

LA GÉOMÉTRIE NON-COMMUTATIVE

ALAIN CONNES

Je voudrais fournir un survol général de la géométrie non-commutative. J'expliquerai la motivation et le programme général. Pour cela, je m'appuierai sur deux choses. Premièrement, le plus vieil exemple en géométrie non-commutative, qui remonte à la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg. Je continuerai alors avec des mathématiques pures, et je terminerai en revenant à la physique (en fait, en revenant à ce qui peut être extrait de la phénoménologie réelle des particules élémentaires à propos de la structure fine de l'espace-temps).

Donc laissez-moi commencer par expliquer ce qui est la motivation générale de la géométrie non-commutative. Il y a une dualité bien connue qui existe, par exemple, entre l'algèbre et la géométrie, entre un espace et une algèbre commutative. Étant donné un espace, nous souhaitons l'étudier en regardant l'algèbre des coordonnées sur cet espace, qui doit satisfaire une certaine régularité. Bien sûr, si nous faisons de la géométrie algébrique, nous nous restreignons aux fonctions polynomiales ou algébriques ; mais quand nous travaillons dans les domaines de la topologie ou de la géométrie différentielle, la régularité est moins restrictive, et, par exemple, nous utilisons des fonctions continues ou des fonctions lisses.

L'élément essentiel de la géométrie non-commutative est qu'il y a plusieurs cas importants dans lesquels on est forcé de remplacer une algèbre commutative de coordonnées par une algèbre non-commutative.

La première instance de cela remonte à Heisenberg, et le second exemple est la nécessité de considérer des espaces ou des variétés qui ne sont pas simplement connexes et dont le groupe fondamental ne parvient pas à être abélien (il peut arriver que des groupes discrets arbitrairement finis apparaissent de cette manière). Pour ces espaces, l'utilisation habituelle du dual de Pontrjagin du groupe est, bien sûr, inopérant. Le troisième exemple vient des feuilletages : si l'espace des solutions d'une équation différentielle est traité comme un espace classique, alors la plupart des outils standards perdent complètement leur pertinence ; en fait, cet espace est précisément un exemple d'*espace quantique*, au sens où il est décrit par une algèbre de coordonnées qui ne peut être abélienne. Finalement, le quatrième exemple, qui est maintenant assez à la mode, est l'exemple des *groupes quantiques*. Permettez-moi d'expliquer en un mot ce que sont les groupes quantiques dans un tel contexte : les groupes quantiques sont l'analogie des groupes de Lie en géométrie non-commutative.

Un survol bref du programme général peut être le suivant : nous voulons être capable de transplanter dans le paradigme de la géométrie non-commutative les outils auxquels nous sommes habitués dans le paradigme commutatif classique.

Quand on regarde un espace de manière classique, il y a un certain nombre de points de vue qui sont comme "de plus en plus précis", et qui nous permettent d'appréhender l'espace. Le plus grossier de ces points de vue est la théorie de la mesure. Si nous connaissons l'espace du point de vue de la théorie de la mesure, alors nous n'en connaissons quasiment rien, parce que la plupart des espaces sont isomorphes en théorie de la mesure : ils sont isomorphes à l'intervalle unité selon la mesure de Lebesgue. On a leur topologie et leur géométrie différentielle (par géométrie différentielle, je

Traduction d'un texte paru dans *Mathematical Research Today and Tomorrow : Viewpoints of Seven Fields Medalists*. Conférences données à l'Institut D'Études Catalanes, Barcelone, Espagne, Juin 1991, p. 41-58.

veux dire géométrie différentielle des formes différentielles, courants, classe caractéristique, i.e. en excluant la géométrie différentielle qui provient d'une métrique riemannienne). Le quatrième et le plus important des points de vue est ainsi la géométrie riemannienne. Je soulignerai à la fin quelle est la pertinence de l'analogie non-commutative de la géométrie riemannienne pour la physique des particules.

Premier exemple : la mécanique quantique

Je commencerai maintenant par expliquer l'origine du sujet, qui est la découverte par Heisenberg de la mécanique quantique. Je voudrais montrer comment cette découverte a pris appui sur des expériences et a éliminé le paradigme habituel de la mécanique classique, forcé par des résultats expérimentaux. Revenons à Heisenberg, au moment où il a découvert la mécanique quantique (qui n'était pas alors appelée "mécanique quantique" mais *mécanique matricielle* pour une raison qui devient claire quand on regarde la manière dont elle a été trouvée).

À ce moment, par une grosse quantité de travail, les personnes avaient déjà réalisé que l'atome était formé d'un noyau interne, autour duquel il y avait des électrons dont dépendaient les propriétés chimiques de l'atome. De plus, une assez bonne manière d'observer les atomes consistait à les faire interagir avec une radiation électromagnétique. Par exemple, si on prend un prisme et qu'on fait passer la lumière du soleil à travers ce prisme, alors la lumière sera décomposée en plusieurs rayons, et, bien sûr, ces rayons formeront les couleurs de l'arc-en-ciel. Pourtant, si l'on prend un corps pur comme l'hélium ou l'hydrogène et qu'on regarde leur spectre d'émission, alors le spectre d'émission ne contiendra pas tous les rayons de la lumière du soleil. Il ne contiendra que certains rayons, qui forment en quelque sorte la "signature" des éléments en question. Ainsi, il est extrêmement important d'être capable de comprendre la régularité de ces rayons. Maintenant, si on essaye d'appliquer la mécanique classique pour comprendre cela, alors on prend pour l'atome un modèle très simple. En utilisant le langage mathématique, ce modèle sera décrit par ce qu'on appelle l'*espace des phases*, qui est connu comme étant une variété symplectique, et les fonctions sur cet espace seront les *quantités observables* du système. J'ai pensé au système comme étant constitué d'un atome avec des électrons et le noyau, et toutes les quantités observables évoluant avec le temps selon l'*évolution hamiltonienne*, qui est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{f} = \{H, f\}, \quad (1)$$

où \dot{f} est la dérivée temporelle de f , et $\{H, f\}$ est le crochet de Poisson entre f et une certaine quantité observable qu'on appelle l'*énergie*, qui est l'hamiltonien du système.

Maintenant, pour les systèmes simples, comme l'atome d'hydrogène, cette équation sera totalement intégrable, ce qui signifie qu'il y a un des tores invariants décrivant le mouvement du système. Et dans ces tores, le mouvement est presque périodique. Cela nous dit que chaque quantité observable peut être calculée et développée comme une fonction du temps

$$q(t) = \sum q_{n_1, \dots, n_k} \exp(2\pi i \langle n, \nu \rangle t), \quad (2)$$

où les coefficients q_{n_1, \dots, n_k} sont des nombres complexes, et $\langle n, \nu \rangle = \sum n_j \nu_j$ est une combinaison des fréquences de base avec les mêmes entiers n_j qui apparaissent dans q_{n_1, \dots, n_k} .

Si l'on prend ce système mécanique qui décrit l'atome et qu'on essaie de décrire en termes classiques son interaction avec la radiation, alors la réponse est donnée par la théorie de Maxwell. La théorie

de Maxwell nous dit que, quand l'atome est en interaction avec une radiation, il émet des ondes planes et ces ondes planes peuvent être complètement décrites comme suit. Prenez la quantité observable, qu'on appelle le *moment dipolaire*. (Ce que nous avons, ce sont des électrons qui sont en train de tourner autour du noyau ; les électrons ont une certaine charge, et donc, ils forment un dipôle autour du noyau). Cela définit une certaine quantité observable $\vec{Q}(t)$ qui a trois composants et qui peut être développée en une série presque périodique

$$\vec{Q}(t) = \sum \vec{q}_n \exp(2\pi i \langle n, \nu \rangle t). \quad (3)$$

La théorie de Maxwell nous enseigne que n'importe lequel des composants a une onde plane W_n , qui a une fréquence $\langle n, \nu \rangle$. Ainsi, en particulier, les fréquences observables devraient former un sous-groupe de la ligne réelle, engendré par les fréquences de base ν_j .

