# Autour du théorème de Wilson

Alain Connes

**Résumé** : On étudie la série $s(n,x)$ qui est la somme pour $k$ de 1 à $n$ des carrés des sinus du produit $x\Gamma(k)/k$, où $x$ est une variable. Par le théorème de Wilson, on montre que la partie entière de $s(n,x)$ pour $x=\pi/2$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $n$ et on obtient une formule similaire pour $x$ un multiple rationnel de $\pi$. On montre que pour presque tout $x$ au sens de la mesure de Lebesgue, $s(n,x)$ est équivalent à $n/2$ quand $n$ tend vers l'infini, alors que pour presque tout $x$ au sens de la mesure de Baire, $1/2$ est un point limite du ratio de $s(n,x)$ sur le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $n$.

## 1 Introduction

Soit $\Pi(n)$ le nombre de nombres premiers $p \leq n$. Une légère amélioration d'une formule[1] de Willans [4] donne une formule simple pour $\Pi(n)$ comme partie entière de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{\pi\Gamma(k)}{2k}\right) \tag{1}$$

Quand on essaie de calculer naïvement le côté droit, on trouve que le calcul nécessite une précision croissante de la valeur numérique de $\pi$ dont les 2500 premières décimales sont nécessaires pour calculer $\Pi(n)$ pour $n$ de l'ordre du millier. F. Villegas a suggéré de remplacer $\pi$ par une variable et d'analyser la dépendance à $x$ dans la série ci-dessus. Ainsi pour $n>1$ un entier et $x \in \mathbb{R}$, soit

$$s(n,x) := \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right) \tag{2}$$

Nous montrerons ci-dessous que la dépendance à $x \in \mathbb{R}$ est assez intéressante dans la mesure où, à cause de la nature lacunaire de la séquence $\dfrac{\Gamma(k)}{k}$, les termes de la somme (1) sont principalement des variables aléatoires indépendantes quand on les considère plus adéquatement comme des fonctions d'une compactification presque périodique $G$ de $\mathbb{R}$. Cela donne, par la preuve de la loi forte des grands nombres, que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ au sens de la mesure de Lebesgue, on a quand

Traduction de l'article https://arxiv.org/pdf/1809.02832.pdf, Denise Vella-Chemla, août 2023.

[1] Figure 1 : La formule de Willans.

Then $\quad H(x) = \dfrac{\sin^2 \pi \dfrac{\{(x-1)!\}^2}{x}}{\sin^2 \dfrac{\pi}{x}} \begin{cases} =1 \text{ for } x \text{ prime,} \\ =0 \text{ for } x \text{ composite.} \end{cases}$

It follows that

$$\pi(m) = \sum_{x=2}^{m} H(x) \quad \text{for } m = 2, 3, \ldots$$

$n \to \infty$ que $s(n,x) \sim \frac{n}{2}$. Le fait intéressant est que pour l'autre notion naturelle de nombre réel "générique", notamment celle fournie par la théorie de Baire des intersections dénombrables denses des ensembles ouverts, c'est un comportement totalement différent de la série $s(n,x)$ qui est générique : on montre dans le théorème 4.1 que pour un $x \in \mathbb{R}$ générique, on obtient que les quotients $\frac{s(n,x)}{\Pi(n)}$ deviennent arbitrairement proches de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ est un point limite de la série

$$\frac{1}{2} \in \lim_{n\to\infty} \frac{s(n,x)}{\Pi(n)}.$$

De façon générique, cette série aura aussi l'$\infty$ comme point limite et elle oscillera sauvagement. Mais pour les multiples rationnels de $\pi$, la série $s(n,x)$ se comporte comme le produit de $\Pi(n)$ par le nombre rationnel[2] $\frac{1}{2} - \frac{\mu(b)}{2\phi(b)}$ qui ne dépend que du dénominateur $b > 1$ de la fraction irréductible $x = \frac{a}{b}\pi$ comme multiple de $\pi$ (voir la proposition 3).

# 2 $\Pi(n)$ et somme de carrés de sinus

On commence avec la variante suivante des formules de Willans [4].

