

# Non-commutativité et Physique : un survol non technique

Ali H. Chamseddine<sup>1,4</sup>, Alain Connes<sup>2,3</sup> et Walter D. van Suijlekom<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Département de Physique, Université américaine de Beyrouth, Liban

<sup>2</sup>Collège de France, 3 rue d'Ulm, F75005, Paris, France

<sup>3</sup>I.H.E.S. F-91440 Bures-sur-Yvette, France

<sup>4</sup>Université Ludwig Maximilian, Theresienstrasse 37, 80333, Munich, Germany

<sup>5</sup>Institut pour les Mathématiques, l'Astrophysique et la Physique des particules, Université Radboud de Nimègue, Heyendaalseweg 135, 6525 AJ Nimègue, Pays-Bas.

chams@aub.edu.lb, alain@connes.org, waltervs@math.ru.nl

## Résumé

Nous présentons un survol des applications de la géométrie non-commutative à la physique. Nous nous focalisons sur les idées conceptuelles, plutôt que sur les problèmes techniques sous-jacents. En partant historiquement des relations de Heisenberg, nous expliquerons comment, en général, la non-commutativité entraîne l'évolution canonique temporelle, alors qu'elle permet en même temps la coexistence de variables discrètes et continues. L'approche spectrale de la géométrie est alors expliquée pour englober deux ingrédients naturels : l'élément de distance et l'algèbre. La relation entre les deux est dictée par les relations de Heisenberg citées plus haut, à partir desquelles à la fois la géométrie de spin et la théorie de jauge non-abélienne émergent. Notre exposé indique quelques-unes des applications en Physique, incluant l'unification au-delà du modèle standard, l'importance de la dimension 4, la seconde quantification et l'entropie.

## 1 Introduction

Notre contribution à ce volume sur « la non-noncommutativité et la physique » décrira le rôle-clef de la transition de l'algèbre commutative à l'algèbre non-commutative à partir de la découverte par Heisenberg de la mécanique matricielle. La raison conceptuelle de la puissance de cette transition est que le codage par l'algèbre non-commutative retient davantage d'information

---

Référence : article arxiv <https://arxiv.org/pdf/2207.10901.pdf> version du 25.07.2022 au matin, traduction Denise Vella-Chemla, juillet 2022.

que sa contrepartie commutative. On est en fait très habitué à ce fait lorsqu'on écrit des mots. On écrit en respectant l'ordre des lettres et cela nous permet de coder l'information d'une manière très efficace. Passer au commutatif consiste à ignorer l'ordre des lettres et rend équivalents des mots dont les ensembles de lettres sont identiques comme cela est le cas pour les anagrammes. La nuance entre le non-commutatif et le commutatif est la même que dans le jeu de scrabble où un même ensemble de lettres peut permettre de composer des mots assez différents. D'une façon suggestive, on peut voir la quantification comme l'acte de monter de l'ombre commutative (semi-classique) au monde réel non-commutatif. Dans la Section 2 on expliquera dans quel sens les espaces non-commutatifs sont dynamiques et possèdent une évolution temporelle canonique.

Ce fait est à la source de la géométrie non-commutative, laissant le cas statique à la géométrie ordinaire. Dans la Section 3 on expliquera comment la non-commutativité des variables réelles est la clef de la coexistence des variables discrètes et continues. Elles coexistent dans le calcul quantifié qui permet un traitement parfait des variables infinitésimales et permet la coexistence du discret et du continu précisément par la non-commutativité des acteurs (les opérateurs) à cette étape.

L'irruption décrite ci-dessus de la non-commutativité en physique a eu un fort impact sur les mathématiques qui a amené à une reconstruction de la géométrie dans le formalisme de l'espace de Hilbert de la mécanique quantique.

Coder la géométrie dans ce formalisme a deux ingrédients, l'élément de longueur  $ds$  dont l'incarnation comme propagateur de Dirac est décrite dans la Section 4 et l'algèbre des coordonnées quand à nouveau, la non-commutativité entre en ligne de compte et, comme expliqué dans la Section 5 permet de coder même les espaces ordinaires à un prix moindre que ne le permet l'algèbre commutative.

Nous avons compris quelle est la quantité minimale de non-commutativité nécessaire pour obtenir des 4-variétés de spins, et cela amène à notre extension de Pati-Salam du modèle standard. Le rôle particulier de la dimension 4 est décrit dans la Section 6. Les théories de jauge non-abéliennes sont les témoins de la faible quantité de non-commutativité qui est nécessaire dans le codage des 4-variétés.

Le principe d'action qui amène à l'action gravitationnelle d'Einstein-Hilbert couplée avec l'extension ci-dessus du modèle standard est le principe d'action spectrale. Il acquiert la signification d'une entropie lorsqu'on travaille au second niveau de quantification, et nous terminerons ce court article dans la Section 7 en expliquant le rôle potentiel de la seconde quantification pour le paradigme spectral de la géométrie.

## Remerciements

Le travail de A. H. C est financé en partie par la subvention de la Fondation pour la Science Nationale n° Phys-1912998 et le Centre Arnold Sommerfeld de l'Université LMU de Munich.

