La princesse de Polytopia : Alicia Boole-Stott et le 120-polytope

Tony Phillips
Université Stony Brook

Le premier article d'Alicia Boole-Stott, *Sur certaines séries de sections d'hypersolides réguliers quadri-dimensionnels*, publié en 1900, est la base de la chronique de ce mois-ci...

Fig. 1. Une reconstruction de sept des modèles d'Alicia Boole-Stott montrant des tranches tridimensionnelles du 120-polytope. Ces tranches vont du bas au milieu du polytope ; puis les six tranches se répétent dans l'ordre inverse.
(Photographie de Tony Scarlatos, Stony Brook.)

Une enfance paradoxale et un dada inhabituel

Alicia Boole (1860-1940) grandit dans les plus hautes sphères intellectuelles de l'Angleterre victorienne, et dans une profonde misère. Sa généalogie était excellente : l'algèbre booléenne et le mont Everest sont ainsi nommés, l'une à cause de son père George Boole et l'autre à cause de son oncle maternel, Sir George Everest. Mais Boole s'est marié tard et est mort jeune, laissant sa femme Mary avec cinq filles, l'aînée de huit ans, la plus jeune de six mois, et sans argent. Alicia, alors âgée de quatre ans, a été envoyée vivre chez des proches. Lorsqu'elle a rejoint à nouveau sa mère et ses sœurs, elles vivaient "dans un logement pauvre, sombre, sale et inconfortable à Marylebone" selon H.S.M. Coxeter, qui a collaboré avec elle bien plus tard et qui a contribué à une courte biographie d'Alicia Boole-Stott dans "Women of Mathematics".

À Londres, les filles, surtout les plus jeunes, recevaient peu ou ne recevaient pas d'éducation formelle. On dit qu'Alicia a appris les deux premiers livres d'Euclide, et rien de plus. Mais Mary Boole, qui correspondait avec Darwin et était amie avec H.G. Wells, recevait de nombreux visiteurs, invités qui pouvaient tenir la famille au courant des développements de la science et de la société (ou du moins ceux qui se situaient aux marges mystiques des deux : Coxeter les caractérise comme "un flux continu d'excentriques"). L'un des excentriques avait un fils nommé Howard Hinton, un polymathe brillant, qui a courtisé et épousé l'aînée des filles Boole. Hinton était fasciné par la géométrie en quatre dimensions. Il a apporté un système élaboré de cubes en bois qu'il avait conçu pour le rendre compréhensible, et a demandé aux jeunes sœurs de sa fiancée de travailler dessus. Alicia, alors âgée d'environ 18 ans, "a progressivement commencé à le surpasser dans sa capacité à comprendre ce qui se passe dans l'hyperespace" (Coxeter). Elle élabore par elle-même les six polytopes réguliers (les analogues 4D de nos polyèdres réguliers) et elle construit des modèles en carton de leurs sections par 3 plans parallèles.

Référence : http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-boole.
Traduction : Denise Vella-Chemla, assistée de Google translate, mars 2023.

Alicia construisait ses modèles juste avant que le livre "Flatland" d'Edwin A. Abbott ne paraisse (1880) et avant que W.I. Stringham ne publie *Figures régulières dans l'espace à n dimensions* dans l'American Journal of Mathematics (également en 1880), mais elle considérait ses recherches comme son propre passe-temps privé. Ce n'est que vers la fin du siècle, lorsque son mari (elle avait épousé Walter Stott en 1890) lui a montré que les chiffres publiés par le géomètre néerlandais Pieter Schoute ressemblaient étroitement à ses propres constructions, qu'elle a contacté ce mathématicien professionnel. Schoute est devenu son partisan enthousiaste et a organisé la publication de ses schémas dans les actes de l'Académie royale des sciences (Pays-Bas).

Le premier article d'Alicia Boole-Stott, *Sur certaines séries de sections des hypersolides réguliers quadri-dimensionnels*, publié en 1900, est la base de la chronique de ce mois-ci. Nous nous concentrerons sur son analyse de l'un des "hypersolides", le 120-polytope, avec une frontière constituée de 120 dodécaèdres. Nous montrerons en particulier comment utiliser les schémas d'Alicia Boole-Stott comme modèles pour reconstituer sept des modèles polyédriques qu'elle avait construits une vingtaine d'années auparavant.

