Traduction de la partie 4 de l'article de Connes-Consani paru sur arxiv en juillet 2022 (Denise Vella-Chemla, juillet 2022)

4. Le laplacien $\Delta = H(1+H)$

Cette section décrit l'interprétation spectrale des carrés des zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann en fonction d'un laplacien adéquat. Elle montre aussi la relation entre le laplacien et l'opérateur d'onde prolate.

4.1. Conditions d'évanescence

On commence avec la séquence exacte

$$0 \to \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_1 \to \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}(1) \to 0$$

associée au noyau de la fonctionnelle linéaire $\mathbb{Q}^\times$-invariante $\epsilon(f) = \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(x)dx \in \mathbb{C}(1)$. En implémentant dans la séquence ci-dessus l'évaluation $\delta_0(f) := f(0)$, on obtient la séquence exacte

$$0 \to \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_0 \to \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{(\delta_0,\epsilon)} \mathbb{C}(0) \oplus \mathbb{C}(1) \to 0.$$

Le prochain lemme montre qu'à la fois $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_0$ et $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_1$ ont une description en fonction des domaines des deux opérateurs différentiels. Pour la simplicité de l'exposé, on restreint notre discussion aux parties $\hat{\mathbb{Z}}^\times$-invariantes des espaces de fonctions.

Lemme 4.1. *Soit $H : \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, $H := x\partial_x$ le générateur de l'action de mise à l'échelle de $1 \times \mathbb{R}_+^* \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors on a*

(i) *H commute avec l'action de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et se restreint à $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\hat{\mathbb{Z}}^\times}$.*

(ii) *$(1+H)$ induit un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$.*

(iii) *$H(1+H)$ induit un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\mathrm{ev}}$.*

Preuve. (i) découle du fait que $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ est abélien, ainsi H commute avec l'action de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.
(ii) La fonctionnelle $f \mapsto \epsilon(f) = \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(x)dx$ s'évanouit dans le domaine de $1+H$ puisque

$$\epsilon((1+H)f) = \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \partial(xf)dx = 0,$$

ainsi le domaine de $(1+H)$ est contenu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$. L'équation $Hf + f = 0$ implique que $xf(x)$ est constante, puisque $f = 0$, car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc $(1+H) : \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$ est injective. Soit maintenant $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$ et soit $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier. Alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}}$ et $\widehat{f}(0) = 0$. La fonction $g(x) := \widehat{f}(x)/x$, $g(0) := 0$ est continue, et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$, alors que la fonction

$$h(x) := \int_{-\infty}^{x} g(y)dy$$

vérifie $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}}$ et $\partial_x h = g$. On a $Hh = \widehat{f}$, donc $(-1-H)\widehat{h} = f$. Cela montre que $(1+H) : \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$ est également surjective.

(iii) Puisque l'évaluation $f \mapsto f(0)$ est invariante par mise à l'échelle, elle s'évanouit dans le domaine de H. De façon similaire, on voit que la fonctionnelle $f \mapsto \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(x)dx$ s'évanouit dans le domaine de $1+H$. Ainsi le domaine de $H(1+H)$ est contenu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0$. L'équation $Hf = 0$ implique que la fonction f est constante et par conséquent que $f = 0$, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De façon similaire, $Hf + f = 0$ implique que $xf(x)$ est constante et par conséquent $f = 0$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc $H(1+H) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})_0$ est injective. Soit maintenant $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ avec $f(0) = 0$. Alors la fonction $g(x) := f(x)/x$, $g(0) := 0$, est continue, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{odd}}$ et il existe une unique $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ telle que $\partial_x h = g$. On a $Hh = f$ de telle façon que $(-1-H)\widehat{h} = \widehat{f}$. Donc si $\widehat{f}(0) = 0$ on a $\widehat{h}(0) = 0$ et il existe $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ avec $Hk = \widehat{h}$. Alors $-(1+H)\widehat{k} = h$ et $H(1+H)\widehat{k} = -f$. Cela montre que $H(1+H) : \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}} \to \mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\text{ev}}$ est surjective et est un isomorphisme. □

4.2. Le laplacien $\Delta = H(1+H)$ et son spectre

Cette section est basée sur le dictionnaire heuristique suivant suggérant un parallèle entre quelques notions classiques en théorie de Hodge du côté gauche, et leur contrepartie en géométrie non-commutative, pour l'espace des classes d'adèles des rationnels. Les notations sont celles de la Section 3.

Algèbre de fonctions	Produit croisé par $\mathbb{Q}^\times$
Formes différentielles	Homologie de Hochschild
Opérateur étoile $\star$	$\iota \times \mathbb{F}$
Différentielle d	Opérateur H
$\delta := \star d \star$	Opérateur $1+H$
Laplacien	$\Delta := H(1+H)$

La proposition suivante est une variante de la réalisation spectrale dans [1, 2].

Proposition 4.2. *Les faits suivants sont attestés*

(i) l'application trace Tr *commute avec* $\Delta = H(1+H)$ *et le domaine de* $\mathrm{Tr} \circ \Delta$ *est contenu dans l'espace de Schwartz fort* $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*) := \cap_{\beta \in \mathbb{R}} \mu^\beta \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$, *avec* μ *dénotant le module.*

(ii) le spectre de Δ *sur le quotient de* $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ *par la fermeture du domaine de* $\mathrm{Tr} \circ \Delta$ *est l'ensemble (compté avec de possibles multiplicités)*

$$\left\{ \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \mid z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ \zeta(z) = 0 \right\}.$$

Preuve. (i) L'application trace de (3.5)[1] commute avec Δ. Par le lemme 4.1 (iii) le domaine de Δ is $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\text{ev}}$ donc le domaine de $\mathcal{E} \circ (H(1+H))$ est contenu dans $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ (voir [2], Lemme 2.51).