## 2 La non-commutativité engendre le temps

On peut tracer l'irruption de la non-commutativité en physique comme remontant à cette nuit de juin 1925 quand, aux alentours de trois heures du matin, W. Heisenberg alors qu'il travaillait seul dans l'île d'Helgoland en mer du Nord, découvrit la mécanique matricielle et la non-commutativité de l'espace des phases des systèmes mécaniques microscopiques. Jusqu'à ce jour, toutes les manipulations des quantités observables étaient effectuées en algèbre commutative et la découverte que les observables fondamentales comme la position et le moment n'obéissaient pas aux lois commutatives élémentaires de calcul est un tournant, qui est également à l'origine de la théorie mathématique de la géométrie non-commutative. En effet, au niveau mathématique, cela a montré l'importance en géométrie des espaces dans lesquels les coordonnées ne commutent pas. Après la formulation de la découverte d'Heisenberg par la mécanique matricielle par Born et Jordan dans leur article de 1925, von Neumann reformula la mécanique quantique en utilisant des opérateurs de l'espace de Hilbert et il alla beaucoup plus loin avec Murray en identifiant les « sous-systèmes » d'un système quantique comme des « factorisations » de l'espace de Hilbert sous-jacent  $\mathcal{H}$ . Ils découvrirent des factorisations inattendues qui ne correspondaient pas à des décompositions en produit tensoriel  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  et ils développèrent la théorie des facteurs qu'ils classifièrent en trois types. Le type I correspond aux facteurs  $M$  associés à des décompositions en produit tensoriel ordinaire  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  et de tels facteurs sont constitués par ces opérateurs de la forme  $T \otimes 1$ . Les facteurs de type II sont ceux qui possèdent une trace et les facteurs de type III sont ceux qui ne sont ni du type I ni du type II. La théorie de Tomita-Takesaki [39] a étendu aux facteurs la correspondance qui existe dans le cas du type I ou dans le cas du type II en utilisant la trace, entre l'état de Boltzmann-Gibbs  $\phi$  et l'évolution d'Heisenberg  $\sigma_t$  des observables, exprimés ensemble en fonction du hamiltonien  $H$

$$\phi(A) = \text{Tr}(A \exp(-\beta H)) / \text{Tr}(\exp(-\beta H)) \rightarrow \sigma_t^\phi(A) = \exp(itH)A \exp(-itH).$$

Le point de départ de la classification des facteurs et la réduction du type III au type II a été la découverte dans [20] que l'évolution  $\sigma_t^\phi \in \text{Aut}(\mathcal{M})$  est en fait indépendante du choix de l'état (normal fidèle)  $\phi$  sur le facteur  $\mathcal{M}$  à condition qu'on divise le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{M})$  des automorphismes du facteur  $\mathcal{M}$  par les automorphismes  $\alpha$  qui existent comme conséquence triviale de la non-commutativité, i.e. ceux de la forme suivante, pour un certain unitaire  $U \in \mathcal{M}$ ,

$$\alpha(A) = UAU^*, \forall A \in \mathcal{M}$$

De tels automorphismes sont dits « intérieurs » et ils forment un sous-groupe normal  $\text{Int}(\mathcal{M}) \subset \text{Aut}(\mathcal{M})$  du groupe des automorphismes de  $\mathcal{M}$ . Cela a montré que les facteurs  $\mathcal{M}$  admettent une évolution temporelle canonique [20,22] i.e. un homomorphisme canonique

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \text{Out}(\mathcal{M}) = \text{Aut}(\mathcal{M}) / \text{Int}(\mathcal{M})$$

en montrant que la classe d'automorphisme modulaire  $\sigma_t^\varphi \in \text{Out}(\mathcal{M})$  ne dépend pas du choix de l'état normal fidèle  $\varphi$ . L'unicité ci-dessus de la classe d'automorphisme modulaire [20] a drastiquement changé le statut des deux invariants qui avaient été introduits précédemment dans [18,19] en les rendant calculables. Le noyau de  $\delta$ ,  $T(\mathcal{M}) = \text{Ker}\delta$  forme un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , les



périodes de  $M$ , et de nombreux sous-groupes non triviaux non fermés apparaissent de cette manière. L'invariant fondamental des facteurs est le *spectre modulaire*  $S(M)$  de [18]. Son intersection  $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}_+^*$ , [27], et cela a donné la subdivision du type III en types  $\text{III}_\lambda \iff S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \lambda\mathbb{Z}$ . De ce fait, on a montré que la classification des facteurs de type  $\text{III}_\lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1)$  se réduisait à celle du type II et des automorphismes

$$M = N \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}, \quad N \text{ type II}_{\infty}, \quad \theta \in \text{Aut}(N)$$

Dans le cas  $\text{III}_\lambda$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $N$  est un facteur et l'automorphisme  $\theta \in \text{Aut}(N)$  est de module  $\lambda$  *i.e.* il met à l'échelle la trace par le facteur  $\lambda$ . Dans le cas  $\text{III}_0$ ,  $N$  a un centre non trivial et, en utilisant la restriction de  $\theta$  au centre, cela a donné un invariant très riche, un flot, qui a été utilisé en 1972 [21] pour montrer l'existence du facteur hyperfini non ITPFI. Seul le cas  $\text{III}_1$  restait ouvert dans [22] et il fut résolu plus tard par Takesaki [38] en utilisant le produit croisé par  $\mathbb{R}_+^*$ .

### 3 Variables discrètes et continues

L'une des caractéristiques vraiment nouvelle et totalement inattendue de la mécanique quantique est le fait que les résultats d'expériences microscopiques ne peuvent pas être reproduits. Même si vous ne considérez qu'une expérience à une seule fente et que vous envoyez des électrons ou des photons sur cette petite fente fine d'une taille comparable à la longueur d'onde des particules, la position exacte où la particule atterrit sur une cible de l'autre côté de la fente est quelque chose qui ne peut être reproduit.



FIGURE 1 – élément de longueur

Ce que l'on peut prédire, c'est la probabilité que la particule arrive quelque part mais le fait qu'elle arrive à un endroit fixé, par les principes de la mécanique quantique, ne peut être reproduit. Cela signifie qu'il y a un hasard fondamental qui est inhérent à la physique quantique et qui a le pouvoir de produire des nombres réellement tirés au hasard. C'est donc devenu l'option préférée des applications scientifiques nécessitant le hasard (Figure 1). Du côté mathématique des choses, il y a une question liée, qui en fait est attribuée à Newton, qui est simplement *qu'est-ce qu'une variable réelle?*. Si vous demandez à un mathématicien son point de vue sur cette question, la réponse la plus probable que vous obtiendrez est *qu'une variable réelle est la donnée d'un ensemble  $X$  et d'une application de cet ensemble  $X$  vers les nombres réels*. Pourtant, si vous pensez plus profondément à cela, vous trouverez que la réponse est très insatisfaisante. En effet, elle signifie que l'on ne peut avoir coexistence de variables continues, notamment des variables qui peuvent prendre leur valeur dans un domaine continu de valeurs possibles, et de variables discrètes, notamment les variables qui peuvent prendre leur valeur dans un ensemble dénombrable de valeurs, disons, avec une multiplicité finie pour chacune d'elles. La raison à cela est que si vous