Alicia a laissé à Schoute un ensemble complet de modèles pour le 120-polytope et son dual, le 600-polytope ; ceux-ci sont toujours exposés à l'Université de Groningue, où Schoute a enseigné, et ils peuvent être considérés comme faisant partie de l'exposition en ligne des modèles mathématiques de surfaces de Groningue.

Un autre ensemble des modèles d'Alicia Boole-Stott est exposé à l'Institut Faulkes de géométrie, au Centre des sciences mathématiques de l'Université de Cambridge. L'ensemble des modèles de Cambridge reproduit la plupart des deux séries de sections du 600-polytope à Groningen (certaines avec un code couleur différent), mais il est accompagné d'un ensemble de dessins différents. Cambridge ne semble pas avoir de modèles des sections du 120-polytope.

Des vues de Flatland[1] du dodécaèdre

Un 120-polytope se situe dans le x, y, z, w-espace avec l'une de ses faces dodécaédriques dans le hyperplan à 3 dimensions $w = 0$, et le reste dans le demi-espace "supérieur" $w > 0$. Alicia Boole-Stott a examiné ses sections par 3 plans $w = c$, parallèles au plan x, y, z, lorsque c augmente de 0 à la hauteur du 120-polytope, qui est égale à environ 6 unités si les dodécaèdres ont une longueur d'arête égale à 1. Ces sections sont ce qui apparaîtrait si un 120-polytope voyageait "vers le bas" sur un chemin coupant l'espace dans lequel nous vivons.

"Flatland" explique ce processus par analogie avec la perception qu'a un être bidimensionnel d'un solide tridimensionnel. Tout ce qu'un habitant de Flatland peut voir, c'est la séquence des figures planes produites lorsque le solide tombe à travers Flatland. C'est un exercice utile d'imaginer comment un habitant de Flatland verrait un dodécaèdre passer selon qu'il descend face en premier, sommet en premier ou arête en premier, car ces trois familles de polygones produites sont exactement celles que nous rencontrerons dans les modèles d'Alicia.

[1] le plat pays.

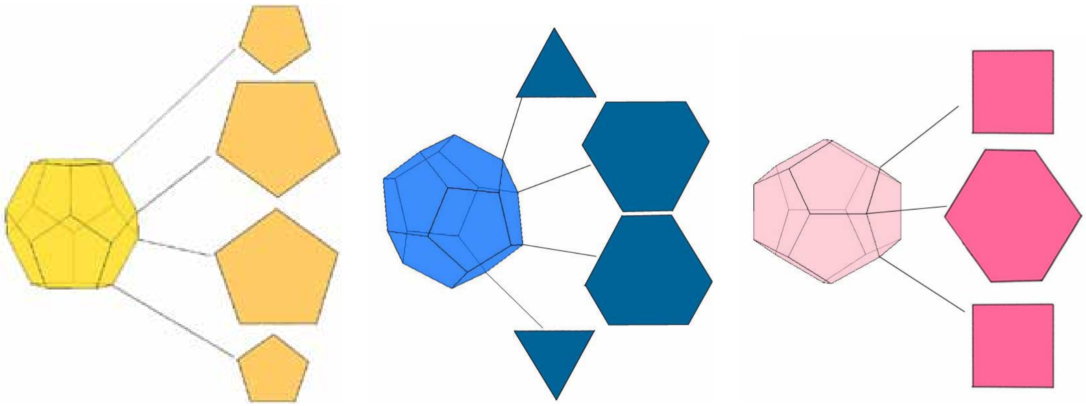


Fig. 2. Trois perspectives de Flatland sur le dodécaèdre.

1. Tranches parallèles à une face. Les sommets sont rencontrés en quatre groupes de 5. Lorsque les tranches montent, l'intersection pentagonale grandit. Entre les deux ensembles médians de sommets, les tranches sont des décagones (non représentés), avec un décagone régulier au milieu. Puis on a une autre famille de pentagones, tournés par rapport aux premiers, décroissant jusqu'à la face supérieure.

2. Tranches perpendiculaires à un diamètre rejoignant des sommets opposées. Les sommets sont rencontrés, en groupes de 1, 3, 6, 6, 3, 1, en six couches. Entre la couche 1 et la couche 2, les sections sont des triangles équilatéraux. Entre la couche 2 et la couche 3, les sections sont des hexagones, avec un hexagone régulier (non représenté) advenant le long du chemin. Entre les couches intermédiaires, les hexagones changent de forme, avec un autre hexagone régulier plus grand au centre même. Le processus s'inverse lorsque les sections montent vers le haut : des hexagones puis des triangles.

