Mécanique quantique super-symétrique et hypothèse de Riemann

Pushpa Kalauni[a] et Kimball A. Milton[b]

Résumé : On construit un modèle en mécanique quantique super-symétrique dont les valeurs propres de l'énergie des hamiltoniens sont les produits de fonctions zeta de Riemann. On montre que les zéros triviaux et non triviaux de la fonction zeta de Riemann correspondent naturellement à l'état de base s'évanouissant dans ce modèle. Le modèle produit une forme naturelle de super-symétrie.

On commence avec une description générique simple de la super-symétrie en mécanique quantique super-symétrique à une dimension [1]-[3]. En mécanique quantique super-symétrique, les hamiltoniens partenaires super-symétriques sont donnés par $H_- = A^\dagger A$ et $H_+ = AA^\dagger$, où A et $A^\dagger$ sont les opérateurs de diminution et augmentation. On peut écrire l'hamiltonien H sous la forme d'une matrice 2×2 par

$$H = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Les opérateurs A et $A^\dagger$ agissent sur le $n^{\text{ième}}$ état ψ_n de la manière suivante (n est un entier) :

$$A\psi_n = c_n\psi_{n-1}, \quad A^\dagger\psi_n = c^*_{n+1}\psi_{n+1}. \tag{2}$$

L'hamiltonien partenaire super-symétrique H_- agit sur un état ψ_n selon

$$H_-\psi_n = A^\dagger A\psi_n = E_n\psi_n, \quad E_n = |c_n|^2. \tag{3}$$

Quand H_+ agit sur l'état partenaire $\widetilde{\psi}_n = A\psi_n$, il satisfait

$$H_+\widetilde{\psi}_n = E_n\widetilde{\psi}_n. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) montrent que ψ_n et $\widetilde{\psi}_n$ sont les états partenaires super-symétriques avec la même énergie $E_n > 0$, à partir du moment où $A\psi_n$ ne s'évanouit pas. Pourtant, l'état de base ψ_0 du système super-symétrique est unique et satisfait

$$A\psi_0 = 0,\ H_-\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 = 0,\ E_0 = 0. \tag{5}$$

Dans cette note, nous présentons un modèle d'un système quantique super-symétrique dans lequel les valeurs propres d'énergie sont données en fonction de la fonction zeta de Riemann, que nous rappelons maintenant. Nous montrerons que les zéros triviaux et non triviaux de la fonction zeta de Riemann correspondent à l'énergie s'évanouissant de l'état de base du système.

---

[a] Département de physique,
Institut indien des sciences et technologies de l'espace,
Thiruvananthapuram, Kerala, 695547, Inde
[b] Département de physique et d'astronomie Homer L. Dodge,
Université d'Oklahoma, Norman, Oklahoma 73019, USA
Référence : https://arxiv.org/pdf/2211.04382.pdf
Traduction : Denise Vella-Chemla, novembre 2022.

En 1859, Riemann ([4]) a posé une conjecture concernant les zéros non triviaux de la fonction zeta, connue sous le nom d'hypothèse de Riemann.

L'hypothèse de Riemann est directement associée à la compréhension de la distribution des nombres premiers, qui sont les blocs de construction de tous les nombres. La connection entre la fonction zeta et les nombres premiers avait été construite par Euler ([5],[6]).

La fonction zeta de Riemann peut être définie dans le plan complexe par l'intégrale de contour ([5]-[8])

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{t^{s-1}}{e^{-t}-1} dt, \tag{6}$$

où le contour d'intégration C enferme le t-axe négatif, tourne depuis $t = -\infty - 0\,i$ vers $t = -\infty + 0\,i$ en enfermant le point $t = 0$. Elle est analytique et tous points dans le plan complexe, excepté en un pôle simple en $s = 1$.

La fonction zeta de Riemann satisfait la formule de réflexion suivante :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \tag{7}$$

qui montre que la fonction zeta de Riemann s'évanouit quand s est un entier négatif pair. Ces zéros sont appelés les zéros triviaux de la fonction zeta de Riemann. Tous les autres zéros de la fonction zeta sont appelés zéros non triviaux.