Il s'est avéré, cependant, que l'observation fournissait déjà à ce moment-là un résultat qui était en contradiction avec ce fait. Si l'on observe, par exemple, les rayons spectraux de l'atome d'hydrogène, alors on trouve que les longueurs d'ondes de ces rayons sont certains nombres précis, qui sont, comme je l'ai dit précédemment, une sorte de signature de l'hydrogène. La régularité de ces rayons avait déjà été trouvée par Balmer longtemps avant. Il avait observé que les longueurs d'onde de ces rayons étaient toutes des multiples simples rationnels d'une certaine longueur L . Ils étaient de la forme

$$H_\alpha = \frac{9}{5}L, \quad H_\beta = \frac{16}{12}L, \quad H_\gamma = \frac{25}{21}L, \quad H_\delta = \frac{36}{32}L, \quad \dots \quad (4)$$

de sorte que ce que nous gérons est vraiment de la forme

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4}L. \quad (5)$$

La première chose que les gens ont réalisé était qu'il était plus naturel de parler non pas des longueurs d'onde (ce sont les longueurs d'onde que l'on observe lorsqu'on regarde les rayons spectraux), mais de parler des fréquences, qui sont calculées comme rapports de la vitesse de la lumière sur les longueurs d'onde. Quand on regarde les fréquences, on obtient une formule plus simple

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2}, \quad (6)$$

où R est une constante appelée la *constante de Rydberg*, et m et n sont des entiers. Maintenant, à partir de résultats expérimentaux, on trouve que les fréquences observées ne forment pas un groupe ; c'est-à-dire, elles ne forment pas un sous-groupe de la ligne des réels. Ce qui se produit, c'est que si nous les regardons (voir la figure 1), nous voyons qu'elles se combinent ensemble. Par exemple, nous pouvons prendre le premier rayon dans la *série de Lyman* (1-2) et le combiner avec le premier rayon dans la série de Balmer (2-3), et obtenir le second rayon de Lyman (1-3). Si nous le combinons à la place avec le second rayon de Balmer, alors nous obtenons le troisième rayon de Lyman, et etc. Ainsi ce qui se produit, c'est qu'ils ne forment pas un groupe, mais qu'ils se combinent selon ce que l'on appelle le *principe de Ritz-Rydberg*, qui est le principe suivant : on peut étiqueter les fréquences par deux indices, disons ν_{ij} (ces deux indices n'ont rien à voir avec des entiers ; ils peuvent être ce qu'on veut : des lettres grecques, des couleurs, ..., et ils se combinent selon la règle

$$\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}. \quad (7)$$

C'est ce qui a été trouvé expérimentalement. Heisenberg utilisa le raisonnement extrêmement pragmatique du type suivant : si l'on fait un peu de mathématiques, on trouve que, dans le cas classique,

il y a une façon alternative de décrire l'algèbre des quantités observables. On prend des fonctions presque périodiques, qui ont les fréquences données, et on les multiplie ensemble pour former le produit de convolution

$$(qq')_{n''} = \sum_{n''=n+n'} q_n q_{n'} \quad (8)$$

Ce que l'on obtient, ce n'est rien d'autre que l'algèbre de convolution du groupe Γ , qui est supposé être le groupe des fréquences observables. Pourtant, comme le montre l'expérimentation, celles-ci ne forment pas un groupe, et donc Γ doit être remplacé par l'ensemble

$$\Delta = \{\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j\} \subset \mathbb{R} \quad (9)$$

des nombres réels se combinant selon le principe de combinaison de Ritz-Rydberg. Heisenberg décida de suivre les résultats expérimentaux et de remplacer l'algèbre de convolution du groupe Γ par l'algèbre de convolution de l'ensemble Δ , et ensuite de travailler sur l'algèbre de convolution de cet ensemble avec sa composition partiellement définie. Il trouva que le produit de deux quantités observables a et b était donné par

$$(a \cdot b)_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} \quad (10)$$

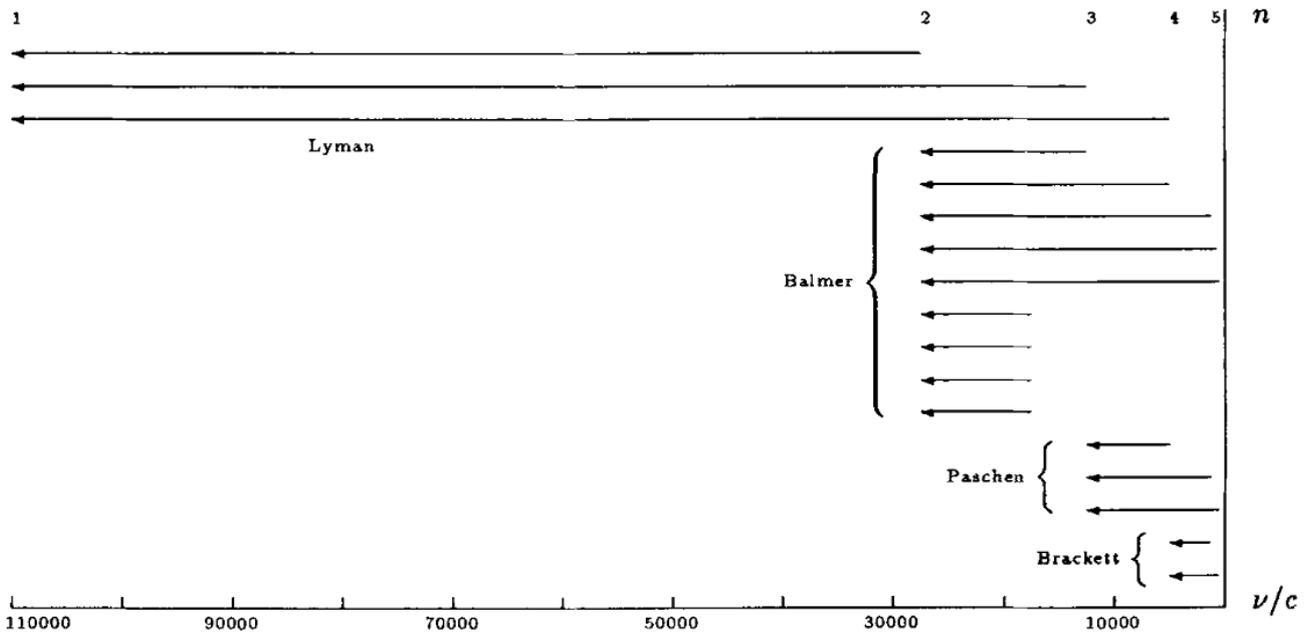


Figure 1

Il est remarquable qu'Heisenberg ait inventé cette règle à partir de résultats expérimentaux, bien qu'il ne connaisse pas les matrices. Plus tard, il parla à Bohr et Jordan et ils trouvèrent que ces choses existaient en mathématiques et étaient nommées "matrices." C'est pour cette raison qu'on appela la théorie *mécanique matricielle*.

Alors la loi d'évolution est assez simple ; notamment, elle est donnée par

$$q_{ij}(t) = q_{ij} \exp(2\pi i \nu_{ij} t), \quad (11)$$

et quelque chose se produit qui est même plus simple que dans le cas commutatif. Rappelez-vous que l'évolution était décrite par le crochet de Poisson (le crochet de Poisson était une structure

additionnelle qui venait de la structure symplectique de l'espace des phases). Maintenant, dans le cas non-commutatif des matrices, cela n'est pas nécessaire. C'est remplacé par le commutateur

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{i}{\pi}[H, q], \quad (12)$$

où H est une matrice qui a ses coefficients nuls en dehors de la diagonale et dont les éléments diagonaux sont les valeurs ν_i telles que $\nu_i - \nu_j = \nu_{ij}$. (Cette valeur ν_i n'est pas unique ; elle est unique seulement à addition commune d'une constante près).