3. Tranches perpendiculaires à la bissectrice de deux bords opposés. Maintenant, les sommets sont rencontrés en groupes de 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2 selon sept couches. Les premières couches sont des rectangles très fins, devenant des carrés parfaits à la couche 2. Entre les couches 2 et 3, les tranches sont des octogones (non représentés). Puis on a des hexagones entre les couches 3 et 5, avec un hexagone régulier apparaissant une fois entre les couches 3 et 4, et de nouveau entre les couches 4 et 5 (non représenté). Les premières étapes s'inversent ensuite : octogones, carré, rectangles se réduisant à un segment de droite.

Le 120-polytope pose pour la photo

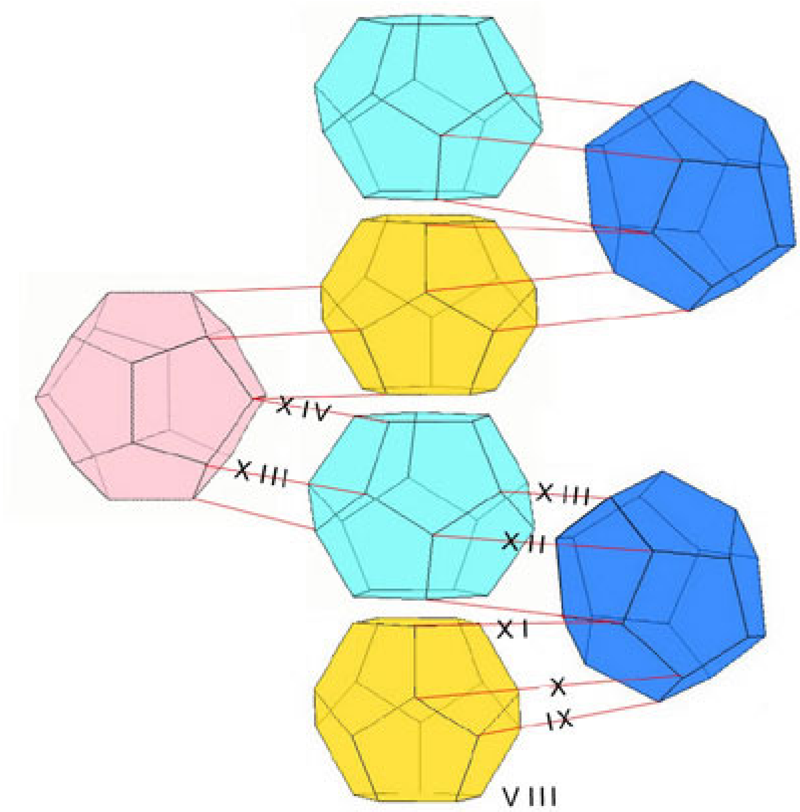


Fig. 3. Les 120 dodécaèdres constituant la frontière tri-dimensionnelle du 120-polytope peuvent être analysés en 9 couches contenant respectivement 1, 12, 20, 12, 30, 12, 20, 12, 1 solides respectivement.

Cette image illustre comment les couches s'empilent lorsque le polytope est placé avec une face solide dans l'espace x, y, z. Un représentant est fourni pour chaque couche, avec des indications sur la façon dont les couches sont attachées. Dans cette orientation du polytope, les cellules du haut et du bas n'ont pas d'étendue en quatrième dimension. Elles apparaissent ici comme le pentagone jaune inférieur et le pentagone turquoise supérieur. Les chiffres romains font référence aux schémas de l'article de 1900 d'Alicia Boole-Stott.