L'hypothèse de Riemann stipule que tous les zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann sont sur la droite critique $\Re(s) = 1/2$, i.e.,

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\lambda_*\right) = 0, \tag{8}$$

où λ_* est réel. L'hypothèse de Riemann a d'intéressantes connexions avec différents domaines de la physique et des mathématiques, tels que la mécanique quantique, la théorie des probabilités, le chaos quantique, et la physique statistique quantique ([9],[10]). Par conséquent, comprendre l'hypothèse de Riemann d'un point de vue super-symétrique aurait des implications dans différents domaines de la science. A été vérifiée numériquement (voir [11]) l'hypothèse que si dix trillions de zéros non triviaux de la fonction zeta existent, ils satisfont tous l'hypothèse de Riemann. Jusqu'à aujourd'hui, des tentatives diverses ([10]) ont été faites de prouver l'hypothèse de Riemann, mais ce problème reste ouvert.

Pour étudier les zéros non triviaux de Riemann dans la bande critique, $0 < \Re(s) < 1$, on a proposé une nouvelle approche dans un modèle quantique super-symétrique ([12]), dans lequel les valeurs propres de l'énergie de l'hamiltonien sont reliées à la fonction zeta de Riemann $\zeta(s)$. De plus, on a montré que les zéros de Riemann sur la droite critique ($\Re(s) = 1/2$) apparaissent naturellement en demandant que soit vérifiée la condition d'évanouissement de l'énergie de l'état de base dans le modèle.

Maintenant se pose la question naturelle, peut-il être possible d'obtenir un modèle super-symétrique qui fournisse les zéros triviaux et non triviaux de la fonction zeta comme évanouissement de l'énergie de l'état de base ? Si un tel modèle existe, alors comment est défini l'espace de Hilbert ? Et quelles sont les conditions aux bornes, et comment peut-on démontrer l'orthogonalité et la complétude des fonctions propres ? Pour ces raisons, on définit un modèle super-symétrique sur un intervalle fini de la droite réelle, et on impose des conditions appropriées d'auto-adjonction aux frontières. On vérifie que les états sont complets et orthonormaux. Pour inclure les zéros triviaux de la fonction zeta dans le système super-symétrique, on introduit un paramètre réel μ et on définit un produit intérieur modifié. En utilisant le produit intérieur modifié, on montre que l'énergie de l'état de base de notre modèle super-symétrique s'évanouit pour les zéros triviaux ainsi que les zéros non triviaux de la fonction zeta. Pour $\mu = 0$ ce produit intérieur modifié se réduit au produit intérieur de Dirac standard, et l'énergie de l'état de base s'évanouit pour les zéros non triviaux discret de la fonction zeta sur la droite $\Re(s) = 1/2$.

On commence par définir les opérateurs Ω et $\Omega^\dagger$ en fonction de l'opérateur de mise à l'échelle $x\frac{d}{dx}$ par

$$\Omega = \frac{\Gamma\left(x\frac{d}{dx}+1\right)}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-x\frac{d}{dx}-1}}{e^{-t}-1} dt, \tag{9}$$

et son adjoint donné en fonction de la propriété

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -1 - x\frac{d}{dx}. \tag{10}$$

Le contour C est défini comme dans l'équation (6).

L'opérateur $\Omega^\dagger$ (sans un facteur multiplicatif $\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right)$) a déjà été introduit pour l'étude des fonctions zeta de Riemann selon une perspective différente ([13]). L'opérateur de mise à l'échelle $x\frac{d}{dx}$ et sa variante ont été utilisés comme des hamiltoniens ([14]-[16]) pour des études antérieures des zéros de Riemann. Dans l'équation (9), $\Gamma\left(x\frac{d}{dx}+1\right)$ est défini par

$$\Gamma\left(x\frac{d}{dx}+1\right) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x\frac{d}{dx}} dy. \tag{11}$$

Les opérateurs Ω et $\Omega^\dagger$ agissent sur le monôme x^{-s} par

$$\Omega x^{-s} = \zeta(s) x^{-s}, \quad \Omega^\dagger x^{-s} = \zeta(1-s) x^{-s}, \tag{12}$$

