Traduction d'un extrait de la thèse de Andrea Arauza[1] présentant la notion de triplet spectral (Denise Vella-Chemla, août 2023)

3.2. Triplets spectraux

Dans cette section, on introduit l'outil principal des algèbres d'opérateurs utilisé pour étudier la géométrie fractale - le triplet spectral. On définit également la trace de Dixmier qui sera utilisée pour définir la mesure induite par le triplet spectral. Les exemples incluront des triplets spectraux pour des fractals comme l'ensemble de Cantor dans $\mathbb{R}$, pour des courbes, et pour une certaine classe d'ensembles construits à partir de courbes (comme le triangle de Sierpinski et la courbe étirée de Sierpinski).

3.2.1 Triplets spectraux

On utilise la notation $[A, B] := AB - BA$ pour le commutateur de deux opérateurs A, B sur un espace de Hilbert. En outre, étant donné un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ on écrit $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ pour l'espace des opérateurs bornés sur $\mathscr{H}$.

Définition 12. *Un **triplet spectral** $(\mathscr{A}, \mathscr{H}, D)$ est une collection de trois objets*

- *$\mathscr{A}$ une C^*-algèbre unitaire,*
- *$\mathscr{H}$ un espace de Hilbert qui transporte une représentation fidèle unitaire : $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$, et*
- *un opérateur, principalement auto-adjoint D de domaine $Dom(D) \subseteq \mathscr{H}$, tel que*
  - *(a) l'ensemble $\{a \in \mathscr{A} : [D, \pi(a)]$ est densément défini et a une extension bornée vers $\mathscr{H}\}$ est dense dans $\mathscr{A}$, et*
  - *(b) l'opérateur $(I + D^2)^{-1}$ est compact.*

La C^*-algèbre $\mathscr{A}$ sera souvent $C(X)$, avec X un espace de Hausdorff compact. L'opérateur $[D, \pi(a)]$, pour $a \in \mathscr{A}$, agira comme la "dérivée" de l'élément a et l'ensemble dense dans la condition (a) agira comme l'ensemble des fonctions C^1 dans $C(X)$. L'opérateur D et ses valeurs propres sera la clef pour retrouver l'information géométrique comme la dimension et la mesure. La condition que l'opérateur $(I + D^2)^{-1}$ soit compact assure que le spectre de l'opérateur D^{-1} ne contient que des valeurs propres et que le seul point d'accumulation possible de ces valeurs propres est 0. On peut alors considérer des sommes infinies de ces valeurs propres.

En utilisant les trois outils d'un triplet spectral, on peut définir les notions de dimension, métrique, et mesure sur un espace de Hausdorff X.

[1]Thèse de Andrea Arauza intitulée *Spectral Triples and Fractal Geometry*, dans le but d'obtenir le titre de Docteur en philosophie des mathématiques, soutenue à Riverside, à l'Université de Californie, en juin 2018.

Définition 13. *Étant donné un triplet spectral* $(C(X), \mathscr{H}, D)$, *le nombre*

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(X) := \inf\{p > 0 \ : \ \mathrm{tr}((I + D^2)^{-p/2}) < \infty\}$$

est la ***dimension spectrale*** *(ou* ***dimension métrique****) de l'espace* X.

Notons que la condition (b) dans la définition d'un triplet spectral est nécessaire de telle façon que la trace dans la définition de la dimension spectrale ait la possibilité d'être finie. A priori il n'y a pas de raison que la dimension spectrale $\mathfrak{d}$ soit finie.

On définit ensuite une notion de distance induite par le triplet spectral. La définition semblera familière à ceux qui connaissent les métriques sur des espaces d'états. Pour davantage de détails à ce sujet, voir les travaux de Marc Rieffel dans [30], [31], [32] et d'Alain Connes dans [10].

Définition 14. *Étant donné un triplet spectral* $(C(X), \mathscr{H}, D)$, *définissons la* ***distance spectrale*** *par*

$$d_X(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| \ : f \in C(X), \ \|[D, \pi(f)]\| \leq 1\}, \qquad \textit{pour } x, y \in X.$$

En utilisant un triplet spectral et une autre notion de géométrie non-commutative, on peut définir la notion de mesure. Pour cela on doit introduire la notion de trace de Dixmier.