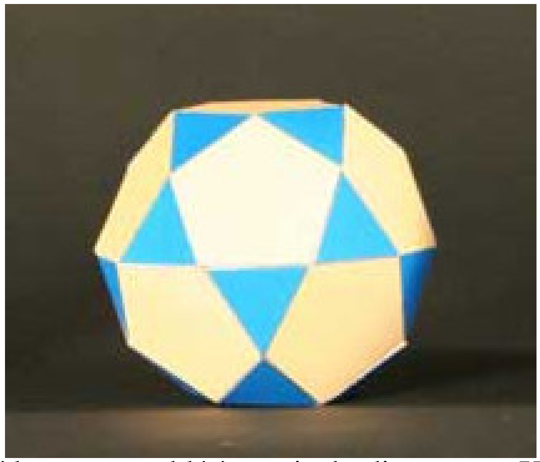
Vers le haut à travers les couches

Les modèles de cette séquence ont été assemblés avec l'aide de George Hart, Lucienne Pereira et Steven Anderson. Ils ont été photographiés par Tony Scarlatos. Les images de l'article de Stringham ont été photographiées par Bill Casselman. Les gabarits à partir desquels les modèles ont été réalisés ont été photographiés par Robert Sammis à partir des fragiles planches dépliantes attachées à l'article d'Alicia Boole-Stott. Merci à tous!

Couche 1. Les diagrammes d'Alicia nous donnent une vue en perspective tridimensionnelle sur le 120-polytope, analogue à la première image (jaune) de Flatland, lorsqu' =un visage est dans l'avion habité. La première chose que voit l'habitant de Flatland est ce visage. La première chose que nous voyons est un unique dodécaèdre entier qui apparaît. On peut penser à sa peau comme étant formée par les douze pentagones inférieurs des solides de la couche 2 et colorés en jaune. Assemblés à partir du diagramme VIII d'Alicia Boole-Stott.

Couche 2. La couche 2 se compose de douze dodécaèdres attachés aux douze faces de la couche 1. Lorsqu'on monte à travers la couche 2, chaque dodécaèdre donne des pentagones de plus en plus grands. Ce modèle montre le plus grand d'entre eux, juste avant que nous ne rencontrions la première trace de la couche 3. Assemblés à partir du diagramme IX d'Alicia Boole-Stott.

L'image de droite est la figure 18 de l'article de l'American Journal de Stringham de 1880. Il montre toute la couche 2, avant que les polyèdres de la couche 3 n'aient été ajoutés. Stringham a projeté la construction complète dans l'espace à 3 dimensions, ce qui déforme la géométrie mais rend l'organisation intelligible.

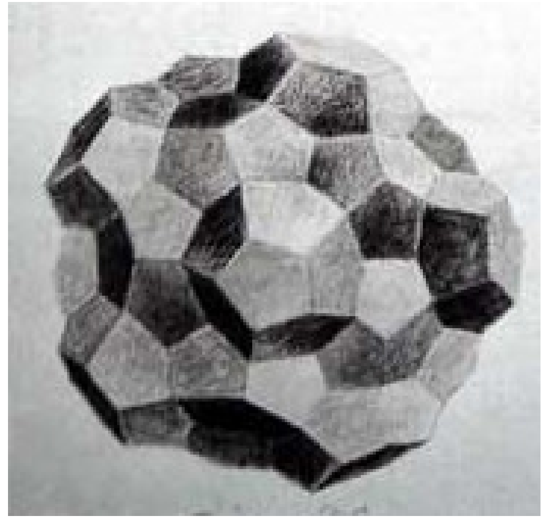


Couches 2 et 3. Ce modèle est assemblé à partir du diagramme X d'Alicia Boole-Stott. Un dodécaèdre de couche 3 est inséré sommet d'abord dans chacune des 20 encoches montrées dans la figure 18 de l'article de Stringham. Dans cette section, chacun de ces polyèdres contribue par un triangle.

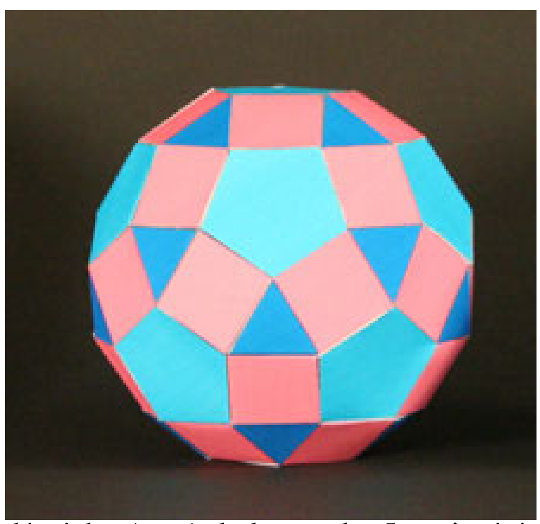
Le haut de la couche 2 ; la couche 3. Schéma XI d'Alicia Boole-Stott. Nous voyons là la fin de la couche 2. Chacun des douze montre sa face supérieure avant de disparaître. Ce sont maintenant les polyèdres de la couche 3 qui contribuent par des hexagones.