Ces opérateurs Ω et $\Omega^\dagger$ ont des valeurs propres fonctions de la fonction de Riemann et toutes les deux ont les mêmes fonctions propres. Donc, dans la mesure où ces fonctions propres sont complètes (ce que nous vérifierons ci-dessous),

$$\left[\Omega, \Omega^\dagger\right] = 0. \tag{13}$$

Puisque les opérateurs Ω et $\Omega^\dagger$ commutent, ils ne peuvent pas être les opérateurs d'échelle (diminution/augmentation) dans le modèle super-symétrique. Par conséquent, nous introduisons un paramètre réel $\omega \neq 0$ et définissons les opérateurs de diminution et d'augmentation du système super-symétrique par

$$A = x^{-i\omega}\Omega, \quad A^\dagger = \Omega^\dagger x^{i\omega}. \tag{14}$$

Maintenant, on définit une fonction d'onde (non normalisée) par

$$\phi^{\mu,\rho}(x) = x^{-\frac{1}{2}+\mu+i\rho}, \tag{15}$$

où μ et ρ sont des paramètres réels. Les opérateurs A et $A^\dagger$ agissent sur la fonction $\phi^{\mu,\rho}(x)$ selon

$$A\phi^{\mu,\rho}(x) = \zeta\left(\frac{1}{2} - \mu - i\rho\right)\phi^{\mu,\rho-\omega}(x), \tag{16a}$$

$$A^\dagger\phi^{\mu,\rho}(x) = \zeta\left(\frac{1}{2} + \mu + i(\rho+\omega)\right)\phi^{\mu,\rho+\omega}(x), \tag{16b}$$

où l'on a utilisé (12).

L'équation (16) implique que quand les opérateurs A et $A^\dagger$ agissent sur le $\phi^{\mu,\rho}(x)$, le paramètre ρ dans la fonction d'onde change d'un montant égal à $\mp\omega$, respectivement.

Maintenant, nous construisons les hamiltoniens partenaires super-symétriques, H_- et H_+ ainsi

$$H_- = A^\dagger A = \Omega^\dagger\Omega, \quad H_+ = AA^\dagger = x^{-i\omega}\Omega\Omega^\dagger x^{i\omega}. \tag{17}$$

On continue à discuter des états excités du système super-symétrique et on montre que les hamiltoniens partenaires super-symétriques H_- et H_+ agissent sur les états excités du système, les énergies propres dégénérées sont données en fonction des fonctions zeta.

Les $n^{\text{ièmes}}$ états partenaires du système super-symétrique $\phi_n^{\mu,\rho}(x)$ et $\widetilde{\phi}_n^{\mu,\rho}(x)$ peuvent être obtenus en utilisant l'équation (16)

$$\phi_n^{\mu,\rho}(x) = \frac{A^\dagger}{c^*_{n,-\mu}}\phi_{n-1}^{\mu,\rho}(x) = x^{-\frac{1}{2}+\mu+i(\rho+n\omega)}, \tag{18a}$$

$$\widetilde{\phi}_n^{\mu,\rho}(x) = A\phi_n^{\mu,\rho}(x) = c_{n,\mu}\phi_{n-1}^{\mu,\rho}(x), \tag{18b}$$

où

$$c_{n,\mu} = \zeta\left(\frac{1}{2} - \mu - i(\rho + n\omega)\right). \tag{19}$$

Alors, l'hamiltonien H_- agissant sur $\phi_n^{\mu,\rho}(x)$ donne

$$H_-\phi_n^{\mu,\rho}(x) = c_{n,\mu}c^*_{n,-\mu}\phi_n^{\mu,\rho}(x) = E_{n,\mu}\phi_n^{\mu,\rho}(x), \tag{20}$$

et H_+ a la même valeur propre agissant sur $\widetilde{\phi}_n^{\mu,\rho}$.

La valeur propre commune de $H_\pm$ est $E_{n,\mu} = c_{n,\mu}c^*_{n,-\mu}$, qui en général n'est pas réelle, parce que $c_{n,\mu}$ et $c^*_{n,-\mu}$ ne sont pas des complexes conjugués l'un de l'autre. On s'occupe maintenant du rôle de μ.

L'adjoint de Dirac d'un opérateur peut être défini dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec un produit intérieur tel que

$$\langle\psi|H\phi\rangle = \langle H^\dagger\psi|\phi\rangle, \tag{21}$$

où $|\phi\rangle$,$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Un hamiltonien est dit hermitien (ou auto-adjoint) si $H^\dagger = H$.

On définit un opérateur M qui change le signe de μ, qui est,

$$M\phi_n^{\mu,\rho}(x) = \phi_n^{-\mu,\rho}(x), \quad M^\dagger = M^{-1}. \tag{22}$$

Cela définit complètement M dans la mesure où ces états sont complets, ce que nous établissons ci-dessous.