Comme conséquence de cela, des résultats expérimentaux, on ne peut pas coller à l'espace classique des phases ; c'est-à-dire qu'on ne peut pas se ramener à la mécanique classique. À la place, on est obligé de remplacer l'algèbre commutative des fonctions des quantités observables de l'espace des phases ordinaire par une algèbre non-commutative.

Il s'avère que, dans le cas de Heisenberg, si nous regardons un système qui a un nombre fini de niveaux (ou même un nombre dénombrable de niveaux) alors l'algèbre que nous obtenons n'est pas très compliquée à analyser. Mais, par exemple, dès que nous gérons des situations comme la mécanique statistique quantique - dans lesquelles on considère un assemblage d'atomes - alors l'algèbre non-commutative que nous avons à gérer est beaucoup plus difficile à analyser. Mais cela devrait seulement appartenir à la partie "théorie de la mesure" de la discussion.

La conjecture de Novikov

Après cet exemple motivant d'Heisenberg, je voudrais entrer dans le domaine des mathématiques pures, et traiter un exemple dans lequel la géométrie non-commutative peut être vue à l'œuvre. L'exemple est le suivant. Nous rencontrons des objets non-commutatifs dès que nous essayons de traiter de variétés qui ne sont pas simplement connexes. En fait, quand on prend une variété M , à cette variété correspond un groupe $\Gamma = \pi_1(M)$, son groupe fondamental, qui mesure la connexité-non-simple de la variété. Beaucoup des résultats qui sont vrais pour des variétés simplement connexes nécessitent davantage de travail lorsqu'on essaye de les adapter au monde de la connexité-non-simple. Pour le dire grossièrement, l'idée est que lorsqu'on veut les adapter à la situation non-simplement connexe, on ne va plus gérer, par exemple, des espaces vectoriels sur les nombres complexes, mais des modules sur l'anneau de groupe d'un groupe. Basiquement, on prend toujours en compte l'équivariance par rapport à l'action du groupe fondamental, et, au lieu de faire les choses en bas dans la variété, on doit essentiellement travailler dans l'espace couvrant. Donc j'essaierai de montrer comment la géométrie non-commutative fonctionne sur des exemples, en géant le problème de la signature d'une variété.

Je décrirai d'abord le théorème de la signature de Hirzebruch. Si on prend une variété de dimension $4k$ qui est compacte et orientable, alors il y a une forme d'intersection sur la cohomologie de la dimension médiane et, par construction, la signature de cette forme quadratique s'avère être invariante par homotopie, parce qu'elle est définie de manière homotopiquement invariante. Il n'est pas clair du tout qu'il soit possible de relier cette quantité à d'autres quantités qui sont calculées, par exemple, par les classes caractéristiques du fibré tangent de la variété.

Le résultat suivant est dû à Hirzebruch

$$\text{Sign}(M) = \langle L(M), [M] \rangle ; \quad (13)$$

c'est-à-dire, la signature peut être calculée en associant la classe fondamentale $[M]$ de la variété M avec un polynôme universel $L(M) = P(p_1, \dots, p_k)$ sur les classes de Pontrjagin du fibré tangent de la variété, qui dépend de la dimension de M .

Il y a une grande différence entre les deux côtés de l'équation (13), puisque le côté gauche est invariant par homotopie par construction, et que le côté droit est essentiellement calculable par des calculs locaux (par intégration sur la variété). Cela donne la bonne réponse pour le cas simplement connexe, et Novikov a prouvé que cette combinaison spécifique des classes caractéristiques est la seule qui soit invariante par homotopie.

Les choses deviennent plus intéressantes quand la variété n'est pas simplement connexe. Dans le cas non simplement connexe, il y a des quantités qui sont candidates pour être invariantes par homotopie, mais pour lesquelles il n'est pas évident du tout, au premier regard, qu'elles le soient. Ces quantités sont les *signatures les plus hautes de Novikov*, qui sont définies par

$$\text{Sign}_c(M) = \langle L(M) \cdot \varphi^*(c), [M] \rangle. \quad (14)$$

C'est-à-dire, nous gardons le même L -genre, mais nous devons faire attention au fait que l'un des L -genres n'est pas homogène, mais qu'il a plusieurs composants. Il a un composant qui est le composant de dimension la plus élevée, et il a aussi des composants dont la dimension diffère de la dimension de M par des multiples de 4. On le multiplie par un cocycle de groupe c du groupe fondamental, après l'avoir transféré à une classe de cohomologie sur la variété. (Puisque la variété a comme groupe fondamental Γ , le groupe de cohomologie de Γ s'envoie très naturellement sur la cohomologie de la variété). Alors nous calculons le produit $L(M) \cdot \varphi^*(c)$ et nous l'évaluons sur la classe fondamentale de la variété M .

C'est une expression algébrique équilibrée. Pour une définition plus géométrique, imaginez que l'espace classifiant comme on l'appelle du groupe Γ a été construit. C'est un certain espace $B\Gamma$ qui peut être explicitement donné dans de nombreux cas. Essentiellement, on prend un cocycle dans $B\Gamma$, orienté transversalement, en considérant une fonction classifiante $\varphi : M \rightarrow B\Gamma$ transverse au cocycle, et en prenant l'image inverse $\varphi^*(c)$ du cocycle.

La question est de savoir si cette signature est invariante par homotopie. C'est une question purement géométrique, connue sous l'appellation de *conjecture de Novikov*. Novikov a conjecturé que dans plusieurs cas, ces quantités, qu'on appelle les *signatures les plus hautes*, sont invariantes par homotopie.

Je voudrais montrer comment la géométrie non-commutative fonctionne dans ce cas. Laissez-moi commencer par le cas commutatif. Je discuterai d'abord spécifiquement de la situation dans laquelle le groupe fondamental de la variété est commutatif, et nous verrons comment utiliser cette commutativité. C'est la preuve donnée par Lusztig dans ce cas. Nous verrons combien d'outils supplémentaires nous avons à disposition lorsque ce groupe est commutatif par rapport au cas non-commutatif.

Si le groupe fondamental Γ est commutatif, alors il a un dual de Pontrjagin $X = \hat{\Gamma}$, qui est un espace compact : l'espace de tous les caractères linéaires du groupe ; c'est-à-dire, tous les homomorphismes du groupe vers les nombres complexes de module 1.

Maintenant nous pouvons considérer un espace produit $M \times X$ de la variété et de l'espace dual de Pontrjagin de son groupe fondamental. Sur cet espace, nous avons un fibré en droite très canonique

qui est donné par le fait qu'à chaque fois qu'on a un caractère, ce caractère nous donne une fonction du groupe fondamental de M vers les nombres complexes de module 1, et par conséquent, un fibré plat complètement naturel sur la variété M avec une holonomie donnée par le caractère. Par conséquent, nous obtenons une famille de fibrés plats sur M paramétrée par le dual de Pontrjagin X ; ceci est le fibré en droites naturel sur le produit $M \times X$. Il n'est pas difficile de considérer maintenant la signature de cette famille (ou la famille des opérateurs de signature : pour chacun de ces fibrés plats, on a une signature avec des coefficients dans le fibré plat, de telle façon qu'on peut considérer cette famille d'opérateurs). D'un côté, la famille de signature n'est pas seulement la différence entre la dimension des vecteurs propres positifs et la dimension des vecteurs propres négatifs; c'est le sous-espace des vecteurs propres positifs moins le sous-espace des vecteurs propres négatifs. Ce que nous avons vraiment, ce sont deux fibrés vectoriels sur la base X , et ce que nous obtenons de cette manière, ce n'est pas juste un nombre, mais un élément de ce qu'on appelle la K -théorie de X , qui est dénoté par $K(X)$. Une fois qu'on a cet élément dans la K -théorie de l'espace X , il n'est pas difficile de montrer, premièrement, que cet élément est invariant par homotopie (ce n'est pas plus difficile que de prouver que la signature ordinaire est invariante par homotopie), et, deuxièmement, que si l'on prend le caractère de Chern de cette famille - en appliquant juste le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les familles - on obtient exactement la signature la plus haute de Novikov.