Sur la droite, le dessin 19 est de Stringham. Il montre comment les polyèdres de la couche 3 forment des fosses pentagonales. (Au fond de chaque fossee, il y a la face supérieure de l'un des dodécaèdres de la couche 2)

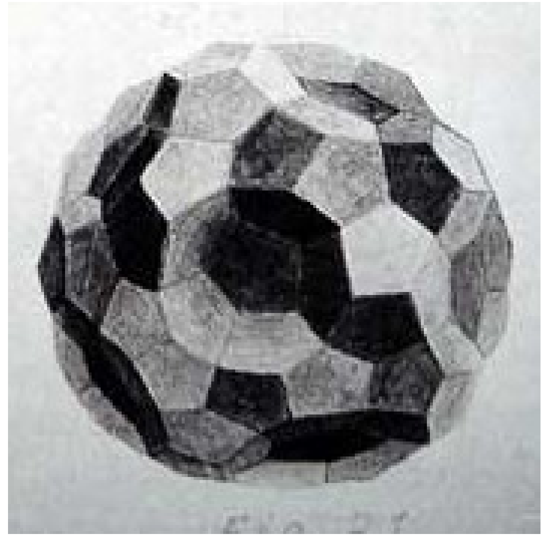
 

Couches 3 et 4. À partir du Schéma XII d'Alicia Boole-Stott Un dodécaèdre (de couleur turquoise) est planté dans chacune des 12 fosses montrées dans la figure 19 de l'article de Stringham. Ces nouveaux solides sont empilés directement au-dessus des doécaèdres de la couche 2 et vont aussi donner des sections pentagonales.

La figure 20 de l'article de Stringham, à droite, montre comment les sommets des dodécaèdres de la couche 4 forment 12 plateaux, tandis que les pics de la couche des dodécaèdres de la couche 3 apparaissent comme 20 sommets triangulaires. Les côtés des plateaux et les pics forment un réseau de 30 auges à quatre côtés.



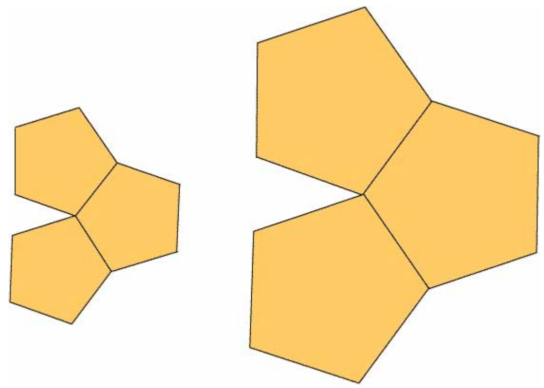
Couches 3, 4 et 5. Un dodécaèdre (rose) de la couche 5 est inséré arête d'abord dans chaque auge, il contribue par un carré. Cette section a été assemblée à partir du diagramme XIII d'Alicia Boole-Stott. Les dodécaèdres de la couche 3 font leur dernière apparition sous forme de triangles, tandis que ceux de la couche 4 continuent de contribuer par des pentagones.

Couches 4 et 5. Dans cette section, à partir du Diagramme XIV d'Alicia Boole-Stott, chaque dodécaèdre de la couche 4 montre sa face supérieure, tandis que chacun des 30 docécaèdres de la couche 5 contributions par sa section centrale. C'est la moitié du processus de découpage en tranches : on a vu 1 + 12 +20 + 12= 45 dodécaèdres complets et la moitié de 30 autres. Comme on continue de monter à travers le 120-polytope, les sections deviennent maintenant de plus en plus petites. Nous pourrions utiliser les mêmes modèles en ordre inverse, sauf que jaune et turquoise auraient besoin d'être échangés pour suivre le schéma de couleur de la Fig. 3. La figure 21 de l'article de Stringham (à droite) donne une perspective différente à la fin du processus. Dans sa figure, la totalité de la couche 5 a été ajoutée. Chaque auge a été transformé en une crête à 4 côtés : les polyèdres de la couche 5 enferment 12 fosses (tout en bas d'eux, vous pouvez voir les derniers pentagones de la couche 4) ; et trois par trois, ils forment 20 encoches. Ce solide contient 75 dodécaèdres, avec une surface géométrique qui est l'exacte opposée du solides à 45-dodécaèdres montré dans la figure 20 de Stringham. Localement, il est clair que les deux solides s'emboîtent ensemble parfaitement : les encoches aux pics, les fosses aux plateaux et les crêtes aux auges. Globalement cette correspondance, qui produit une 3-sphère topologique, ne peut pas être effectuée dans notre monde.