|  |  |
|--|--|
| Variable réelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$                     | Opérateur auto-adjoint $H$ dans l'espace de Hilbert                              |
| Domaine $f(X) \subset \mathbb{R}$ de la variable                   | Spectre de l'opérateur $H$   |
| Composition $\phi \circ f$ , $\phi$ mesurable                      | Fonctions mesurables $\phi(H)$ des opérateurs auto-adjoints                      |
| Variable complexe bornée $Z$                                       | Opérateur borné $A$ dans l'espace de Hilbert                                     |
| Variable infinitésimale $dx$                                       | Opérateur compact $T$  |
| Infinitésimal d'ordre $\alpha > 0$                                 | Valeurs caractéristiques $\mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$ pour $n \rightarrow \infty$ |
| Opérations algébriques sur les fonctions                           | Algèbres d'opérateurs dans l'espace de Hilbert                                   |
| Intégrale d'une fonction $\int f(x)dx$                             | $\int T =$ Coefficient de $\log(\Lambda)$ dans $\text{Tr}_\Lambda(T)$            |
| Élément de longueur $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$               | $ds = \bullet \text{---} \bullet$ : Propagateur de fermions $D^{-1}$             |
| $d(a, b) = \text{Inf} \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ | $d(\mu, \nu) = \text{Sup}  \mu(A) - \nu(A) ,   \ [D, A]\  \leq 1.$               |
| Géométrie riemannienne $(X, ds^2)$                                 | Géométrie spectrale $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$                              |
| Invariants de courbure   | Expansion asymptotique de l'action spectrale                                     |
| Théorie de jauge   | Fluctuations intérieures de la métrique  |

TABLE 1 – Le dictionnaire « spectral »

avez une variable discrète alors l'ensemble original  $X$  avec lequel vous travaillez doit être dénombrable, et alors cela implique qu'il n'autorise pas les variables continues.

La réponse surprenante que les mathématiques fournissent, mais qui n'aurait pas été détectée s'il n'y avait pas eu la formalisation de la mécanique quantique par von Neumann, est qu'une variable réelle est juste un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert. C'est un fait qu'il n'y a qu'un seul espace de Hilbert (séparable) de base dénombrable et on voit que cet espace de Hilbert a des variables à spectre discret. En effet, prenez une description de l'espace de Hilbert en donnant une base orthogonale dénombrable et prenez un opérateur qui est diagonal dans cette base. Cet opérateur a un spectre dénombrable mais il coexiste avec des opérateurs qui ont un spectre continu. En fait, on aurait pu décrire ce même espace de Hilbert comme étant l'espace des fonctions de carré intégrable sur cet intervalle et bien sûr, on aurait là des variables continues, données par les opérateurs de multiplication. La beauté de ce formalisme est que *les variables continues et discrètes y coexistent effectivement*. Toutes les propriétés des variables réelles sont là parce qu'on a un opérateur auto-adjoint, il a un spectre qui est composé des valeurs possibles de la variable et il a une multiplicité spectrale qui est le nombre de fois qu'une valeur peut être atteinte.

Tout ceci s'accorde très bien à la réalité au sens où les variables quantiques sont les opérateurs dans l'espace de Hilbert; le fait nouveau est que les variables discrètes ne commutent pas avec les variables continues. Si elles commutaient, ce seraient des fonctions définies sur le même espace  $X$ , ce qui n'est pas possible.

Pour résumer, les variables discrètes et les variables continues coexistent comme opérateurs de l'espace de Hilbert, mais en tant que telles, nécessairement, elles *ne commutent pas*. C'est pré-

cisément ce défaut de commutativité qui est le nouvel ingrédient au cœur du calcul quantifié et qui rend le paradigme de la géométrie très efficace.

## 4 Le paradigme spectral de la géométrie, l'élément de longueur

Ce qui est arrivé dans le processus qui a amené à comprendre l'émergence de la géométrie à partir du quantique est assez instructif. Quand Heisenberg a trouvé ses relations de commutation dans lesquelles interviennent  $P$  et  $Q$  (le moment et la position), il y avait déjà un soupçon, un morceau de réalité là-dedans, au sens où lorsque vous prenez le spectre, soit de  $P$  soit de  $Q$ , vous trouvez la droite réelle. L'autre opérateur est un opérateur de différentiation et il donne la structure géométrique pour cette droite. Pourtant, la manière dont les choses ont évolué à partir de ces relations de commutation est qu'elles ont été interprétées non pas comme un premier soupçon d'une « géométrie à partir des opérateurs de l'espace de Hilbert » mais plutôt en termes de représentations de groupes de Lie. Bien sûr, les représentations de groupes, quand on les applique au *e.g.* groupe de Poincaré, donnent une belle notion théorique pour la particule et la théorie a révélé de grandes parties d'un merveilleux paysage. Pourtant, les groupes de Lie de dimension finie peuvent difficilement nous amener aux géométries arbitraires que nous observons dans la gravité et aux variables qu'on a dans la gravité. Les groupes de Lie simples sont comme des diamants isolés mais qui simplement ne permettent pas cette énorme variabilité nécessitée dans la description géométrique de la gravité.

Le développement de la géométrie non-commutative a montré qu'il est possible d'avoir une géométrie qui émerge de considérations provenant purement de l'espace de Hilbert mais pour faire cela, on applique la théorie de la représentation à des formes beaucoup plus élaborées des relations de commutation de Heisenberg impliquant  $P$  et  $Q$ . Pour obtenir ces relations, on a besoin de revenir en arrière d'une étape et de comprendre comment donner davantage de flexibilité à la fois à  $P$  et à  $Q$ . La flexibilité supplémentaire pour  $Q$  a été difficile à obtenir et il en est discuté dans la Section 5 ci-après. La flexibilité supplémentaire pour  $P$  n'a pas été si difficile à trouver. En fait, elle avait déjà été trouvée par Paul Dirac dans [31] quand il a réalisé comment assembler différents moments ensemble pour former une expression unique, un opérateur unique, qui contient effectivement en lui-même toutes les composantes des moments. C'est l'opérateur de Dirac, exprimé en termes de matrices gamma. Donc la compréhension du moyen de donner davantage de flexibilité à  $P$  provient du travail de Dirac et, plus encore, cette compréhension est profondément enracinée dans la physique et, dans la compréhension de la géométrie, en particulier dans la mesure des longueurs, comme nous allons l'expliquer maintenant.