Maintenant, le problème que j'aimerais vraiment gérer est de savoir ce qui remplace le dual de Pontrjagin X , la K -théorie de X , le caractère de Chern, le théorème de l'indice, et etc. quand le groupe Γ (le groupe fondamental de la variété) n'est plus commutatif.

Jusque-là, nous avons utilisé la commutativité de façon essentielle. Elle a été utilisée pour définir le dual de Pontrjagin, et pour gérer ce dual de Pontrjagin de la façon habituelle utilisée pour les espaces commutatifs.

Le groupe K_0

Qu'est-ce que la K -théorie? La K -théorie consiste essentiellement à faire de l'algèbre linéaire avec des paramètres qui varient continuellement dans un espace de base X . Si l'on voit les choses algébriquement, la K -théorie consiste juste à faire de l'algèbre linéaire quand l'anneau de base a été remplacé des nombres complexes \mathbb{C} à l'anneau $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur X . Il y a une définition purement algébrique de la K -théorie en termes de classification des modules projectifs finis. Le fait que les modules soient finis correspond au fait que les fibres sont de dimension finie, et projectif est la traduction du fait que les fibrés sont clairement triviaux. Donc, en fait, la signification du fait de faire de la K -théorie sur une algèbre peut être formulée de façon purement algébrique. De plus, on trouve très rapidement que la commutativité de l'algèbre - l'anneau de base sur lequel on travaille - n'a rien à voir avec le problème. Par conséquent, nous sommes libérés de l'hypothèse de la commutativité de $\mathcal{C}(X)$. Dès que l'on traite des modules projectifs finis, on a besoin de les représenter dans des matrices sur l'algèbre, comme des idempotents. Mais les matrices couvrant une algèbre ne commutent pas, donc la commutativité n'a rien à voir avec le problème.

Le second point est que si nous prenons un groupe discret Γ , alors la construction du dual de Pontrjagin donne une C^* -algèbre non-commutative plutôt qu'une qui est commutative. Laissez-moi expliquer comment on construit cela. On prend la représentation régulière du groupe dans l'espace $\ell^2(\Gamma)$, l'espace de Hilbert avec sa base orthonormée formée des éléments du groupe. Dans cet espace de Hilbert, le groupe agit par représentation régulière à gauche et ainsi, l'anneau de groupe - la

linéarisation $C\Gamma$ - agit également. On prend simplement la fermeture de la norme de cet anneau de groupe. Si le groupe était abélien, ce que l'on obtiendrait serait précisément les fonctions continues sur le dual de Pontrjagin de l'espace (ceci n'est pas difficile ; c'est juste de l'analyse de Fourier). Ainsi, en général, nous avons un bon remplacement pour cela, excepté que c'est une algèbre non-commutative.

Il y a une façon naturelle de définir la signature de l'espace couvrant d'une variété. Si l'on regarde le recouvrement universel de la variété, alors sur ce recouvrement universel, on a le groupe fondamental qui agit, et on peut simuler la construction habituelle de la signature du recouvrement universel. Nous pouvons toujours considérer les formes différentielles avec une certaine croissance à l'infini, et le cup produit, qui nous donne un appariement, et par conséquent une forme quadratique. Il s'avère que cette forme quadratique peut être définie comme un élément de ce qu'on appelle le *groupe de Witt*. Le groupe de Witt est un groupe de formes quadratiques abstraites sur l'anneau de groupes $C\Gamma$. Mais le problème avec le groupe de Witt, c'est qu'il est défini abstraitement par une présentation des formes quadratiques (nous voulons qu'elles soient égales si elles diffèrent par un changement de variables, ou si elles sont stablement égales, etc). Donc c'est difficile à analyser.

Maintenant la raison pour laquelle nous prenons des C^* -algèbres devrait être claire. Précisément parce que les C^* -algèbres sont les seules algèbres pour lesquelles le spectre des éléments auto-adjoints est réel. Pourquoi ne pas prendre par exemple l'algèbre $\ell^1(\Gamma)$ des fonctions sommables sur Γ ? C'est une algèbre de Banach. Mais si nous prenons un élément self-adjoint sur lui, en général son spectre remplira toute la couronne. Ceci n'est pas vrai pour une algèbre involutive en général que le spectre d'un élément auto-adjoint est réel ; c'est précisément la caractérisation des C^* -algèbres. Par conséquent, nous prenons les C^* -algèbres précisément dans le but d'être capable de dire qu'un élément du groupe de Witt - une forme quadratique auto-adjointe telle que $H = H^*$ qui appartient à l'anneau des matrices $q \times q$ sur une algèbre \mathcal{A} détermine un espace propre positif et un espace propre négatif. Comment avons-nous obtenu ces espaces propres positif et négatif ? Quand le spectre est réel, on calcule une intégrale de Cauchy sur une courbe fermée C qui enferme le spectre positif de H

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C R_\lambda d\lambda, \quad (15)$$

où R_λ est le résolvant de la forme quadratique. En faisant cela, par des résultats généraux, nous savons que nous obtenons une projection idempotente. Donc cela nous permet de dire que le groupe de Witt dans cette situation envoie vers la K -théorie (et, en fait, le groupe de Witt est égal à la K -théorie). Ainsi pour les C^* -algèbres, la principale simplification est que la K -théorie est la même que le groupe de Witt, et la K -théorie est beaucoup plus simple et de loin puisque c'est juste de l'algèbre linéaire.

En mettant toutes ces choses ensemble et en utilisant des résultats de Wall-Mishchenko, nous obtenons que la signature du recouvrement universel \bar{M} , prise de façon équivariante relativement au groupe fondamental, est en fait un élément de la K -théorie de la C^* -algèbre du groupe

$$\text{Sign}_c(\bar{M}) \in K(C^*(\Gamma)). \quad (16)$$

Le problème est le suivant. Si nous étions dans le cas abélien, alors cette C^* -algèbre serait celle des fonctions continues sur le dual de Pontrjagin de Γ , et l'étape suivante serait triviale ; elle consisterait simplement à prendre le caractère de Chern de cette signature. (Bien sûr, ça ne serait pas évident de calculer ce caractère de Chern ; c'est ici que le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les

familles pourrait être utilisé. Néanmoins, il ne serait pas nécessaire de définir une nouvelle théorie des signatures ; nous prendrions juste le caractère de Chern, et nous le calculerions).

Si le groupe est non-abélien, nous n'avons pas l'espace. Nous aimerions dire que cette C^* -algèbre de Γ est comme les fonctions continues d'un certain espace, mais nous n'avons pas le dual de Pontrjagin parce que l'algèbre peut drastiquement échouer à être abélienne. Il s'avère que ce qui est nécessaire pour remplacer le caractère de Chern, c'est, d'abord, de penser à la théorie des classes caractéristiques, et d'être capable de comprendre la théorie de telle manière qu'elle continuera de tenir dans le cas non-abélien. Cela donne la *cohomologie cyclique*, que je vais traiter maintenant. Cette théorie est motivée très fortement par l'exemple, dans le sens où il y a une possibilité de remplacer les calculs de courbure, les classes caractéristiques, et etc., dans cette situation non-abélienne, dans laquelle nous ne pouvons utiliser le paradigme habituel.