Les modèles

L'article d'Alicia Boole-Stott de 1900 dans les Proceedings de l'Académie Royale des Pays-Bas contient 14 diagrammes illustrant des configurations polygonales ; les sept premiers concernent des sections du 600-polytope, et les sept derniers, numérotés de VIII à XIV, concernent le 120-polytope. Ces diagrammes peuvent être utilisés comme modèles pour assembler des modèles exactement comme ceux qu'elle a elle-même fabriqués et laissés à Groningen. La seule différence est que la série de Groningen comprend plusieurs tronçons intermédiaires pour lesquels elle n'a pas publié de schémas. Ces schémas sont tous exactement à la même échelle. Ils sont publiés en noir et blanc, mais j'ai suivi l'exemple de ses vrais modèles avec un codage couleur par niveau.



Diagrammes VIII et IX

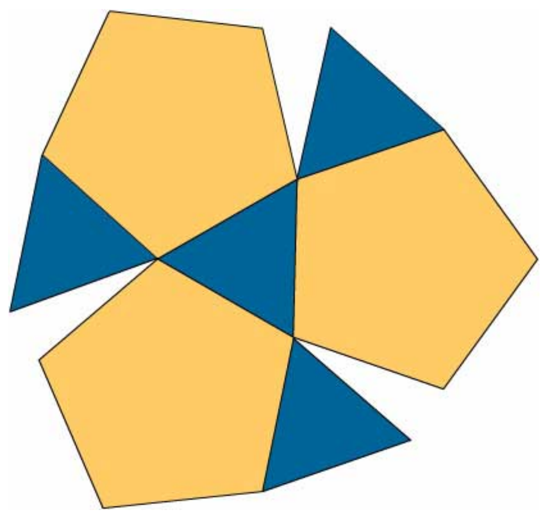


Diagramme X

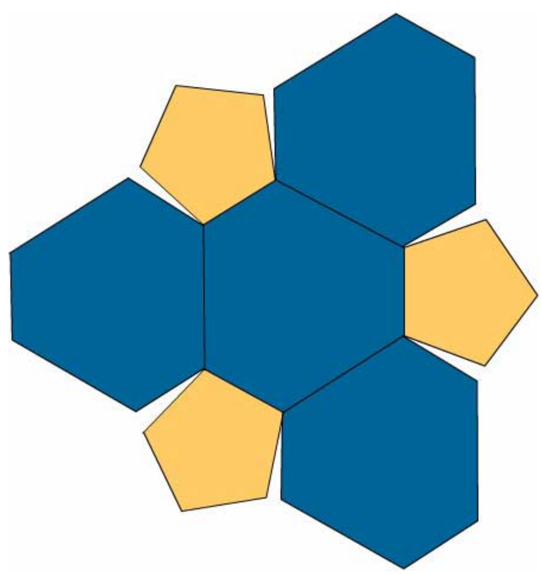


Diagramme XI

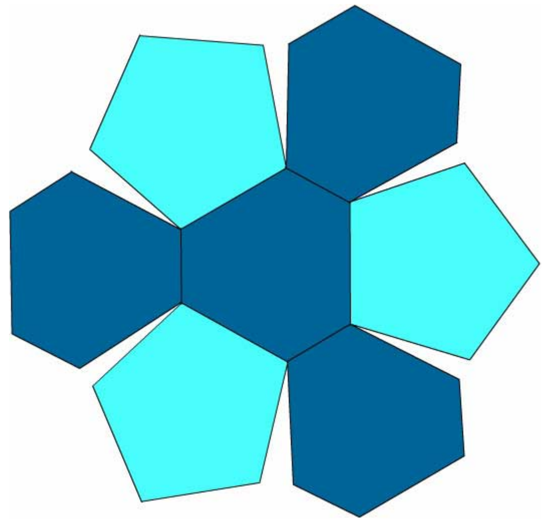


Diagramme XII

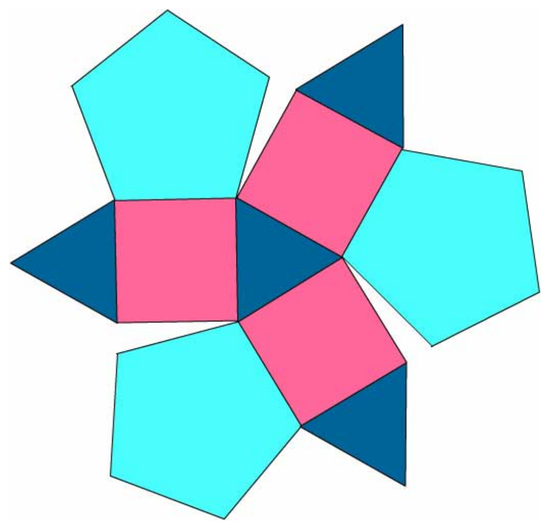


Diagramme XIII

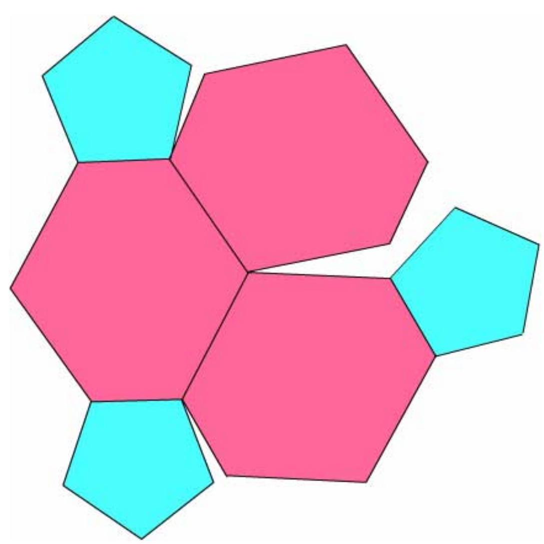


Diagramme XIV

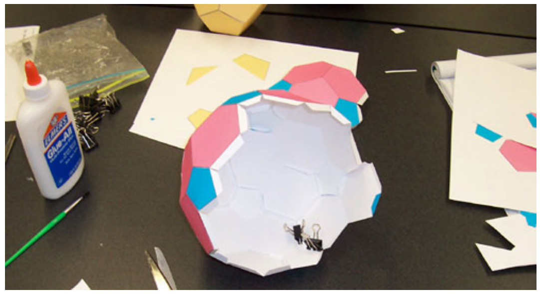


Diagramme XIV

L'assemblage du schéma XIV. Notez la méthode de George Hart des doubles onglets, la colle d'Elmer appliquée au pinceau et les clips.

Pour lire davantage

La biographie d'Alicia Boole-Stott par Coxeter apparaît dans

- Grinstein, Louise and Paul J. Campbell, eds., Women of Mathematics: A Biographical Sourcebook, Greenwood Press, Westport CT 1987.