**Proposition 2.1.** *Soit $n > 1$ un entier, alors $\Pi(n)$ est la partie entière de $s\left(n, \frac{\pi}{2}\right)$.*

*Preuve.* Pour $k > 4$ composé le quotient $(k-1)!/k$ est un entier pair. Alors dans ce cas, on a

$$\sin^2\left(\frac{\pi\Gamma(k)}{2k}\right) = 0.$$

Pour $k = p > 2$ premier, le reste de $(p-1)!$ modulo $2p$ est $p-1$ par le théorème de Wilson et la parité de $p-1$. Donc pour $p > 2$ premier,

$$\sin^2\left(\frac{\pi\Gamma(p)}{2p}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi(p-1)}{2p}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2p}\right).$$

On a

$$1 \geq \cos^2(x) \geq 1 - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il découle de cela que $\delta(n) = s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi(n)$ est une fonction décroissante de $n > 4$ et que pour $m > n$,

$$\delta(n) - \delta(m) = \sum_{p \text{ premier}, n<p\leq m} \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2p}\right)\right) \leq \frac{\pi^2}{4} \sum_{n<p\leq m} \frac{1}{p^2}$$

La série $\sum \frac{1}{p^2}$ est convergente et on a la limite $\frac{\pi^2}{4}\sum_{p>50}\frac{1}{p^2} < 0.0498448$ pour la somme (plus grande) sur les entiers, alors que $s\left(50, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi(50) \sim 0.539005$. Il en découle que

$$s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) \in [\Pi(n) + 0.5 - 0.05), \Pi(n) + 0.6] \subset [\Pi(n), \Pi(n) + 1)$$

[2] $\mu$ est la fonction de Möbius et $\phi$ la fonction indicatrice d'Euler.

pour tout $n > 50$, et (voir figure 2) $s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) \in [\Pi(n), \Pi(n)+1)$ pour tout $n > 1$ qui donne le résultat requis. $\square$

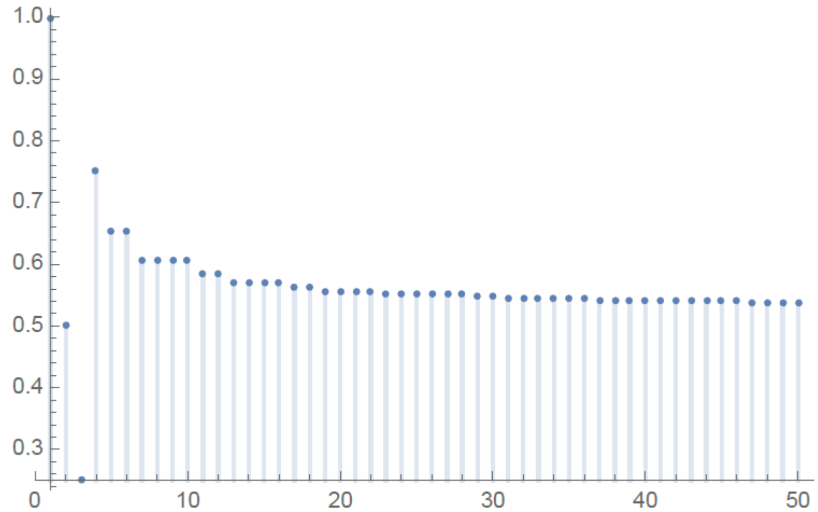


FIGURE 2 : *Graphe de* $s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi(n)$ *pour* $1 < n \leq 50$.

Le terme général $\sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right)$ de (2) dépend de la connaissance de $x$ à un $\epsilon$ près de l'ordre de

$$dx \simeq \left(\frac{k}{e}\right)^{-k+2}$$

Ainsi par exemple, pour obtenir la précision requise autour de $k = 945$ on a besoin des 2400 premières décimales de $\pi$.