Cohomologie cyclique

Permettez-moi d'essayer de présenter la cohomologie cyclique aussi simplement que possible. C'est juste une généralisation de la notion de trace. Si l'on a une algèbre non-commutative \mathcal{A} , alors il y a une simple égalité sur une fonctionnelle - sur une forme linéaire de cette algèbre - qui nous permet d'effacer la non-commutativité, i.e. qui nous permet de faire de nombreuses choses comme si l'algèbre était commutative. C'est la notion d'une *trace*

$$\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}. \quad (17)$$

La trace satisfait la condition de cocycle suivante :

$$\tau(a^0 a^1) - \tau(a^1 a^0) = 0. \quad (18)$$

Un cocycle cyclique, en général, est juste une trace plus haute. Par trace plus haute, je veux dire que c'est à nouveau une fonctionnelle, mais sur plusieurs variables dans l'algèbre, et satisfaisant les deux conditions suivantes

$$\tau(a^0 a^1, a^2, \dots, a^{n+1}) - \tau(a^0, a^1 a^2, \dots, a^{n+1}) + \dots \quad (19)$$

$$\dots + (-1)^n \tau(a^0, a^1, \dots, a^n a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a^{n+1} a^0, a^1, \dots, a^n) = 0,$$

$$\tau(a^1, a^2, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, a^1, \dots, a^n). \quad (20)$$

Un exemple simple de cocycle cyclique apparaît dans la situation où l'algèbre est l'algèbre des fonctions sur une variété. Supposons donné un courant de de Rham (rappelons qu'un *courant de de Rham de dimension k* est une forme linéaire sur des formes différentielles de degré k). Quand je dis qu'il est *fermé*, je veux dire que quand il est apparié à une forme fermée, il donne 0.

Si nous commençons avec un courant fermé c , alors nous pouvons par exemple définir une fonctionnelle multilinéaire sur l'algèbre par la formule suivante :

$$\tau_c(a^0, \dots, a^k) = \langle c, a^0 da^1 \wedge \dots \wedge da^k \rangle, \quad (21)$$

et il n'est pas difficile de montrer qu'elle satisfait les conditions (19) et (20) ci-dessus. La condition (19) correspond juste au fait que la différentielle d'un produit est donnée par la règle de Leibniz,

et la condition (20) nous dit que le courant est fermé, de telle façon que nous pouvons intégrer par parties dans le courant et cela nous permet de permuter les variables de façon cyclique.

Dans le but d'étendre les fonctionnelles précédentes aux matrices par multilinéarité, on doit simplement l'étendre aux produits tensoriels de fonctions par les matrices. Il y a seulement une formule naturelle qui peut être appliquée

$$\tau'_c(a^0 \otimes \mu^0, a^1 \otimes \mu^1, \dots, a^k \otimes \mu^k) = \tau_c(a^0, \dots, a^k) \text{Tr}(\mu^0 \dots \mu^k), \quad (22)$$

où les a^0, \dots, a^k sont des fonctions, les μ^0, \dots, μ^k sont des matrices $q \times q$, et Tr dénote la trace ordinaire. Observez que cette nouvelle expression n'est pas invariante par permutation, parce que la trace d'un produit est seulement invariante par permutations cycliques. C'est précisément ce petit fait qui nous force à ne considérer que les permutations cycliques.

Pourquoi les traces sont-elles importantes? La trace sur une algèbre est importante parce que la trace donne automatiquement une *dimension* à n'importe quel module projectif fini. Si on a un module projectif fini sur une algèbre, ce module peut être vu comme un idempotent dans les matrices. La trace s'étend aux matrices, et quand nous évaluons la trace sur l'idempotent correspondant, elle ne dépend d'aucun choix.

Une trace plus élevée (i.e. un cycle cocyclique) nous donne un invariant, exactement comme le caractère de Chern, pour les modules projectifs finis. Nous verrons par de très simples exemples que cela se réduit au caractère de Chern dans l'exemple d'un courant donné ci-dessus.

Il s'avère que l'évaluation d'un cycle cocyclique r de dimension paire sur un élément diagonal $r(e, e, \dots, e)$, pour $e \in \text{Proj}(M_q(\mathcal{A}))$, est invariante par homotopie. En d'autres termes, si nous bougeons l'idempotent par déformation parmi les idempotents, alors cette quantité ne change pas. Comment prouve-t-on cela? On procède comme suit : si vous bougez un idempotent parmi des idempotents, alors, bien sûr, c'est une belle déformation spectrale, parce que le spectre d'un idempotent est seulement constitué de 0 et de 1, et donc il faut satisfaire une équation spectrale. Cette équation est

$$\dot{e}_t = [x_t, e_t] \quad (23)$$

pour un élément x_t . Cette équation est facilement obtenue en différentiant l'équation $e_t^2 = e_t$. Maintenant, quand nous différencions $r(e, e, \dots, e)$, nous obtenons un \dot{e} apparaissant seulement une fois, et alors, par une petite manipulation algébrique en utilisant l'identité de cocycle, nous pouvons prouver que nous obtenons 0. Ainsi ceci est un invariant selon les déformations et, de plus, il n'est pas difficile de prouver qu'il dépend seulement de la classe d'isomorphisme du module projectif fini défini par e . De plus, il est additif, de telle façon que si nous prenons la somme directe de deux modules projectifs finis - même si nous avons un monôme qui n'est pas linéaire - ce que nous obtenons, c'est la somme des traces correspondantes.

Cela signifie que ce qu'on appelle la *cohomologie cyclique*, dans laquelle les éléments sont des cocycles cycliques modulo une relation triviale, s'apparie avec la K -théorie, de telle façon que chaque classe de cocycles définit une application du K_0 de l'algèbre, $K_0(\mathcal{A})$, vers les scalaires.

Laissez-moi montrer avec cet exemple des courants, d'abord, comment ce calcul se réduit au calcul de Chern-Weil par des connexions et courbure pour les fibrés vectoriels. J'ai montré que si nous avons un courant de de Rham fermé sur M , alors nous avons un cocycle cyclique. Bien sûr, si nous

voulons connaître l'appariement des caractères de Chern, il suffit de connaître comment le caractère de Chern s'apparie avec n'importe quel courant de de Rham, parce que les courants fermés de de Rham engendrent l'homologie de la variété. Donc ce qu'on a à faire c'est de montrer que l'égalité

$$\langle \tau_c, [E] \rangle = \tau_c(e, \dots, e) = \langle \text{ch}(E), c \rangle, \quad (24)$$

où $[E]$ est le module projectif fini du fibré vectoriel E , et c dénote aussi la classe d'homologie du courant. Comment prouve-t-on cela? Le module projectif fini d'un fibré vectoriel est donné par un idempotent. Une façon plus géométrique de formuler cela est de dire que le fibré vectoriel est le pull-back du fibré vectoriel canonique sur la Grassmannienne par application de la variété à la Grassmannienne, parce que quand nous prenons un idempotent dans les matrices $n \times n$ sur l'algèbre, juste par une sorte de translation, c'est exactement l'application de l'espace vers l'ensemble des idempotents des matrices $n \times n$, qui est la Grassmannienne. Sur la Grassmannienne, nous avons une connection canonique, qui vient de la projection orthogonale à partir d'une fibre (i.e. à partir d'un espace vectoriel) vers l'espace vectoriel très proche. Maintenant nous pouvons retourner (*pull back*) cette connection canonique.

Si nous calculons la courbure de cette connexion, nous trouverons qu'elle est donnée comme une matrice de formes différentielles $edede$, où de est la différentielle de cette application e . Et ainsi, quand nous apparions la courbure à une certaine puissance au courant, nous voyons immédiatement que nous obtenons $r_c(e, e, \dots, e)$.