L'opérateur M nous permet de définir le produit intérieur modifié de deux états comme

$$\langle\psi|\phi\rangle_M = \langle\psi|M|\phi\rangle = \langle\psi|M\phi\rangle = \langle M\psi|\phi\rangle. \tag{23}$$

En fonction du produit intérieur M, l'adjoint est donné par la transformation de similarité suivante

$$H^\ddagger = M^{-1}H^\dagger M; \tag{24}$$

Si cela était égal à H, ce serait ce qu'on appelle l'hamiltonien pseudo-hermitien ([17]-[21]).

En particulier, quand $M = 1$, un hamiltonien pseudo-hermitien coïncide avec un hamiltonien hermitien. Dans notre cas, pourtant, les hamiltoniens sont hermitiens au sens habituel.

On voit que le produit intérieur modifié défini dans l'équation (23) amène une nouvelle caractéristique très importante de l'espace de Hilbert. Notamment, quand $\mu \neq 0$, l'espace de Hilbert développe un produit intérieur modifié naturel différent du produit intérieur de Dirac. Quand $\mu = 0$, l'espace de Hilbert modifié coïncide avec l'espace de Hilbert sous le produit intérieur de Dirac.

Jusque là, nous n'avons pas spécifié le domaine de notre fonction d'onde. Il s'avère que nous devons définir l'espace de Hilbert sur un intervalle fini, que nous prendrons égal à $x \in [1, a]$, $a > 1$. C'est-à-dire que nous considérons l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(1, a)$, avec les conditions périodiques aux bornes

$$\phi_n^{\mu,\rho}(1) = a^{\frac{1}{2}-\mu}\phi_n^{\mu,\rho}(a). \tag{25}$$

Cela implique

$$1 = \exp[i(\rho + n\omega)\log a]. \tag{26}$$

Cette condition est satisfaite si

$$\rho \log a = 2\pi k, \quad \omega \log a = 2\pi l \tag{27}$$

où k et l sont des entiers. Le cas le plus simple est $l = k = 1$, ce qui signifie

$$\rho = \omega = \frac{2\pi}{\log a}. \tag{28}$$

On voit à partir des équations (9) et (17), que l'hamiltonien H_- peut être écrit en fonction de l'opérateur de mise à l'échelle $x\frac{d}{dx}$ ainsi

$$\begin{aligned} H_- \;&=\; -\frac{1}{4\pi^2}\Gamma\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\Gamma\left(-x\frac{d}{dx}\right) \\ &\quad\times \int_C \frac{t^{-x\frac{d}{dx}-1}(u)^{x\frac{d}{dx}}}{(e^{-t}-1)(e^{-u}-1)}dtdu. \end{aligned} \tag{29}$$

Il est facile de vérifier que la condition d'auto-adjonction de l'opérateur $x\frac{d}{dx}$ (10) dans l'espace de Hilbert $L^2(1,a)$ en utilisant la condition aux bornes (25) implique que H_- est auto-adjoint.

On définit l'espace de Hilbert dans le domaine $L^2(1,a)$ et on montre que $\phi_n^{\mu,\rho}(x)$ forme un ensemble orthonormal de fonctions ainsi

$$\begin{aligned}\langle n,\mu|n',\mu\rangle_M &= \langle n,\mu|n',-\mu\rangle = \int_1^a (\phi_n^{\mu,\rho})^* \phi_{n'}^{-\mu,\rho} dx \\ &= \int_1^a x^{-1+i(n-n')\omega} dx = \delta_{nn'} \log a, \end{aligned} \tag{30}$$

où $\phi_n^{\mu,\rho}(x) = \langle x|n,\mu\rangle$.

On voit qu'il y a un facteur supplémentaire $\log a$ multipliant la fonction delta de Kronecker.

On définit donc la fonction d'onde normalisée ainsi

$$\psi_n^{\mu,\rho}(x) = \frac{1}{\sqrt{\log a}} \phi_n^{\mu,\rho}(x) = \frac{1}{\sqrt{\log a}} x^{-\frac{1}{2}+\mu+i(\rho+n\omega)}. \tag{31}$$

Cela est vrai pour toutes les valeurs de k et l.