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481
117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 249 141 273 724 587 006
606 315 588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820 466 521 384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462 379 962 749
567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 833 673 362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190 702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 818 467 669 405 132 000 568 127 145 263 560 827
785 771 342 757 789 609 173 637 178 721 468 440 901 224 953 430 146 549 585 371 050 792 279 689 258 923 542 019 956 112 129 021 960 864 034 418 159 813 629 774 771 309 960 518 707 211 349 999 998 372 978 049
951 059 731 732 816 096 318 595 024 459 455 346 908 302 642 522 308 253 344 685 035 261 931 188 171 010 003 137 838 752 886 587 533 208 381 420 617 177 669 147 303 598 253 490 428 755 468 731 159 562 863 882
353 787 593 751 957 781 857 780 532 171 226 806 613 001 927 876 611 195 909 216 420 198 938 095 257 201 065 485 863 278 865 936 153 381 827 968 230 301 952 035 301 852 968 995 773 622 599 413 891 249 721 775
283 479 131 515 574 857 242 454 150 695 950 829 533 116 861 727 855 889 075 098 381 754 637 464 939 319 255 060 400 927 701 671 139 009 848 824 012 858 361 603 563 707 660 104 710 181 942 955 596 198 946 767
837 449 448 255 379 774 726 847 104 047 534 646 208 046 684 259 069 491 293 313 677 028 989 152 104 752 162 056 966 024 058 038 150 193 511 253 382 430 035 587 640 247 496 473 263 914 199 272 604 269 922 796
782 354 781 636 009 341 721 641 219 924 586 315 030 286 182 974 555 706 749 838 505 494 588 586 926 995 690 927 210 797 509 302 955 321 165 344 987 202 755 960 236 480 665 499 119 881 834 797 753 566 369 807
426 542 527 862 551 818 417 574 672 890 977 772 793 800 081 647 060 016 145 249 192 173 217 214 772 350 141 441 973 568 548 161 361 157 352 552 133 475 741 849 468 438 523 323 907 394 143 334 547 762 416 862
518 983 569 485 562 099 219 222 184 272 550 254 256 887 671 790 494 601 653 466 804 988 627 232 791 786 085 784 383 827 967 976 681 454 100 953 883 786 360 950 680 064 225 125 205 117 392 984 896 084 128 488
626 945 604 241 965 285 022 210 661 186 306 744 278 622 039 194 945 047 123 713 786 960 956 364 371 917 287 467 764 657 573 962 413 890 865 832 645 995 813 390 478 027 590 099 465 764 078 951 269 468 398 352
595 709 825 822 620 522 489 407 726 719 478 268 482 601 476 990 902 640 136 394 437 455 305 068 203 496 252 451 749 399 651 431 429 809 190 659 250 937 221 696 461 515 709 858 387 410 597 885 959 772 975 498
930 161 753 928 468 138 268 683 868 942 774 155 991 855 925 245 953 959 431 049 972 524 680 845 987 273 644 695 848 653 836 736 222 626 099 124 608 051 243 884 390 451 244 136 549 762 780 797 715 691 435 997
700 129 616 089 441 694 868 555 848 406 353 422 072 225 828 488 648 158 456 028 50

FIGURE 3 : 2400 *décimales de* $\pi$.

## 3 Multiples rationnels de $\pi$

On investigue le comportement de la série $s(n,x)$ quand $x$ est un multiple rationnel de $\pi$. On note $x := \frac{a\pi}{b}$ où $a$ et $b$ sont premiers entre eux. Pour $k$ suffisamment grand, le terme $\Gamma(k)/k$ est divisible par $b$ au sens où la valuation $p$-adique de $\Gamma(k)/k$ est plus grande que celle de $b$ pour tous les diviseurs premiers de $b$. On peut voir cela en utilisant la formule de Legendre pour la valuation $p$-adique qui donne

$$v_p(\Gamma(k)/k) \geq \sum_{\ell \geq 1} \left\lfloor (k-1)/p^\ell \right\rfloor - \left\lfloor \log_p(k) \right\rfloor$$

Puisque les facteurs premiers de $b$ sont fixés, il existe $k_0 < \infty$ tel que $\Gamma(k)/k$ est divisible par $b$ (au sens ci-dessus) pour tout $k > k_0$. Ainsi, si $k > k_0$ n'est pas premier, le produit $\frac{x\Gamma(k)}{k}$ est un multiple entier de $\pi$ et $\sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right) = 0$. Quand $k > k_0$ est un nombre premier, l'entier $c = \frac{\Gamma(k)}{b}$ est tel que $bc = -1$ modulo $k$ par le théorème de Wilson. On obtient dans ce cas

$$\sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi a\Gamma(k)}{bk}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi ac}{k}\right)$$

et le côté droit dépend seulement du reste de $a$ et de $c$ modulo $k$. Puisque $b$ et $k$ sont premiers entre eux, il existe $u \in \{1, \ldots b-1\}$ qui est l'inverse de $k$ modulo $b$. Ainsi appelons $m \in \mathbb{N}$ tel que $ku - 1 = bm$. On a alors $bm = -1$ modulo $k$ et il en découle que $m = c$ modulo $k$. Cela donne

$$\sin^2\left(\frac{\pi ac}{k}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi am}{k}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi a(ku-1)}{bk}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi au}{b}\right) + \sin\left(\frac{a\pi}{bk}\right)\sin\left(\frac{a\pi}{bk} - \frac{2au\pi}{b}\right)$$

Par conséquent, puisque

$$\left|\sin\left(\frac{a\pi}{bk}\right)\sin\left(\frac{a\pi}{bk} - \frac{2au\pi}{b}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{a\pi}{bk}\right)\right| = 0(1/k)$$

le comportement asymptotique de $s(n,x)$ ne dépend que des restes des nombres premiers modulo $b$, à un terme de l'ordre de $\log\log n$ dû à $\sum 1/k$ sur les nombres premiers inférieurs à $n$. Ainsi, par le théorème de Dirichlet, dans la forme forte due à La Vallée Poussin (voir [2], V §7), on obtient la