Il a écrit une notice biographique d'Alicia Boole-Stott plus courte mais plus personnelle, et bien sûr tout ce que vous devez savoir sur le 120-polytope peut être trouvé dans

- Coxeter, H.S.M., Regular Polytopes, Dover, New York, 1973.

Il y a plus de matériau sur Alicia et sa brillante et excentrique famille dans

- MacHale, Desmond, George Boole: His Life and Work, Boole Press, Dublin 1985.

et dans "Scientific Diversions" de son neveu, Sir Geoffrey Ingram Taylor, publié dans les pages 137 à 148 de

- Higginbotham, S. W., ed., Man, Science, Learning and Education, Rice University Studies LXIX supplement 2, 1963.

Un survol récent de la vie d'Alicia et de ses contributions mathématiques :

- Irene Polo-Blanco, *Alicia Boole-Stott, a geometer in higher dimension*, Historia Mathematica **35**:2 (May 2008) 123-139.

Pour un traitement plus systématique du problème du découpage des corps convexes dans l'espace de dimension *n*, voir *The elementary theory of convex polyhedra* de Hermann Weyl.

- Tucker, A. W. and Harold Kuhn, Contributions to the Theory of Games, Vol. I, Annals of Mathematics Studies 24, Princeton 1950.

Les références complètes des articles cités dans le texte sont :

- Stringham, W. I., *Regular figures in n-dimensional space*, Amer. Jour. Math. **3** 1880 1-14.
- Boole-Stott, Alicia, *On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids*, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (eerste sectie) 1900.