[1] L'équation (3.5) de https://arxiv.org/pdf/2207.10419.pdf est :

$$\mathrm{Tr}(\tilde{f})(u) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\times} \tilde{f}(q\rho(x), 1) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\times} (1_{\widehat{\mathbb{Z}}} \otimes f)(q, qu) = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^\times} f(nu) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+^*$$

.

(ii) Par construction, $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'intersection, indexée par les intervalles compacts $J \subset \mathbb{R}$, des espaces $\cap_{\beta \in J}\, \mu^\beta \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$. La transformée de Fourier

$$\mathbb{F}(f)(z) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u) u^z d^* u$$

définit un isomorphisme entre ces espaces de fonctions et les espaces de Schwartz $\mathcal{S}(I)$, étiquetés par des bandes verticales $I := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \in J\}$, de fonctions holomorphes f dans I avec $p_{k,m}(f) < \infty$ pour tous $k, m \in \mathbb{N}$ où

$$p_{k,m}(f) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \sup_I (1 + |z|)^k \cdot |\partial^n f(z)| \,.$$

Ces normes définissent une topologie de Fréchet sur $\mathcal{S}(I)$.

Il découle alors du lemme 4.125 de [2] que, pour I suffisamment grand, le quotient de $\mathcal{S}(I)$ par la fermeture du domaine de $\mathrm{Tr} \circ \Delta$ se décompose en une somme directe d'espaces de dimension finie associés aux projections $\Pi(N)$, $N \in \mathbb{Z}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

1. Chaque $\Pi(N)$ est un idempotent.
2. La séquence des $\Pi(N)$ est à croissance tempérée.
3. Le rang de $\Pi(N)$ est $O(\log |N|)$ pour $|N| \to \infty$.
4. Pour tout $f \in \mathcal{S}(I)$ la séquence $f\,\Pi(N)$ est à décroissance rapide et

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}} f\,\Pi(N) = f \qquad \forall f \in \mathcal{S}(I)\,.$$

La décomposition en somme directe commute avec Δ puisqu'à la fois $\Pi(N)$ et le conjugué de Δ par la transformation de Fourier $\mathbb{F}$ sont donnés par des opérateurs de multiplication. Le conjugué de H par $\mathbb{F}$ est la multiplication par $-z$, de telle façon que le conjugué de Δ est la multiplication par $-z(1-z)$.
Le spectre de Δ est l'union des spectres des opérateurs de dimension finie $\Delta_N := \Pi(N)\Delta = \Delta\Pi(N)$. Par [2], corollaire 4.118, et la preuve du théorème 4.116, le domaine de dimension finie de $\Pi(N)$ est décrit par l'évaluation de $f \in \mathcal{S}(I)$ sur les zéros $\rho \in Z(N)$ de la fonction ζ de Riemann qui sont à l'intérieur du contour γ_N, *i.e.* par l'application

$$\mathcal{S}(I) \ni f \mapsto f|_{Z(N)} = (f^{(n_\rho)}(\rho))_{\rho \in Z(N)} \in \mathbb{C}^{(n_\rho)}$$

où $\mathbb{C}^{(n_\rho)}$ dénote l'espace de dimension n_ρ de jets d'ordre égal à l'ordre n_ρ du zéro ρ de la fonction ζ. De plus, l'action de Δ_N est donnée par la matrice associée à la multiplication de $f \in \mathcal{S}(I)$ par $-z(1-z)$: cela donne une matrice triangulaire dont la diagonale contient n_ρ termes tous égaux à $-\rho(1-\rho)$. Donc le spectre de Δ sur le quotient de $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ par la fermeture du domaine de $\mathrm{Tr} \circ \Delta$ est l'ensemble (compté avec des multiplicités)

$$\left\{ \left(\rho - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} \mid \rho \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ \zeta(\rho) = 0 \right\}.$$

$\square$

Corollaire 4.3. Le spectre de Δ sur le quotient de l'espace de Schwartz fort $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ par la fermeture du domaine de $\mathrm{Tr} \circ \Delta$ est négatif si et seulement si l'hypothèse de Riemann est vérifiée.

Preuve. Cela découle de la proposition 4.2 et du fait que pour $\rho \in \mathbb{C}$

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leqslant 0 \iff \rho \in [0,1] \cup \frac{1}{2} + i\mathbb{R}.$$

□

Remarque 4.4. L'intérêt principal de la reformulation ci-dessus de la réalisation spectrale de [1, 2] en fonction du laplacien Δ est que cette dernière formulation est intimement liée à l'opérateur d'onde prolate W_λ dont on a montré dans [3] qu'il est auto-adjoint, et qu'il a, pour $\lambda = \sqrt{2}$, le même spectre UV que la fonction ζ de Riemann. La relation entre Δ et W_λ est que ce dernier est une perturbation de Δ par un multiple de l'oscillateur harmonique.

Références

[1] A. Connes, C. Consani, M. Marcolli, *Weil's proof and the geometry of the adeles class space.* Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, 339–405, Progr. Math., 269, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2009.

[2] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.

[3] A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta.* Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 119, e2123174119 (2022).