Ce que nous avons fait a consisté à traduire algébriquement l'appariement de telle façon que, premièrement, on est complètement libéré de l'hypothèse de la commutativité; et deuxièmement, que cela se relie en fait à la cohomologie qui est bien définie, parce que, si on regarde la définition d'un cocycle cyclique, on comprend aisément que la condition (19) est la condition d'être fermé. Observons que la somme apparaissant dans cette condition n'est rien d'autre que la cofrontière de Hochschild de la cochaîne que nous sommes en train de traiter. Et la condition (20) est une restriction aux cochaînes cycliques, qui s'avère être stable selon la cofrontière, de telle façon que ce que nous obtenons est un complexe, et en dehors de ce complexe, bien sûr, une théorie de la cohomologie qui est la cohomologie cyclique.

L'indice équivariant

Voyons d'autres exemples. Prenons l'anneau de groupe d'un groupe discret, $\mathbb{C}[\Gamma]$, et supposons donné un cocycle de groupe $c(g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{C}, g_i \in \Gamma$.

Rappelons-nous du fait que lorsque nous considérons le dual de Pontrjagin, nous voulions calculer le caractère de Chern. Le problème était, bien sûr, seulement d'être capable d'apparier ce caractère de Chern avec les cocycles de groupes. Maintenant nous avons toujours le groupe, mais il n'est pas abélien, donc nous ne pouvons parler du dual de Pontrjagin. Pourtant, nous avons l'anneau de groupe, et l'assertion qui stipule que l'extrêmement simple formule suivante

$$r_c(g^0, \dots, g^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } g^0 g^{1n} \neq e \\ c(g^1, \dots, g^n) & \text{sinon} \end{cases} \quad (25)$$

assigne à tout cocycle de groupe un cocycle cyclique sur l'anneau de groupes.

Maintenant le principal ennui est que nous n'avons pas le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. Rappelez-vous que lorsque nous faisons le calcul dans le cas du dual de Pontrjagin d'un groupe abélien, nous utilisons l'indice d'Atiyah-Singer. Donc nous avons besoin d'un remplaçant pour cela. Ce remplacement, c'est un théorème qui non seulement gèrera l'opérateur de signature, mais en fait gèrera un opérateur arbitraire elliptique Γ -invariant sur l'espace couvrant \bar{M} .

Si on nous donne un opérateur différentiel D qui est elliptique sur une variété M , nous pouvons toujours le faire remonter (parce qu'il est local) à l'espace couvrant en un opérateur \bar{D} qui est Γ -invariant et toujours elliptique. Il s'avère que, alors que l'opérateur à l'étage bas a une paramétrisation (un inverse modulo les opérateurs lisses), l'opérateur sur l'espace recouvrant a également une paramétrisation, mais celle-ci n'est pas un inverse modulo les opérateurs lisses : c'est un inverse modulo $R\Gamma$, l'anneau de groupes de Γ étendu par les opérateurs lissant. (R dénote l'anneau des opérateurs lissant sur la base, qui ne dépend pas de la variété).

En fait, l'index pour l'opérateur est un élément de la K -théorie de l'anneau de groupes de Γ étendu par les opérateurs lissant, $\text{Ind}_\gamma \bar{D} \in K_0(R\Gamma)$, qui est appelé l'*index* Γ -équivalent. Maintenant, le théorème suivant est vérifié, qui est exactement un analogue plus élevé du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, de la même manière que la signature plus élevée de Novikov est l'analogue de la signature ordinaire.

THÉORÈME (CONNES-MOSCOVICI). *Si c est un $2q$ -cocycle de groupes sur le groupe Γ , alors*

$$\langle r_c, \text{Ind}_\Gamma \bar{D} \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \langle \text{ch} \sigma_D \cdot \text{Td}(M) \cdot [c], [M] \rangle. \quad (26)$$

Ici Td dénote un *Tgenre impair* du fibré tangent complexifié. Cette formule contient deux nouveaux termes par rapport à la formule d'Atiyah-Singer ; notamment, la constante numérique $q!/(2q)!$, qui prend en compte la dimension du cocycle, et le facteur $[c]$, qui est la classe du cocycle de groupe c vue sur la variété M .

Maintenant, nous appliquons cela à l'opérateur de signature sur le recouvrement et nous obtenons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. *Si D est l'opérateur de signature, alors*

$$\langle r_c, \text{Ind}_\Gamma \bar{D} \rangle = \text{signature plus élevée de Novikov} = \langle L[M] \cdot \varphi^*(c), [M] \rangle. \quad (27)$$

Nous pourrions dire que la conjecture de Novikov est résolue en général ; mais il reste toujours un problème technique. (Néanmoins, la conjecture est résolue pour une famille générique de groupes, notamment les *groupes de Gromov hyperboliques*. Je ne donnerai pas la définition technique de ces groupes, mais je mentionnerai la raison technique qui restreint encore la démonstration à ces groupes).

Quand on traite le cas abélien, on a des fonctions lisses, et les fonctions lisses ont les deux propriétés suivantes plutôt importantes. La première propriété est que la K -théorie de l'algèbre des fonctions lisses est la même que la K -théorie des fonctions continues

$$K(\mathcal{C}^\infty(M)) \xrightarrow{\infty} K(\mathcal{C}(M)). \quad (28)$$

La seconde est que les cocycles cycliques que nous obtenons automatiquement s'étendent du groupe agissant CT , qui est comme les polynômes de Laurent, aux fonctions lisses. Il s'avère que, quand on prend des groupes non-abéliens, alors ce problème - qui est assez trivial dans le cas abélien - présente des difficultés analytiques. Pourtant, cette technicité peut être résolue pour les groupes hyperboliques de Gromov.

J'expliquerai maintenant dans quel sens ces groupes sont génériques. Par un résultat de Gromov, si nous regardons les groupes (finiment présentés) donnés par les générateurs et les relations, en prenant un nombre fini de générateurs, en limitant la longueur des relations, et en comptant parmi les groupes obtenus ceux qui sont hyperboliques, alors le pourcentage de ceux-ci tend vers 100% lorsque la longueur tend vers l'infini.

Nous aimerions que la conjecture de Novikov soit vraie en général. Il pourrait être possible que le problème technique ci-dessus soit en effet essentiel, et que la conjecture ne soit vraie que pour les groupes pour lesquels on a une sorte de contrôle analytique. Il est très important de traiter de telles questions, parce qu'elles ne sont pas seulement pertinentes pour la conjecture de Novikov. Ce que l'on traite vraiment dans cette situation, c'est l'analyse du dual d'un groupe discret. C'est un espace quantique (il n'est pas abélien) et cette analyse est beaucoup plus compliquée et riche que dans le cas abélien. Principalement, le cas abélien est une sorte de cas en dimension finie, alors que dans le cas non-abélien, à cause de la croissance des groupes, nous avons des phénomènes, qui sont de dimension infinie par nature.

Géométrie riemannienne

Au début, j'ai expliqué la motivation initiale d'Heisenberg. Puis j'ai montré au moyen de quelques exemples comment les idées de la géométrie non-commutative peuvent être utilisées pour des exemples spécifiques. Jusque-là, je n'ai parlé que de topologie, de théorie des formes différentielles et de classes caractéristiques. Je voudrais maintenant discuter de la partie très essentielle de la géométrie qui traite de la mesure des longueurs, i.e. la géométrie riemannienne. Cela n'est absolument pas terminé. Bien que seule une petite partie de la théorie soit complète, je pense qu'elle aura des applications en physique, et je voudrais donc revenir à la physique dans la dernière partie de mon exposé.