De nombreux formalismes de géométrie commencent avec le paradigme riemannien comme prérequis, c'est-à-dire l'idée que la géométrie est donnée par la mesure de longueur et que cette mesure des longueurs est décidée localement simplement en stipulant le carré de l'élément de longueur  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ . Il s'avère que cette idée a même été questionnée par Riemann lui-même!

Il a écrit dans sa leçon inaugurale sur les fondements de la géométrie qu'on peut se demander si la texture de l'espace (ou de l'espace-temps) obéira au « paradigme de Riemann » à toute



échelle, la raison étant que les notions de rayon de lumière et de corps solide sur lesquelles son intuition s'appuyait cesseraient d'avoir du sens à des échelles très petites.

À la fin du 18<sup>ème</sup> siècle, le désir d'unifier la mesure des distances a amené à la mise au point concrète de l'unité de longueur qui a été appelée « mètre étalon » et qui était conservée près de Paris sous la forme d'une barre de platine. Plus tard, la pertinence de ce choix fut remise en question au début des années 1920 parce que des gens découvrirent que le mètre étalon changeait de longueur, ce qui bien sûr était très problématique. Ils découvrirent cela en comparant la longueur du mètre étalon à la longueur d'onde de la transition atomique fixe du Krypton. Le résultat de cette observation, de nombreuses années après, a été que des physiciens ont déplacé la définition de l'unité de longueur de la barre de platine à la longueur d'onde d'une certaine transition du Krypton et plus tard, finalement, à une transition hyperfine du Caesium.

Si vous pensez plus profondément à cela, vous trouvez que la raison pour laquelle leur unité de longueur classique devait être localisée était d'abord qu'elle devait être assez petite, puisqu'elle est supposée représenter  $ds$ , et d'autre part parce qu'elle commute avec les coordonnées, elle doit être localisée quelque part (lorsqu'on l'a fait, c'était près de Paris). Pourtant l'unité de longueur qui est donnée par la longueur d'onde de la transition hyperfinie du Caesium<sup>1</sup> est en fait de nature spectrale et ne commute plus avec les coordonnées.

En réalité, dans la droite ligne de la discussion ci-dessus, elle fait intervenir l'opérateur de Dirac, ou, plutôt, son inverse, le propagateur de Dirac. Évidemment, parce qu'il ne commute pas avec les coordonnées, il n'a pas besoin d'être localisé. De plus, si on veut unifier le système métrique dans notre galaxie, il est clair qu'une telle définition spectrale devrait être utilisée comme unité de longueur. En effet, il est plus pratique de dire à des gens d'étoiles éloignées que notre unité de longueur est une certaine transition du spectre de l'hélium ou de l'hydrogène plutôt que de leur dire qu'ils doivent venir à Paris et comparer leur unité avec une barre de métal qui se trouve là.

Outre le point de vue physique que c'est une bien meilleure définition de l'unité de longueur, mathématiquement parlant, cela implique que l'on remplace effectivement le  $ds^2$  de la géométrie riemannienne par une racine carrée très subtile, qui consiste à prendre la racine carrée à travers une algèbre de Clifford et où l'élément infinitésimal de longueur qui était formulé en terme des variables infinitésimales par Riemann est remplacé par un infinitésimal qui est un opérateur adéquat dans l'espace de Hilbert (voir la Table<sup>1</sup>).

Notons que cette notion d'infinitésimal a été en fait prédite par Newton au sens où il disait explicitement qu'un infinitésimal ne devrait pas être un nombre mais plutôt une variable! En fait, Newton a donné la définition d'une variable infinitésimale et, quand vous la traduisez dans la représentation des variables en utilisant des opérateurs de l'espace de Hilbert, cela donne précisément ce qu'on appelle un opérateur compact. Ces opérateurs compacts ont exactement toutes les propriétés dont vous pouvez rêver pour les infinitésimaux, ils forment un idéal parmi les opérateurs, etc., etc...

---

1. On l'appelle unité de temps en utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion.

Maintenant, quand vous pensez à l'élément de longueur pour l'espace-temps, vous trouvez que la formulation mathématique de l'inverse de l'opérateur de Dirac, dans le langage de la physique, est codé par ce que l'on appelle habituellement le propagateur de fermions. Ce propagateur de fermions intervient dans les graphes de Feynman comme les jambes internes faisant intervenir des fermions. Quand vous regardez la théorie des champs quantiques dans des livres à la Feynman, vous trouvez que ce propagateur est un tout petit segment rejoignant deux événements très proches :

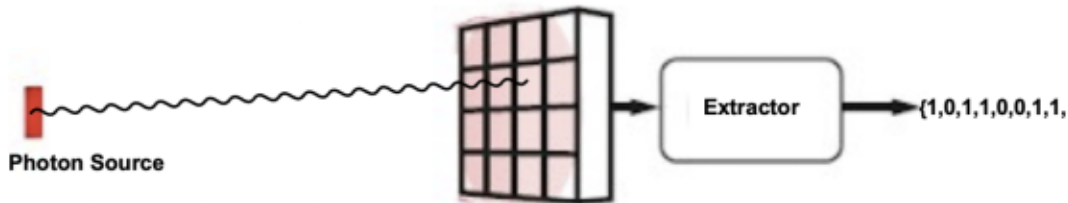


Figure 2 : Générateur quantique de nombres aléatoires

Cette apparence qualitative d'un élément de longueur infinitésimal devient même plus frappante quand on réalise qu'en théorie quantique des champs, l'élément de longueur acquiert vraiment des corrections quantiques quand on l'habille. Cela signifie que si vous prenez dès le début la version correcte de l'élément de longueur pour la géométrie, vous comprendrez bientôt qu'il y a des corrections quantiques aux mesures des longueurs, à la géométrie, qui sont données par l'habillage du propagateur de fermion. De plus, les champs de jauge apparaissent comme termes additionnels dans l'opérateur de Dirac et ils incarnent exactement l'intuition de Riemann qu'au cas où son paradigme échouerait à des petites échelles, la géométrie serait basée sur les forces qui tiennent les choses ensemble!