On peut établir les conditions de complétude en considérant

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mu,\rho}(x) M \left(\psi_n^{\mu,\rho}(y)\right)^* &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mu,\rho}(x) \left(\psi_n^{-\mu,\rho}(y)\right)^* \\ &= \frac{1}{\log a} \frac{1}{y} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}-\mu-i\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega(\log x - \log y)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Maintenant parce que $-\log a < \log x - \log y < \log a$, et en utilisant l'équation (28) pour ω, la formule de sommation de Poisson implique que nous pouvons écrire (32) ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mu,\rho}(x) \left(\psi_n^{-\mu,\rho}(y)\right)^* = \delta(x-y), \tag{33}$$

La relation de complétude n'est vérifiée que pour $l=1$, mais elle n'impose pas de restriction sur k. Les équations (30) et (33) montrent que selon le produit intérieur modifié, les fonctions $\psi_n^{\mu,\rho}(x)$ forment un ensemble de fonctions complet, orthonormal à partir du moment où $\omega \ln a = 2\pi$.

Selon le produit intérieur de Dirac, un hamiltonien hermitien est garanti d'avoir des valeurs propres réelles. Que se passe-t-il dans le cas du produit intérieur M ? Considérons d'abord l'élément matriciel de l'hamiltonien H_- selon le produit intérieur modifié comme suit :

$$\langle \psi_{n'}^{\mu,\rho} | H_- \psi_n^{\mu,\rho} \rangle_M = E_{n,\mu} \delta_{n,n'}, \tag{34}$$

et alors, l'élément correspondant de l'adjoint, donné dans l'équation (24) devenant :

$$\langle H_-^{\ddagger} \psi_{n'}^{\mu,\rho} | \psi_n^{\mu,\rho} \rangle_M = E_{n,-\mu}^* \delta_{n,n'}. \tag{35}$$

À partir des équations (34) et (35), on voit que

$$E_{n,\mu} = E^*_{n,-\mu}; \tag{36}$$

lorsque $\mu = 0$ toutes les énergies sont réelles, mais cela n'est pas vrai si $\mu \neq 0$. Dans le dernier cas, c'est seulement dans un cas particulier que l'énergie de l'état de base peut être réelle, comme nous allons le voir maintenant.

La possibilité la plus simple a lieu quand $\rho = \omega$, c'est-à-dire aussi bien quand $k = 1$ que quand $l = 1$. Alors, pour $\mu = 0$, l'hamiltonien agissant sur le $n^{\text{ième}}$ état du système donne

$$H_- \psi_n^{0,\omega}(x) = \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i(n+1)\omega\right)\right|^2 \psi_n^{0,\omega}(x), \tag{37}$$

Dans ce cas, le produit intérieur modifié (23) devient le produit intérieur de Dirac (21) et l'état de base du système super-symétrique s'évanouit à condition que l'on choisisse un ω qui corresponde à l'un des zéros non triviaux de la fonction zeta, $\omega = \lambda_*$, comme donné par l'équation (8).

D'un autre côté, pour $\mu \neq 0$ et $\rho = 0$, l'action de H_- sur le $n^{\text{ième}}$ état donne

$$H_- \psi_n^{\mu,0}(x) = \zeta\left(\frac{1}{2} - \mu - in\omega\right)\zeta\left(\frac{1}{2} + \mu + in\omega\right)\psi_n^{\mu,0}(x), \tag{38}$$

où la valeur propre est presque toujours complexe. Pourtant, pour l'état de base $n = 0$, la valeur propre est réelle, et peut être rendue nulle seulement si $\frac{1}{2} \pm \mu = -2k$, où $k \in N$. Ce cas donne une énergie de l'état de base qui s'évanouit pour le système, correspondant aux zéros triviaux de la fonction zeta de Riemann. Pourtant, les états excités ont tous des énergies complexes, et c'est donc un problème ouvert de trouver l'interprétation physique de cela.