En faisant de la géométrie non-commutative, on arrive après de nombreux exemples à la notion qui devrait remplacer la notion de variété riemannienne. Cette notion, d'un côté, couvrira le cas de la dimension finie ; mais en géométrie riemannienne, elle fera quelque chose de plus, elle mélangera le discret et le continu. (La géométrie riemannienne, comme cela est bien connu, ne traite que du continu et ne gère pas le discret). Le paradigme rendra possible la gestion de dimensions non-entières, comme les dimensions de Hausdorff. Par exemple, si nous avons un cercle qui s'enroule dans un espace de dimension de Hausdorff plus grande dans le plan, le paradigme gèrera cela comme le gèrerait la géométrie riemannienne, mais les fonctions ne seront pas différentiables.

Laissez-moi revenir aux notions fondamentales de la géométrie riemannienne. La géométrie riemannienne gère un certain espace métrique dans lequel la distance est calculée comme le minimum des longueurs d'arcs, $d(p, q) = \text{Inf} \{ \int_p^q ds \}$, où la longueur d'un arc infinitésimal est donnée par la racine carrée de la forme quadratique

$$ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (29)$$

Étonnamment, cette géométrie est pertinente pour deux raisons. L'une d'elles est qu'elle offre une large variété d'exemples, et la seconde est qu'elle offre de nombreux outils. En particulier, tous les outils de la géométrie différentielle et du calcul intégral sont utilisables et rendent les calculs possibles.

Au début, la géométrie riemannienne était destinée à généraliser les géométries euclidiennes et non euclidiennes, et il y avait donc la tentation de la restreindre à des espaces extrêmement spéciaux, comme ceux dans lesquels un mouvement rigide est possible. La relativité générale a montré que cela serait une erreur, parce qu'en relativité générale, on est obligé de considérer tous les espaces possibles d'une certaine sorte, et on est obligé d'évoluer parmi eux.

Revenons maintenant des considérations ci-dessus à un point de vue plus algébrique. Nous prenons l'algèbre \mathcal{A} des fonctions sur la variété M - aucune régularité n'est supposée - et l'algèbre est supposée agir sur un espace de Hilbert. Cet espace de Hilbert est l'espace des spineurs L^2 , $\mathcal{H} = L^2(M, S)$. De plus, je prends comme donné l'opérateur de Dirac D ; c'est-à-dire que nous est donnée une algèbre de fonctions ainsi qu'une représentation. Mais si nous n'étions qu'en train de gérer des représentations, nous n'aurions rien sur quoi travailler. Nous voulons ajouter une condition de finitude. Cette condition de finitude est donnée par l'opérateur de Dirac D , qui est fini au sens où son inverse est compact, ou au sens où ses valeurs propres vont à l'infini. Et il est compatible avec l'algèbre des fonctions, au sens où si nous permutons l'opérateur de Dirac avec les fonctions, ils ne commutent pas, mais ce que nous obtenons est borné. (L'opérateur de Dirac est non borné).

Je montrerai maintenant comment retrouver la variété M , la distance géodésique $d(p, q)$ sur M , le volume riemannien, l'intégration des fonctions, le potentiel de jauge, et l'action de Yang-Mills, en dehors des données provenant purement de la théorie des opérateurs $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. Et cela sera fait de manière que nous ne serons pas limités aux variétés riemanniennes, mais après un moment, nous pourrons également traiter des espaces discrets.

Laissez-moi venir brièvement à la manière dont on retrouve la variété M . Nous avons l'algèbre, mais nous n'avons pas encore la régularité. Nous retrouvons la régularité en demandant au commutateur d'être borné. Alors par fermeture, nous obtenons l'algèbre des fonctions continues. Par la bien connue dualité entre l'algèbre des fonctions continues et les points, nous retrouvons les points comme un espace topologique compact

$$\begin{aligned} M &= \text{Spectre de la C*-algèbre } \overline{\mathfrak{A}} ; \\ \mathfrak{A} &= \left\{ a \in \mathcal{A} \mid [D, a] \text{ est borné} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

Voyons la distance, qui est beaucoup plus intéressante. La formule habituelle pour la distance est l'infimum sur tous les arcs. Je remplacerai cette formule par une formule qui donnera la même réponse (i.e. la distance géodésique), mais qui sera duale; au lieu de considérer que les arcs parcourent la variété, je considérerai les coordonnées. Je veux mesurer la distance entre deux points comme suit

$$d(p, q) = \text{Sup} \left\{ |a(p) - a(q)| \mid \| [D, a] \| \leq 1 \right\}. \quad (31)$$

Vérifions que cela est vrai. Quand nous calculons le commutateur $[D, a]$, nous trouvons que c'est la multiplication de Clifford par le gradient ∇a de la fonction a . Dire que cet opérateur a une norme inférieure ou égale à 1 consiste précisément à dire que, en chaque point, ce gradient a une longueur inférieure ou égale à 1. Par un argument simple, cela consiste précisément à dire que la fonction est

lipschitzienne pour la distance géodésique, avec une constante de Lipschitz égale à 1 :

$$\frac{\text{Sup}|a(p) - a(q)|}{d(p, q)} \leq 1. \quad (32)$$

Ainsi, nous voyons immédiatement qu'une inégalité est en effet donnée. Pour obtenir l'autre inégalité, nous prenons juste la fonction qui est la distance géodésique à un point donné p . Cette fonction est lipschitzienne, et donc nous pouvons la mettre du côté droit et nous avons alors terminé.

Ce que nous obtenons ici, c'est la même distance géodésique que d'habitude. Pourtant le calcul de la mesure est différent, et, en fait, quand nous effectuons des mesures - pas de grandes longueurs, mais de très petites longueurs - nous sommes parfaitement incapables d'utiliser un chemin. On pourrait dire, par exemple, qu'un photon a une trajectoire qui est un chemin allant d'un point à un autre point. Mais à nouveau, cela n'est pas vrai : le photon en mécanique quantique est une onde plane qui a un moment défini, et il n'y a donc pas de trajectoire du photon, et, en fait, nous ne mesurons pas la distance par la formule de l'infimum des arcs de longueurs, mais précisément par la formule (31).

Avoir cette formule ne compte pas beaucoup, parce que nous devons être capables d'intégrer des fonctions. Il y a une analyse du résidu - c'est-à-dire, ce qui est appelé la *trace de Dixmier* des opérateurs sur l'espace de Hilbert - qui nous permet d'écrire la formule du volume dans le cas riemannien en théorie pure des opérateurs à partir de l'opérateur de Dirac :

$$\int_M f dv = \text{Tr}_\omega(f D^{-p}), \quad (33)$$

où p est la dimension, i.e. l'ordre d'accroissement des valeurs propres de D : $\lambda_n \sim n^{1/p}$. Cela est relié au théorème taubérien, dans le sens où si nous prenons la fonctionnelle Tr_ω , - la trace de Dixmier, qui n'est pas la trace ordinaire - alors elle est reliée au résidu de la fonction zeta de l'opérateur au point 1.

C'est la trace qui a été découverte par Dixmier en 1966. Globalement, son papier n'a jamais été lu : il est resté complètement caché dans la littérature pendant un très long temps ; mais à partir du travail de Manin, Wodzicki et Guillemin, j'ai remarqué que le résidu des opérateurs différentiels était cette même trace, si ce n'est que la trace de Dixmier existe en général. Elle n'est pas particulière au cas des opérateurs différentiels, ou à la configuration d'une variété. Elle pourrait donc être utilisée en général pour procéder à l'intégration dans cette situation générale de théorie riemannienne. Et maintenant, il y a le fait assez surprenant que la mesure de Hausdorff (par exemple, sur la frontière des groupes quasi-Fuchsien) est aussi donnée précisément par la trace de Dixmier, bien que nous soyons maintenant dans une situation où la dimension est non entière.

Ainsi, on construit d'abord l'intégration des fonctions, la distance, et alors on procède à la construction de la théorie de jauge. Pour construire la théorie de jauge, on utilise l'opérateur de Dirac, on définit les connexions, les fibrés vectoriels, la courbure, et etc.