**Proposition 2.** *Soit $x$ un multiple rationnel de $\pi$, $x = \frac{\pi a}{b}$ avec $a, b$ premiers entre eux, $b > 1$, alors*

$$s(n,x) \sim \frac{\Pi(n)}{\phi(b)} \sum_{v \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} \sin^2\left(\frac{\pi v}{b}\right) = \Pi(n)\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu(b)}{2\phi(b)}\right) \tag{3}$$

*Preuve.* Il reste à montrer la seconde égalité dans (3). Cela découle de $\sin^2(v) = \frac{1-\cos(2v)}{2}$ et du fait que la somme des racines primitives de l'unité d'ordre $b$ est la fonction de Möbius $\mu(b)$. □

# 4 Comportement générique de $s(n,x)$

Cela suggère d'investiguer le comportement général de la série (2). Il est donné par le résultat suivant qui montre que presque partout en théorie de la mesure (pour la mesure de Lebesgue) le comportement est gaussien et $s(n,x) \simeq \frac{n}{2}$. Mais généralement au niveau topologique ce qui signifie sur une intersection dénombrable dense d'ensembles ouverts, la somme grossit beaucoup plus lentement et se comporte comme $\frac{\Pi(n)}{2}$ au sens faible où $\frac{1}{2}$ est un point limite de la série $\frac{s(n,x)}{\Pi(n)}$.

En fait, il oscille sauvagement puisque $\infty$ est également un point limite de cette série. Notons que les deux comportements sont exclusifs l'un de l'autre mais ceci n'est pas contradictoire.

**Théorème 4.1.** $(i)$ *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la série $s(n,x)$ de* (2) *a le comportement gaussien*

$$s(n,x) \simeq \frac{n}{2}$$

$(ii)$ *pour tout $x \in \mathbb{R}$ générique (sur une intersection dénombrable dense d'ensembles ouverts) on a*

$$\frac{1}{2} \in \lim_{n\to\infty} \frac{s(n,x)}{\Pi(n)}$$

*Preuve.* $(i)$ Soit $G$ la limite projective des groupes compacts $G_n := \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ selon les morphismes naturels

$$\gamma_{n,m} : G_m \to G_n, \qquad \gamma_{n,m}(x + m\mathbb{Z}) = x + n\mathbb{Z}, \qquad \forall n|m. \tag{4}$$

On a un isomorphisme naturel, avec $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ les adèles du corps global $\mathbb{Q}$,

$$G = \lim_{\longleftarrow}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} = (\widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/(\mathbb{Q},+).$$

Le dual de Pontrjagin de $G$ s'identifie au groupe additif discret $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels en associant à $r \in \mathbb{Q}$ le caractère $\alpha_r$ de $G$ spécifié par sa restriction au sous-groupe dense $\mathbb{R}$, domaine de l'homomorphisme $\mathbb{R} \ni t \mapsto a(t) = (0,t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/(\mathbb{Q},+)$ des adèles avec composant 0 non-archimédien

$$\alpha_r(a(t)) := e^{2\pi i r t}.$$

Ensuite, en utilisant $1 - \cos(2x) = 2\,\sin^2(x)$ on obtient avec $r = \dfrac{\Gamma(k)}{k} \in \mathbb{Q}$ l'égalité

$$\sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha_r\left(\frac{x}{\pi}\right) - \frac{1}{4}\alpha_{-r}\left(\frac{x}{\pi}\right). \tag{5}$$

Par conséquent, avec la fonction de base définie sur $G$ par

$$X(x) := -\frac{1}{4}\alpha_1(x) - \frac{1}{4}\alpha_{-1}(x),$$

on obtient que le terme général de la somme $s(n,x)$ est simplement $\dfrac{1}{2} + X_k\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$ où

$$X_k(x) := X(r(k)x), \quad r(k) := \frac{\Gamma(k)}{k} \in \mathbb{Q}^\times$$

La multiplication par les éléments de $\mathbb{Q}^\times$ définit les automorphismes de $G$. On a la relation d'orthogonalité des caractères qui implique, puisque les rationnels $\dfrac{\Gamma(k)}{k}$ sont distincts, ils forment (pour $k > 1$) une suite strictement croissante (dont les premiers éléments sont $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{24}{5}\right\}$) que les variables aléatoires $X_k$ sur l'espace de probabilité $G$ équipé avec sa mesure de Haar normalisée, sont équidistribués et essentiellement indépendants, dans la mesure où,