Finalement, retournons aux conditions (27) pour les zéros non triviaux. Ci-dessus, on a supposé $k = l = 1$ comme étant la possibilité la plus simple. Pourtant, seule la condition $l = 1$ est requise pour la complétude ; les valeurs propres générales pour le scénario dans lequel $\mu = 0$ sont

$$E_n^{k,i} \;=\; \zeta\left(\frac{1}{2} - i\lambda_*^{(i)}\left(1 + \frac{n}{k}\right)\right) \times \zeta\left(\frac{1}{2} + i\lambda_*^{(i)}\left(1 + \frac{n}{k}\right)\right),$$

où i dénote la $i^{\text{ième}}$ valeur positive de λ_*. En général, ces valeurs propres sont toutes réelles et positives, excepté pour les valeurs propres nulles en $n = 0$. Mais $2k$ est un entier pair, de telle sorte que toutes les valeurs propres sont doublées, incluant celle pour l'état $n = 0$, qui a un état partenaire d'énergie nulle pour $n = -2k$. Même H_- exhibe une sorte de "super-symétrie naturelle". Il y a une exception à cela : il y a un nombre impair d'états entre ces deux états à zéro énergie et donc, il y a un état isolé à $n = -k$ d'énergie positive $\zeta(1/2)^2$, qui est le seul état non dégénéré. Le spectre est extrêmement oscillant, apparemment chaotique, avec de petites valeurs propres apparaissant à chaque fois que l'entier n s'avère être en coïncidence approximative avec un autre zéro non trivial, ce qui ne peut jamais avoir lieu exactement.

On illustre ces remarques sur la figure 1.

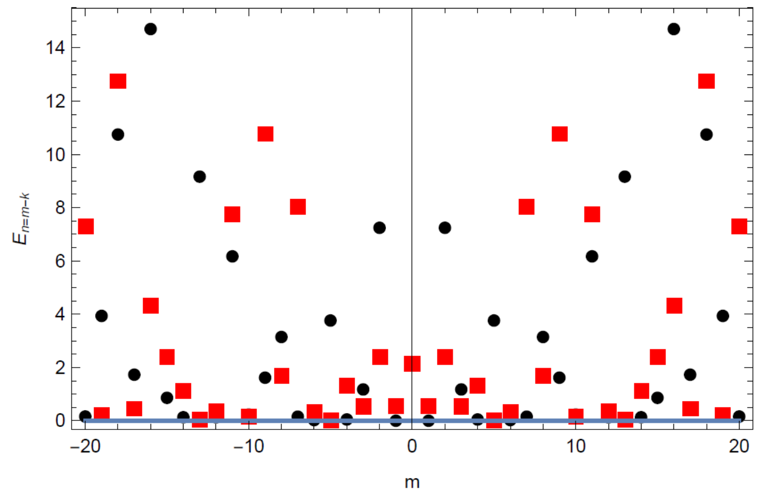

FIGURE 1 : Les 40 premiers niveaux d'énergie propres $E^{k,i}_{n=m-k}$ du modèle donné dans l'équation (39) pour deux cas :

(1) $i = 1$, $k = l = 1$, dénoté par des points noirs. Les états d'énergie nulle adviennent seulement en $n = 0$ et $n = -2$, et les autres énergies semblant s'évanouir sont effectivement positives. Notons que le spectre est symétrique autour de $n = -1$, qui est le seul état non dégénéré.

(2) $i = 3$, $k = 5$, $l = 1$ dénoté par des carrés rouges. La symétrie du spectre est maintenant environ autour de $n = -5$. Les seuls états d'énergie nulle sont pour $n = 0$ et $n = -10$.

Ainsi il apparaît en cela, dans toutes les situations réalistes, en quelque sorte, que la super-symétrie émerge sans la nécessité d'un hamiltonien partenaire.

En résumé, on a défini un modèle de mécanique quantique super-symétrique dont l'énergie de l'état de base s'évanouissant est consistante avec le fait que la fonction zeta de Riemann $\zeta(s)$ ait ses zéros le long de la droite $\Re(s) = 1/2$, et également quand s est un entier pair négatif. Ces deux cas correspondent à l'existence de zéros triviaux et non triviaux de la fonction zeta de Riemann, respectivement. Le premier cas est assez intéressant, puisque le spectre réel de l'hamiltonien H_- est super-symétrique, dans le sens où tous les états, incluant l'état de base $n = 0$, sont doublement dégénérés, sauf l'exception de l'état en $n = -k$, sans nécessité d'un hamiltonien partenaire. Bien que le spectre correspondant aux zéros non triviaux soit entièrement réel, il exhibe un comportement oscillatoire chaotique. D'un autre côté, l'état de base zéro trivial a seulement des états complexes excités, de telle façon que la signification physique est obscure.