Voyons le point clé. Cette théorie de jauge a exactement les mêmes caractéristiques que la théorie de jauge ordinaire. En particulier, c'est uniquement en dimension 4 qu'on a un théorème général qui relie la seconde classe de Chern avec l'action de Yang-Mills. Cela découle d'un théorème complètement général utilisant la trace de Dixmier, qui, en fait, justifie la trace de Dixmier et fournit une inégalité montrant que la théorie de jauge n'est pas évidente quand la seconde classe de Chern

n'est pas évidente.

THÉORÈME. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet avec $D^{-1} \in \mathcal{L}^{2n+1}$. Alors :

1. L'égalité $\varphi(a^0, \dots, a^{2n}) = \text{Tr}_\omega(\gamma a^0 [D, a^1] \dots [D, a^{2n}] D^{-2n})$ définit un cocycle de Hochschild sur \mathcal{A} .
2. La classe de φ est la même que la classe du caractère de Chern de la classe de K -homologie de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

Maintenant, je voudrais montrer ce qui se passe à cause du fait que la théorie n'est pas limitée au continu. Nous pouvons considérer un espace qui est l'espace produit d'un continuum (le continuum ordinaire à quatre dimensions) par un espace discret, et l'espace discret le plus simple que nous puissions prendre est un espace à deux points. On transcrit algébriquement le sens qui consiste à prendre un tel produit par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \\ D &= D_1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes D_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Faisons de la théorie de jauge pour cet espace à deux points. L'espace à deux points est décrit par l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, puisque les fonctions sur l'espace à deux points sont juste données par deux nombres complexes $(f(a), f(b))$. À quoi correspond l'opérateur de Dirac ici ? Par une théorie générale qui est appelée la K -homologie, on peut montrer qu'il se réduit à la forme suivante : l'espace de Hilbert est de la forme $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N + \mathbb{C}^N$; l'algèbre agira par les matrices

$$\begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix} \tag{35}$$

et l'opérateur de Dirac D sera diagonal et bien sûr, self-adjoint :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

pour une certaine matrice $N \times N$ notée M . Telle est la structure que nous souhaitons considérer sur l'espace.

Maintenant, la première chose que nous devons faire est de calculer la distance. Si nous prenons pour distance la formule donnée par l'infimum sur les longueurs d'arcs, alors, puisque nous avons un espace à deux points, nous n'obtiendrons rien, parce qu'il n'y a pas d'arc dans l'espace à deux points. Mais nous avons l'autre formule, et nous pouvons calculer la distance entre nos deux points. En utilisant la formule (31), nous obtenons

$$d(a, b) = \text{Sup} \left\{ |f(a) - f(b)| \mid \| [D, f] \| \leq 1 \right\} = \frac{1}{\lambda}, \tag{37}$$

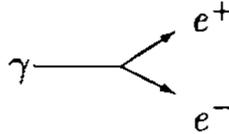
où λ est la norme de la matrice M , c'est-à-dire, la racine carrée de la plus grande valeur propre de M^*M . Alors nous calculons le potentiel de jauge, l'action de Yang-Mills, et nous trouvons un terme qui est précisément le terme qu'on appelle le terme de brisure de symétrie, que les physiciens ont été contraints d'introduire pour assigner des masses aux particules élémentaires.

Alors nous allons plus avant et nous nous demandons quels sont les fibrés vectoriels sur un espace à deux points. Bien sûr, cela est très évident : un fibré vectoriel est donné par deux fibres, \mathbb{C}^k et $\mathbb{C}^{k'}$, et un fibré non trivial est un fibré dans lequel $k \neq k'$. Nous prenons le fibré non trivial le plus simple, qui a des fibres de dimension 2 en un point et de dimension 2 en l'autre point.

Une fois qu'on a vu en détail quel est le cas riemannien en dimension 4 et le cas des points discrets, on peut regarder le produit. Quand nous prenons le produit de ces deux espaces et que nous calculons quelle est la théorie de jauge, nous trouvons exactement ce que les physiciens se sont vus donné, également, par la physique des particules élémentaires et le *modèle de Glashow-Weinberg-Salam*. On trouve un Lagrangien qui contient bien plus de termes que le Lagrangien habituel. Ordinairement, de la théorie de Maxwell et de la théorie de Dirac, nous savons que la théorie de l'électrodynamique quantique est décrite par un Lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{fB}. \quad (38)$$

qui a une partie purement potentiel de jauge \mathcal{L}_B et une partie fermionique \mathcal{L}_f , et une interaction entre les fermions et les bosons donnée par le diagramme



qui nous dit comment un photon peut donner un positron et un électron, par exemple. Ce Lagrangien est celui de l'électrodynamique quantique.

Dans ce siècle¹, on a compris que l'électrodynamique quantique n'était pas suffisante pour décrire ce qu'on appelle l'*interaction électro-faible*. En fait, on a découvert qu'il y a un décalage nucléaire beta, qu'il y a la radioactivité (qui a été découverte à la fin du siècle précédent), et, graduellement, avec de nombreuses expériences, les physiciens ont été amenés au Lagrangien expérimental suivant :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f + V(H) + \mathcal{L}(B, H) + \mathcal{L}(f, H). \quad (39)$$

dans lequel $V(H)$ est le *potentiel de Higgs*, $\mathcal{L}(B, H)$ est le *couplage minimal*, et $\mathcal{L}(f, H)$ est le *couplage de Yukawa*.

En faisant un petit calcul en géométrie riemannienne non-commutative, j'ai montré que si l'on altère l'espace un petit peu en le croisant avec un ensemble discret de deux points, alors l'espace-temps devient comme un produit de l'espace-temps ordinaire par deux points, et ces deux points sont extrêmement proches : si on calcule leur distance, on trouve quelque chose de l'ordre de 10^{-16} cm.

L'idée ne consiste pas seulement à introduire de nouvelles dimensions, mais à utiliser une fibre discrète. Maintenant, quand on calcule le Lagrangien comme expliqué ci-dessus, pour ce nouvel espace riemannien, on trouve exactement le modèle standard avec l'ensemble de ses cinq termes (39).

Pour le moment, dans le but d'incorporer les quarks, on doit faire un peu plus. Il y a deux copies de l'espace, i.e. il y a deux côtés : l'un est *orienté à gauche* et l'autre est orienté inversement. Pour

1. le XX^{ème}.

incorporer les quarks, au lieu de considérer seulement les fonctions à valeurs scalaires sur la copie orientée dans un sens, on doit considérer les fonctions à valeurs dans les quaternions. L'algèbre des quaternions est légèrement non-commutative (par "légèrement non-commutative", je veux dire que les quaternions satisfont des identités polynomiales ; ce ne sont pas des choses de grande dimension en ce qui concerne les matrices).

L'idée générale est que pour comprendre l'espace-temps, il peut être important de ne pas se limiter aux variétés connexes riemanniennes ordinaires et d'autoriser une notion plus générale de l'espace-temps - une notion plus générale que la géométrie riemannienne - basée sur des données théoriques et qui offre la possibilité de parler d'espace-temps "effectif". Je ne suis en aucun cas en train de dire qu'on aura là la réponse finale aux interrogations sur l'espace-temps. Ce que je dis, c'est que si nous prenons l'espace-temps et que nous calculons l'analogie de l'électrodynamique quantique sur lui, alors nous sommes précisément en train de calculer le Lagrangien compliqué ci-dessus (39). Ainsi, cela nous donne une meilleure compréhension géométrique du modèle existant effectif le plus précis de la physique des particules élémentaires.

Alain Connes
Institut des Hautes Études Scientifiques
35 Route de Chartres
F-91440 Bures-sur-Yvette
France

Transcrit d'un enregistrement de la conférence par Pere Ara et Carles Broto ; révisé par l'auteur.