$$\int_G X_k(x)X_\ell(x)dx = 0 \;\; \forall k \neq \ell$$

et où l'on contrôle le 4-ième moment comme suit

$$\int_G \Big| \sum_1^n X_k(x) \Big|^4 dx \leq Cn^2 \tag{6}$$

puisque $|\sum_1^n X_k(x)|^4 = \sum_{1 \leq k_j \leq n} X_{k_1}(x) X_{k_2}(x) X_{k_3}(x) X_{k_4}(x)$ et le nombre de solutions de l'équation

$$\pm r(k_1) \pm r(k_2) \pm r(k_3) \pm r(k_4) = 0, \quad k_j \in \{1, \dots, n\} \tag{7}$$

est de l'ordre de $n^2$ du fait de la nature lacunaire de ([3]) de la suite $r(k)$. En effet, pour $k > 4$ on a $r(k+1) > 3r(k)$ et (7) est possible seulement si le plus grand des $k_j$ apparaît au moins deux fois (et avec des signes opposés) et les $k_j$ restant sont égaux, ce qui donne $n^2$ comme limite du nombre de solutions.
Donc on a, pour tout $\epsilon > 0$ que

$$\int_G \Big| \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \Big|^4 \leq C/n^2, \quad \Big| \{x \in G \mid \Big| \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \Big| > \epsilon\} \Big| \leq C/n^2 \epsilon^{-4}$$

et le lemme de Borel-Cantelli s'applique et montre que le sous-ensemble $E \subset G$ défini par

$$E := \{x \in G \mid \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \to 0\}$$

est de mesure 1. Puisque $\mathbb{R} \subset G$ est de mesure 0 on ne peut encore obtenir $(i)$ mais cela découlera de l'invariance de $E$ selon la translation par le sous-groupe $\widehat{\mathbb{Z}} \subset G$. Pour voir cela, on utilise l'égalité pour $k$ composé

$$X_k(x+u) = X_k(x) \forall u \in \widehat{\mathbb{Z}} \tag{8}$$

qui découle du caractère entier de $\dfrac{\Gamma(k)}{k}$ et de la périodicité du cosinus :

$$\cos \frac{2\pi(x+1)\Gamma(k)}{k} = \cos \frac{2\pi x \Gamma(k)}{k}$$

Ainsi, on obtient la même égalité pour la fermeture $\widehat{\mathbb{Z}} \subset G$. Il suit de cela que

$$\Big| \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x+u) - \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \Big| \leq \frac{\Pi(n)}{n} \forall u \in \widehat{\mathbb{Z}}$$

et cela suffit à démontrer que $E$ est invariant par la translation par le sous-groupe $\widehat{\mathbb{Z}} \subset G$. L'image de $x \in G$ dans le quotient $G/\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ suffit ainsi à décider si $x \in E$ et il en découle que presque tous les éléments de $\mathbb{R} \subset G$ sont dans $E$. Finalement, le comportement gaussien découle des résultats de [3] sur les séries trigonométriques lacunaires.
$(ii)$ Quand $x \in \pi\mathbb{Q}$ est un multiple rationnel de $\pi$ on applique la proposition 3. Pour $b \to \infty$ on a l'équidistribution

$$\frac{1}{\phi(b)} \sum_{v \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} \sin^2 \left( \frac{\pi v}{b} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\mu(b)}{2\phi(b)} \to \frac{1}{2}.$$

Cela montre que, pour $\epsilon > 0$, l'intersection dénombrable suivante d'ensembles ouverts est dense dans $\mathbb{R}$

$$W(\epsilon) := \cap_m \cup_{n \geq m} \{x \in \mathbb{R} \mid s(n,x) \in ((1-\epsilon)\Pi(n)/2, (1+\epsilon)\Pi(n)/2)\}$$

et pour $x \in W(\epsilon)$ on a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2s(n,x)}{\Pi(n)} \cap [1-\epsilon, 1+\epsilon] \neq \varnothing$ qui donne la conclusion requise après avoir fait l'intersection des $W(\epsilon)$ pour $\epsilon = \dfrac{1}{a}$, $a \to \infty$ qui donne toujours une intersection dénombrable dense d'ensembles ouverts par le théorème de Baire [2]. $\square$

## Références


[1] R. Baire. *Sur les fonctions de variables réelles.* Ann. di Mat., 3:1–123, (1899).

[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung.* (German) Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1957). x+415 pp.

[3] R. Salem, A. Zygmund, *On Lacunary Trigonometric Series.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 33, No. 11 (Nov. 15, 1947), pp. 333–338.

[4] C. P. Willans, *On formulae for the nth prime number.* Math. Gaz. 48 (1964) 413–415.