Nos investigations ici prolongent notre tentative de comprendre la connexion entre la condition que l'énergie de l'état de base du modèle super-symétrique s'évanouisse, et la localisation des zéros de la fonction zeta de Riemann. Alors que les observations dans cette note ne constituent en aucun cas une preuve de l'hypothèse de Riemann, ils lui prêtent une plus grande crédibilité. Tout zéro non trivial ne se trouvant pas sur la droite critique ne pourrait pas correspondre à un état complet des états propres d'énergie réelle dans notre modèle. Notre approche présente quelque ressemblance superficielle avec la conjecture d'Hilbert-Pólya [22], en ayant la vertu que notre hamiltonien est explicite, défini dans un espace de Hilbert.

Remerciements : PK voudrait remercier le Professeur Ashok Das, qui a été un merveilleux tuteur et un grand collaborateur ; il le remercie grandement pour ses suggestions et retours sur le manuscrit.

PK voudrait également remercier le Docteur Ashok Kumar Diktiya et le Professeur S. Murugesh pour leurs nombreux commentaires éclairants sur le manuscrit. PK remercie les subventions de la DST, Gouvt. d'Inde sous la référence Femme scientifique A, Ref. No. DST/WOS-A/PM-64/2019. Le travail de KAM est en partie financé par une subvention de la Fondation Nationale pour la Science des États-Unis, numéro 2008417.

Références

[1] E. Witten, Constraints on supersymmetry breaking, Nucl. Phys. **B202**, 253 (1982).

[2] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics,* World Scientific, Singapore, (2001).

[3] A. Das, *Field Theory: A Path Integral Approach,* (second edition), World Scientific, Singapore (2006).

[4] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. Königl. Akad. Wiss. Berlin, 671–680, Nov. (1859).

[5] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function,* Academic Press, New York, (1974).

[6] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function,* 2nd ed., edited by D.R. HeathBrown, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[7] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables,* Dover Publications (1972).

[8] J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant,* Princeton, NJ: Princeton University Press, (2003), page 193.

[9] D. Schumayer, D. A. W. Hutchinson, Physics of the Riemann hypothesis, Rev. Mod. Phys. **83**, 307 (2011).

[10] M. Wolf, Will a physicist prove the Riemann hypothesis, Rep. Prog. Phys. **83**, 836001 (2020).

[11] A. M. Odlyzko, The 10^{22}-nd zero of the Riemann zeta function, Contemp. Math. **290**, 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001).

[12] A. Das, P. Kalauni, Supersymmetry and the Riemann zeros on the critical line, Phys. Lett. B **791**, 265 (2019).

[13] C. M. Bender, D. C. Brody, Operator-valued zeta functions and Fourier analysis, J. Phys. A: Math. Theor. **52**, 345201 (2019).

[14] M. V. Berry, J. P. Keating, $H = xp$ and the Riemann zeros, in *Supersymmetry and Trace Formula: Chaos and Disorder*, Ed. Lerner and al, Kluwer Academics/Plenum Publisher, New York (1999).

[15] C. M. Bender, D. C. Brody, M. P. Müller, Hamiltonian for the zeros of the Riemann zeta function, Phys. Rev. Lett. **118**, 130201 (2017).

[16] C. M. Bender, D. C. Brody, Asymptotic analysis of a pseudo-Hermitian Riemann-zeta Hamiltonian, J. Phys. A **51**, 135203 (2018).

[17] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002).

[18] D. Bazeia, A. Das, L. Greenwood, L. Losano, The structure of supersymmetry in PT symmetric quantum mechanics. Phys. Lett. B **673**, 283 (2009).

[19] A. Das, L. Greenwood, An alternative construction of the positive inner product in non-Hermitian quantum mechanics, Phys. Lett. B **678**, 504 (2009).

[20] A. Das, L. Greenwood, An alternative construction of the positive inner product for pseudo-Hermitian Hamiltonians: Examples, J. Math. Phys. **51**, 042103 (2010).

[21] A. Das, P. Kalauni, Operator description for thermal quantum field theories on an arbitrary path in the real time formalism, Phys. Rev. D **93**, 125029 (2016).

[22] Hugh L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, Analytic number theory, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV, Providence, R.I.: American Mathematical Society, pp. 181–193 (1973).