## 5 Le paradigme spectral de la géométrie, l'algèbre

Le nouveau paradigme de la géométrie est codé par des *triplets spectraux*  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  où l'opérateur non borné  $D$  code l'analogue de l'opérateur de Dirac comme décrit dans la Section 4 et où  $\mathcal{A}$  est une algèbre d'opérateurs dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . L'algèbre  $\mathcal{A}$  n'est pas supposée être commutative et ses automorphismes intérieurs (comme expliqué en Section 2) correspondront aux symétries internes en physique. À cause de sa flexibilité, ce nouveau paradigme fournit l'outil nécessaire pour raffiner notre compréhension de la structure de l'espace physique aux petites échelles, et pour « *rechercher les fondements de ses relations métriques à l'extérieur de lui, en reliant les forces qui agissent sur lui* ». L'idée principale, décrite en détails dans [28], est que l'élément de longueur incarne maintenant non seulement la force de la gravité mais toutes les forces connues, la force électro-faible et la force électro-forte, apparaissent à partir de l'action spectrale et des fluctuations intérieures de la métrique. Cela fournit une perspective complètement nouvelle sur l'interprétation géométrique de la structure détaillée du modèle standard et du mécanisme de Brout-Englert-Higgs. On obtient la simple image mentale suivante pour l'apparence du champ scalaire : imaginez que l'espace considéré a deux côtés, comme une feuille de papier à deux dimensions  $S$ . Alors quand on différentie une fonction sur un tel espace, on peut contraindre la



fonction à l'un ou l'autre côté  $S_{\pm}$  de la feuille et obtenir ainsi deux champs de spin un. Mais on peut aussi prendre la différence finie  $f(s_+) - f(s_-)$  de la fonction aux points reliés des deux côtés. Le champ correspondant est clairement insensible aux rotations locales et est un champ scalaire de spin zéro. Ceci, dans une coquille de noix, est la manière dont le champ de Brout-Englert-Higgs apparaît géométriquement une fois qu'on accepte qu'il y a une « structure fine » qui est révélée par la structure détaillée du modèle standard de la matière et des forces. Finalement, cela permet de retrouver le sens géométrique du lagrangien de la gravité couplé au modèle standard. Ce lagrangien extrêmement compliqué est obtenu à partir de l'action spectrale développée en [1] qui est le seul invariant spectral additionnel naturel de la géométrie non-commutative.

Pour satisfaire la contrainte de Riemann que l'inverse de l'élément de longueur  $D$  incarne les forces de la nature, il est évidemment important que nous ne séparions pas artificiellement la partie gravitationnelle de la partie jauge, et que  $D$  englobe les deux forces d'une manière unifiée. Dans la géométrisation traditionnelle de la physique, la partie gravitationnelle spécifie la métrique alors que la partie jauge correspond à la connexion sur un fibré principal. Dans le paradigme géométrique non-commutatif,  $D$  décrit les deux forces d'une manière unifiée et les bosons de jauge apparaissent comme des fluctuations intérieures de la métrique mais ils forment une partie inséparable de cette dernière. Le point-clef est que les champs de jauge *non abéliens* surgissent inévitablement comme un résultat de la non-commutativité de notre paradigme géométrique.

La géométrie non-commutative dictée par la physique est alors donnée par le produit du continu ordinaire 4-dimensionnel par une géométrie non-commutative finie  $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F)$  qui apparaît naturellement à partir de la classification des géométries de  $KO$ -dimension finie égale à 6 modulo 8 (cf. [5,3]). L'algèbre de dimension finie  $\mathcal{A}_F$  qui est apparue est de la forme

$$\mathcal{A}_F = C_+ \oplus C_-; \quad C_+ = M_2(\mathbb{H}), \quad C_- = M_4(\mathbb{C}).$$

L'accord du formalisme mathématique de la géométrie spectrale et de toutes les subtilités telles que la périodicité de période 8 de la  $KO$ -theory, est prometteuse mais elle pourrait encore s'avérer accidentelle. Plutôt, ce qui est plus convaincant, c'est la pertinence de cette approche quand on retrouve [3] le mécanisme see-saw (qui était dicté par le calcul purement mathématique du modèle), en ignorant à ce moment son rôle-clef en physique pour fournir des masses très petites aux neutrinos, et qu'on sait la manière dont il est « ajouté à la main » dans le modèle standard. La masse faible pour le Higgs qui a été trouvée en 2012 mettait le modèle en défaut, mais dans [10] nous avons montré la compatibilité du modèle avec la valeur mesurée de la masse du Higgs, du fait du rôle dans la renormalisation du champ scalaire qui était déjà présent dans [7] mais que nous avons ignoré car nous pensions qu'il n'affecterait pas le processus d'auto-couplage du Higgs.

