U = V \oplus W$ est une solution de (3) $\square$

Preuve : [du théorème 1] Par le lemme, on peut supposer que A n'a pas de valeurs propres ± 1, de telle façon que $B^2 = 1 - A^2$ est tel que $\ker B^2 = 0$. Ainsi $\ker B = 0$. Il en découle que

$$s - \lim_{\epsilon \downarrow 0} B(|B| + \epsilon)^{-1} = \operatorname{sgn}(B) \equiv U \tag{10}$$

où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{11}$$

de telle façon que $\operatorname{sgn}(B)$ est unitaire puisque $\ker B = 0$.

Puisque

$$BA = -AB \tag{12}$$

on voit que

$$B^2A = AB^2 \tag{13}$$

donc par les propriétés de la racine carrée ([13, Thm. 2.4.4])

$$(|B| + \epsilon)A = A(|B| + \epsilon) \tag{14}$$

Ainsi (12) implique que

$$(|B| + \epsilon)^{-1}BA = -AB(|B| + \epsilon)^{-1} \tag{15}$$

Par (10), on voit que

$$UAU^{-1} = -A \tag{16}$$

Puisque U est une fonction de B

$$UB = BU \Rightarrow UBU^{-1} = B \tag{17}$$

On a que

$$P = \tfrac{1}{2}(A - B + \mathbf{1}), \qquad Q = \tfrac{1}{2}(-A - B + \mathbf{1}) \tag{18}$$

de telle façon que, par (16) et (17), on a (3). □

Remarque : Je dois aux examinateurs la remarque intéressante que dans le cas où (9) est vérifié, le U vérifiant (3) peut être pris de telle façon à vérifier également $U^2 = \mathbf{1}$ (ou de manière équivalente $U = U^*$) de telle façon que U est une symétrie au sens de Halmos-Kakutani [8]. L'opérateur $U = \mathrm{sgn}(B)$ que l'on construit quand A n'a pas de valeur propre ± 1 respecte clairement la contrainte $U^2 = \mathbf{1}$ et donc il suffit de construire un tel U dans le cas où $\mathcal{H} = \mathcal{K}_{P,Q} \oplus \mathcal{K}_{1-P,1-Q}$ et (9) est vérifiée. Pour faire cela, prendre un unitaire T de $\mathcal{K}_{P,Q}$ sur $\mathcal{K}_{1-P,1-Q}$ et choisir

$$U = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$$

Pour comprendre la différence entre (4) et (5), on note cela dans le cas $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ et P, Q sont des deux projections uni-dimensionnelles avec $\mathrm{Tr}(PQ) = \cos^2\theta$ (de telle façon que θ est l'angle entre $\mathrm{ran}\, P$ et $\mathrm{ran}\, Q$), le U de (5) est une rotation d'angle θ alors que le U de (4) est une réflexion dans le bisecteur perpendiculaire.

Une question intéressante est de savoir s'il y a des extensions du théorème 1 (avec U unitaire remplacé par U inversible) aux projections non auto-adjointes dans l'espace de Hilbert et aux paires générales de projections sur un espace de Banach.

Références

[1] W. Amrein, and K. Sinha, *On pairs of projections in a Hilbert space*, Linear Algebra Appl. **208/209** (1994), 425–435.

[2] J. Avron, R. Seiler, and B.Simon, *The index of a pair of projections*, J. Funct. Anal. **120** (1994), 220–237.

[3] H. Baumgärtel, *Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators*, Birkhauser, Boston, 1985.

[4] A. Böttcher, I. Spitkovsky, *A gentle guide to the basics of two projections theory*, Linear Algebra Appl. **432** (2010), 1412–1459.

[5] C. Davis, *Separation of two linear subspaces*, Acta Sci. Math. (Szeged) **16** (1958), 172–187.

[6] J. Dixmier, *Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert*, Revue Sci. **86** (1948), 387–399.

[7] P. Halmos, *Two subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 381–389.

[8] P. R. Halmos and S. Kakutani, *Products of symmetries*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 77–78.

[9] H. Halpern, MathSciNet review of [2] ; MR1262254 (1995).

[10] T. Kato, *Notes on projections and perturbation theory*, Technical Report No. **9**, Univ. Calif., Berkley, 1955.

[11] T. Kato, *Perturbation Theory for linear Operators*, 2nd edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **132**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[12] M. Krein, M. Krasnoselski, and D. Milman, *On the defect numbers of operators in Banach spaces and on some geometric questions*, Trudy Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR **11** (1948), 97–112.

[13] B. Simon, *A Comprehensive Course in Analysis, Part 4, Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2015.

[14] B. Sz.-Nagy, *Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert*, Commentarii Math.Helv. **19** (1947), 347–366.

[15] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[16] F. Wolf, *Analytic perturbation of operators in Banach spaces*, Math. Ann. **124** (1952), 317–333.

[17] Y. Wang, H. Du, and Y. Dou, *On the index of Fredholm pairs of idempotents*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **25** (2009), 679–686.