Dans tous les développements précédents, nous avons suivi une approche « bottom-up », *i.e.* nous découvrons les détails de la géométrie non-commutative finie  $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F)$  à partir des informations expérimentales contenues dans le modèle standard couplé à la gravitation. En 2014, en collaboration avec S. Mukhanov [15,14], nous avons étudié le problème purement géométrique de coder les 4-variétés de la manière la plus économique possible dans le

formalisme spectral. Le problème n'avait pas de lien a priori avec le modèle standard des particules et les forces et l'idée était de traiter les coordonnées de la même manière que les moments sont assemblés dans un seul opérateur en utilisant des matrices gamma. La grande surprise a été que cette étude a fourni l'explication conceptuelle de la géométrie non-commutative finie à partir des algèbres de Clifford! Ceci est décrit en détails dans [28] à quoi nous faisons référence. Ce que nous avons obtenu est une forme plus élevée des relations de commutation de Heisenberg entre  $P$  et  $Q$ , dont les représentations irréductibles dans l'espace de Hilbert correspondent aux géométries de spin 4-dimensionnelles. Le rôle de  $P$  est joué par l'opérateur de Dirac comme expliqué précédemment, et le rôle de  $Q$  par le slash de Feynman des coordonnées en utilisant des algèbres de Clifford. La preuve que toutes les géométries de spin sont obtenues s'appuie sur des résultats profonds de la théorie de l'immersion et des recouvrements ramifiés de la sphère. Le volume de la géométrie 4-dimensionnelle est automatiquement quantifié par le théorème de l'indice et le modèle spectral, en prenant en compte les automorphismes intérieurs dus à la nature non-commutative des algèbres de Clifford, donne la gravité d'Einstein couplée avec une légère extension du modèle standard, le modèle de Pati-Salam. Ce modèle s'est avéré dans [11,13] permettre d'unifier les constantes de couplage. Nous renvoyons à l'article [17] pour un compte-rendu concis de toute l'histoire de l'évolution de cette théorie de ses débuts à aujourd'hui.

| Modèle standard                             | Modèle spectral                                 |
|---|---|
| Boson de Higgs                              | Métrique intérieure <sup>(0,1)</sup>            |
| Bosons de jauge                             | Métrique intérieure <sup>(1,0)</sup>            |
| Masses des fermions $u, \nu$                | Dirac <sup>(0,1)</sup> dans $\uparrow$          |
| Matrice CKM, Masses down                    | Dirac <sup>(0,1)</sup> dans $(\downarrow 3)$    |
| Mélange des leptons, Masses des leptons $e$ | Dirac <sup>(0,1)</sup> dans $(\downarrow 1)$    |
| Matrice de masse de Majorana                | Dirac <sup>(0,1)</sup> sur $E_R \oplus J_F E_R$ |
| Couplages de jauge                          | Fixé à l'unification                            |
| Paramètre d'éparpillement de Higgs          | Fixé à l'unification                            |
| Constante de Tadpole                        | $-\mu_0^2  \mathbf{H} ^2$                       |

TABLE 2 – Le dictionnaire entre la terminologie de la physique et la géométrie de structure fine

## 6 Dimension 4

L'approche ci-dessus de la géométrie de l'espace-temps n'était pas directement motivée par la gravité quantique mais elle adresse une question préliminaire plus basique qui est de comprendre la raison pour laquelle la gravité et le modèle standard ensemble représentent l'ensemble des forces de la nature. Nous avons vu dans la Section 5 que tant qu'on autorise le codage de l'algèbre de coordonnées en utilisant un montant minimum de non-commutativité, la gravité couplée avec le modèle standard apparaît naturellement avec les théories de jauge non-abéliennes comme témoins du codage non-commutatif. Nous discutons maintenant brièvement du fait que la dimension 4 est distinguée dans cette approche. Comme expliqué plus haut, l'extension de la géométrie riemannienne au-delà de son domaine classique, dans la théorie des

espaces d'opérateurs fournit la flexibilité nécessaire pour répondre à la question de Riemann dans sa leçon inaugurale. Du point de vue mathématique, c'est la notion de variété qui est au centre, et quand on veut capturer les propriétés-clefs qu'ont les variétés à un niveau global (non local), on trouve que la principale d'entre elle est la dualité de Poincaré. Mais ça n'est pas la dualité de Poincaré dans l'homologie ordinaire, mais plutôt dans une théorie plus raffinée appelée  $KO$ -homologie. Une interaction remarquable avec le formalisme quantique apparaît alors à partir de la confluence entre la compréhension abstraite de la notion de variété à partir de sa classe fondamentale en  $KO$ -homologie avec la réalisation des cycles en  $KO$ -homologie à partir des représentations dans l'espace de Hilbert. La touche finale sur la compréhension de la raison géométrique qui se cache derrière la gravité couplée avec le modèle standard vient de la quantification simultanée de la classe fondamentale de  $KO$ -homologie et de son dual en  $KO$ -théorie qui donne naissance à la relation de Heisenberg d'un niveau plus élevé. Nous expliquons maintenant avec davantage de détails la raison pour laquelle la dimension 4 joue un rôle particulier dans ce contexte [15,14].

Pour coder une variété  $M$  de dimension  $d$  en utilisant la dualité ci-dessus entre la  $KO$ -homologie et la  $KO$ -théorie, on a besoin de construire une paire d'applications  $\phi, \psi$  de  $M$  vers la sphère (de la même dimension  $d$ ) de telle façon que la somme des pullbacks de la forme (sphérique) du volume de la sphère ne s'évanouisse nulle par sur  $M$ . Ce problème est facile à résoudre en dimension 2 et 3 parce qu'on écrit d'abord  $M$  comme une couverture ramifiée  $\phi : M \rightarrow S^d$  de la sphère et qu'on pré-compose  $\phi$  avec un difféomorphisme  $f$  de  $M$  tel que  $\Sigma \cap f(\Sigma) = \emptyset$  où  $\Sigma$  est le sous-ensemble dans lequel  $\phi$  est ramifié. Le sous-ensemble est de codimension 2 dans  $M$  et il n'y a pas de difficulté à trouver  $f$  parce que  $(d-2) + (d-2) < d$  pour  $d < 4$ . Il est à noter que le 2 pour la codimension de  $\Sigma$  est facile à comprendre à partir de l'analyse complexe : pour une application arbitraire continue  $\phi : M \rightarrow S^d$ , le jacobien s'évanouira sur un sous-ensemble de codimension 1, mais en analyse complexe en dimension 1, le jacobien est une somme de carrés et son évanouissement signifie l'évanouissement de la dérivée qui donne deux conditions plutôt qu'une. Ainsi, **la dimension  $d = 4$  est la dimension critique** pour le problème d'existence ci-dessus de la paire  $\phi, \psi$ . Une telle paire n'existe pas toujours<sup>2</sup> mais, comme cela est montré dans [15, 14], elle existe toujours pour les variétés de spin ce qui est le cas correspondant pour l'intégrale fonctionnelle calculée dans la signature euclidienne.

La forme d'un niveau plus élevé de la relation de commutation d'Heisenberg mentionnée ci-dessus fait intervenir en dimension  $d$  la puissance  $d$  du commutateur  $[D, Z]$  de l'opérateur de Dirac avec l'opérateur  $Z$  qui est construit (en utilisant la structure réelle  $J$ , voir [28]) à partir des coordonnées. Nous expliquerons maintenant brièvement comment cela s'adapte parfaitement avec le formalisme de D. Sullivan sur les variétés de Sobolev, *i.e.* des variétés de dimension  $d$  où le pseudo-groupe sous-tendant la carte préserve les fonctions continues avec une dérivée dans  $L^d$ . Il a découvert le rôle particulièrement intrigant de la dimension 4 à cet égard. Il a montré dans [37] que les variétés topologiques pour des dimensions  $> 5$  admettent des coordonnées bi-Lipschitziennes et qu'elles sont uniques à petites perturbations près, de plus l'existence et l'unicité sont aussi vérifiées pour les structures de Sobolev : une dérivée dans  $L^d$ .

---

2. Elle n'existe pas pour  $M = P_2(\mathbb{C})$ .



Un résultat plus fort était connu classiquement pour les dimensions 1, 2 et 3. Là, la topologie contrôle la structure de continuité à petite déformation près. En dimension 4, D. Sullivan a démontré avec S. Donaldson dans [32] que pour les variétés avec coordonnées dans des cartes reliées par le pseudo-groupe préservant les fonctions continues avec une dérivée dans  $L^4$ , il est possible de développer une théorie de jauge  $SU(2)$  et les célèbres invariants de Donaldson. Ainsi, en dimension 4, les variétés de Sobolev se comportent comme les variétés continues par opposition aux variétés topologiques abondantes de Freedman<sup>3</sup>. La question évidente alors est de savoir dans quelle mesure l'équation de niveau plus élevé de Heisenberg de [15,14] distingue les variétés de Sobolev comme les variétés pertinentes pour l'intégrale fonctionnelle faisant intervenir l'action spectrale.

## 7 Le niveau de la seconde quantification

La dernière section est plus spéculative et au contraire des sections précédentes, elle adresse une question fondamentale qui est essentiellement ouverte. Cette question peut être formulée comme suit

*Quelle est la pertinence du lien entre le formalisme à plusieurs particules de la théorie quantique des champs et la géométrie de l'espace-temps ?*

En fait, nous avons déjà vu un soupçon d'une réponse dans la Section 4 où nous avons remarqué que puisque l'élément de longueur codé par le propagateur de Dirac est habillé (comme une série de puissances formelles des puissances de  $\hbar$ ) à partir des corrections de la théorie des champs, cela suggérerait que la géométrie elle-même, en étant englobée par le propagateur de Dirac obtient son habillage.

Mais le formalisme ci-dessus reste au niveau de la première quantification et le problème de la seconde quantification ne peut être ignoré puisque les corrections quantiques de l'élément de longueur, comme expliqué dans la Section 4 ci-dessus sont seulement la partie émergée de l'iceberg. En effet, l'habillage advient pour toutes les fonctions de  $n$ -points pour les fermions, et non seulement pour les fonctions de deux points.

Un autre soupçon significatif pour le rôle de la seconde quantification est le résultat de [16] sur la seconde quantification des fermions et l'action spectrale comme une entropie. Le point là est que le principe d'action qui retrouve la gravité couplée au modèle standard est donné par la fonctionnelle additive la plus générale des géométries spectrales et que celles-ci dépendent d'une fonction paire  $f$  arbitraire donnée a priori d'une variable réelle qui définit l'action comme une trace de  $f(D)$ . Ce que nous avons montré en [16], comme une première étape vers la construction à partir de la théorie quantique des champs d'une version *quantifiée au second niveau* de la géométrie spectrale, est que si on applique une quantification fonctorielle libre aux fermions comme celle des algèbres de Clifford et si on utilise l'opérateur de Dirac pour définir une évolution temporelle sur l'algèbre de Clifford, on découvre que l'entropie de von Neumann des états d'équilibre de Boltzmann-Gibbs (voir la Section 2) est l'action spectrale pour une fonction  $f$  intimement reliée à la fonction zeta de Riemann. Cela nous a amenés aux premières lignes d'un

---

3. pour lesquelles tout module de continuité quel qu'il soit n'est pas connu.

dictionnaire allant de la première à la seconde quantification comme celui donné dans la Table 3. Notons également qu'un résultat analogue à [16] a été obtenu dans [33] pour le cas du boson.

| Première-quantification | Seconde-quantification  |
|-------------------------|---|
| Algèbre                 | Action des fluctuations intérieures sur l'évolution temporelle            |
| Espace de Hilbert       | Algèbre de Clifford   |
| Opérateur de Dirac      | Évolution temporelle pour les états $KMS_\beta$ sur l'algèbre de Clifford |
| Action spectrale        | Entropie des états $KMS_\beta$  |

TABLE 3 – Le dictionnaire pour la seconde quantification fermionique des triplets spectraux

D'un point de vue purement mathématique, ce besoin de passer au niveau supérieur d'une seconde quantification de géométrie est en quelque sorte similaire à ce qui se passe dans le développement de la  $K$ -théorie. La  $K$ -théorie topologique, telle qu'elle a été développée par Atiyah-Hirzebruch, basée sur la périodicité de Bott amène à la dualité-clef entre la  $KO$ -homologie et la  $KO$ -théorie et est à l'origine des relations plus élevées de Heisenberg. Comme cela a déjà été dit dans [26], la  $K$ -théorie algébrique, qui est une vaste spécialisation de la  $K$ -théorie topologique, est en train de mendier le développement d'une théorie duale et on devrait s'attendre à ce qu'il y ait des relations profondes entre cette théorie duale et la théorie des quanta intèragissant de la géométrie. Comme point de départ concret, notons que les résultats les plus profonds sur la topologie des groupes de difféomorphismes des variétés sont fournis par la  $K$ -théorie algébrique des espaces de Waldhausen et nous nous référons à [34] pour une image unifiée de la  $K$ -théorie algébrique.

Finalement, la compréhension conceptuelle de la renormalisation a montré (voir [30]) qu'il y a un groupe de symétrie très non-commutatif, le *Groupe de Galois cosmique*, qui incarne dans le processus de renormalisation les ambiguïtés inhérentes aux calculs des interactions physiques de la théorie quantique des champs. Comment ce groupe de symétrie se combine avec l'impact vu ci-dessus de la physique sur la géométrie, et comment la renormalisation s'adapte au principe d'action spectrale sont des questions ouvertes profondes dont seules les premières étapes de la résolution ont été récemment franchies [35,36]. Ces sont les témoins du rôle surprenant de la non-commutativité en physique.

## Références

- [1] A. Chamseddine, A. Connes, *The Spectral action principle*, Comm. Math. Phys. Vol.186 (1997), 731–750.
- [2] A. Chamseddine, A. Connes, *Inner fluctuations of the spectral action*, J. Geom. Phys. 57 (2006), N.1, 1–21.
- [3] A. Chamseddine, A. Connes, M. Marcolli, *Gravity and the standard model with neutrino mixing*, Adv. Theo. Math. Phys. 11 (2007) 991-1089.

- [4] A. Chamseddine, A. Connes, *Quantum gravity boundary terms from the spectral action of noncommutative space*. Phys. Rev. Lett. 99 (2007), no. 7, 071302, 4 pp.
- [5] A. Chamseddine, A. Connes, *Why the Standard Model?*, J. Geom. Phys. 58 (2008), no. 1, 38-47.
- [6] A. Chamseddine, A. Connes, *The uncanny precision of the spectral action*. Comm. Math. Phys. 293 (2010), no. 3, 867–897.
- [7] A. Chamseddine and A. Connes, *Noncommutative Geometry as a framework for unification of all fundamental interactions including gravity*. Fortsch. Phys. 58 (2010) 553.
- [8] A. Chamseddine, A. Connes, *Noncommutative geometric spaces with boundary : spectral action*. J. Geom. Phys. 61 (2011), no. 1, 317–332.
- [9] A. Chamseddine, A. Connes, *Spectral action for Robertson-Walker metrics*. J. High Energy Phys. 2012, no. 10, 101.
- [10] A. Chamseddine and A. Connes, *Resilience of the Spectral Standard Model*, JHEP, 1209 (2012) 104.
- [11] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Beyond the Spectral Standard Model : Emergence of Pati-Salam Unification*. JHEP 11 (2013) 132.
- [12] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Inner Fluctuations in Noncommutative Geometry without the First Order Condition*. Jour. Geom. Phys. 73 (2013) 222.
- [13] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Grand Unification in the Spectral Pati-Salam models*. JHEP 2511 (2015) 011.
- [14] A. Chamseddine, A. Connes and V. Mukhanov, *Geometry and the Quantum : Basics*, JHEP 12 (2014) 098.
- [15] A. Chamseddine, A. Connes and V. Mukhanov, *Quanta of Geometry : Noncommutative Aspects*, Phys. Rev. Lett. 114 (2015).
- [16] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Entropy and the spectral action*. arXiv : 1809.02944.
- [17] A. Chamseddine, W. D. van Suijlekom, *A survey of spectral models of gravity coupled to matter*. Advances in Noncommutative Geometry, Springer, (2019).
- [18] A. Connes. *Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann*. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 273 1971 A900–A903.
- [19] A. Connes. *Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki*. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 274 (1972), A175–A177.
- [20] A. Connes, *Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 274 (1972), 1923–1926.
- [21] A. Connes. *Une classification des facteurs de type III*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 275 (1972), A523–A525.
- [22] A. Connes. *Une classification des facteurs de type III*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 133-252.
- [23] A. Connes. *The von Neumann algebra of a foliation*. Mathematical problems in theoretical physics, pp. 145-151, Lecture Notes in Phys., 80, Springer, Berlin, 1978.



- [24] A. Connes. *Sur la théorie non commutative de l'intégration*. Algèbres d'opérateurs, pp. 19-143, Lecture Notes in Math., 725, Springer, Berlin, 1979.
- [25] A. Connes, *C\*-algèbres et géométrie différentielle*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **290** (1980), A599-A604.
- [26] A. Connes, *Leçon inaugurale*, Collège de France, 1985.
- [27] A. Connes, A. van Daele, *The group property of the invariant S of von Neumann algebras*. Math. Scand. 32 (1973), 187–192 (1974).
- [28] A. Connes, M. Karoubi. *Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm* K-Theory 2 (1988) 431–463.
- [29] A. Connes and M. Takesaki. *The flow of weights on factors of type III*. Tôhoku Math. J. **29** (1977), 473-575.
- [30] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.
- [31] P. A. M. Dirac. Quantum theory of emission and absorption of radiation. *Proc. Roy. Soc. Lond.* A114 (1927) 243.
- [32] S. Donaldson, D. Sullivan, *Quasiconformal 4-manifolds*. Acta Math. Volume 163 (1989), 181-252.
- [33] R. Dong, M. Khalkhali, W. D. van Suijlekom, *Second quantization and the spectral action*. J. Geom. Phys. 167 (2021) 104285.
- [34] B. I. Dundas, T. G. Goodwillie, R. McCarthy, *The local structure of algebraic K-theory*. Algebra and Applications, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.
- [35] T. van Nuland, W. D. van Suijlekom, *Cyclic cocycles in the spectral action* J. Noncommut. Geom. (2021) [arXiv :2104.09899].
- [36] T. van Nuland, W. D. van Suijlekom, *One-loop corrections to the spectral action* To appear in JHEP [arXiv :2107.08485].
- [37] D. Sullivan, *Hyperbolic geometry and homeomorphisms*. Geometric Topology Conference, Athens, Georgia, 1977, Academic Press, New York, 1979, pp. 543–555.
- [38] M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III*, Acta Math. Vol.131 (1973), 249–310.
- [39] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*. Lecture Notes in Math., 128, Springer, 1970.