3.2.2 La trace de Dixmier

Comme référence à la discussion à venir, on peut se reporter au livre *Noncommutative Geometry* d'Alain Connes [9]. Ce livre est la référence pour la géométrie non-commutative. Pour définir la trace de Dixmier on aura besoin d'extensions de la notion habituelle de limite. Pour cela, on utilisera des limites étendues. Les limites étendues sont des extensions à l^∞ de la fonctionnelle limite habituelle agissant sur c, l'espace des séquences convergentes. Par Hahn Banach la limite classique sur c s'étend à l^∞, notée Lim, et $|\mathrm{Lim}(x)| \leq \|x\|_\infty$ pour tout $x \in l^\infty$.

Définition 3.2.2.1. *Une fonctionnelle linéaire positive* ϕ *sur une algèbre de von Neumann* $\mathcal{N}$ *est un* ***état*** *si* $\phi(1) = 1$.

Les limites étendues sont des états sur l^∞ puisque $\mathrm{Lim}(1) = 1$ et sont caractérisés par le fait qu'ils s'évanouissent sur c_0. En d'autres termes, un état ϕ sur l^∞ s'évanouit sur c_0 si et seulement si ϕ est une extension de la limite classique à l^∞ (i.e. $\phi = \mathrm{Lim}$). Notons que tout état sur l^∞ est continu :

$$|\phi(x)| \leq |\phi(1 \cdot \|x\|_\infty)| \leq \|x\|_\infty$$

où $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$. Cela signifie qu'il suffit qu'un état s'évanouisse sur des séquences avec un nombre fini d'entrées non nulles pour que l'état puisse être une limite étendue.

Définition 3.2.2.2. *Soit* w *un état sur l'algèbre de von Neumann* l^∞. *Alors* w *est appelé une* ***limite étendue*** *si elle s'évanouit sur toute séquence avec un nombre fini d'entrées non nulles dans* l^∞.

Nous aurons besoin que nos limites étendues satisfassent une certaine propriété de dilatation. Le semi-groupe discret de dilatation $\sigma_k : l^\infty \to l^\infty$ pour $k \in \mathbb{N}$ agit par la formule

$$\sigma_k(x) = (x_0, x_0, \ldots, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_1, \ldots.)$$

où $x \in l^\infty$ et chaque x_j apparaît k fois. On utilisera des limites étendues invariantes par 2-dilatation. C'est-à-dire des limites étendues, $w : l^\infty \to \mathbb{R}$, qui satisfont

$$w(\sigma_2(x)) = w(x).$$

Le fait que des limites étendues invariantes par dilatation existent découle d'une version du théorème de Hahn Banach invariante par dilatation. La preuve de cette version du théorème de Hahn Banach peut être trouvée dans le texte [11] d'Edwards, Théorème 3.3.1.

Théorème 3.2.2.3. (Théorème de Hahn Banach invariant) *Soit X un espace linéaire et G un semi-groupe commutatif. Étant donnés*

(a) une action $g : x \to g(x)$ de G sur X,
(b) un sous-espace G-invariant Y de X,
(c) une fonctionnelle convexe homogène $p : X \to \mathbb{R}$ telle que $p \circ g \leq p$ pour tout $g \in G$,
(d) une fonctionnelle linéaire invariante G, $w : Y \to \mathbb{R}$ telle que $w \leq p$,

alors il existe une extension invariante G, $w : X \to \mathbb{R}$ telle que $w \leq p$.

Corollaire 3.2.2.4. *Des limites étendues invariantes par dilatation existent sur l^∞.*

L'espace dans la définition qui suit est un idéal dans l'ensemble des opérateurs compacts et servira de domaine de la trace de Dixmier. Pour un opérateur compact T, notons par $\mu_j(T)$ les valeurs propres de $|T|$ ordonnées de telle façon que $0 \leq \mu_{j+1}(T) \leq \mu_j(T)$ pour $j \in \mathbb{N}$.

Définition 3.2.2.5. *Soit $w : l^\infty \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire qui s'évanouit sur c_0 et satisfait pour $x \in l^\infty$, $w(\sigma_2(x)) = w(x)$. Définissons*

$$\mathcal{L}^{(1,\infty)} = \{T \in \mathcal{K} : \|T\|_{(1,\infty)} = \sup_N \frac{1}{\log(1+N)} \sum_{j=1}^{N} \mu_j(T) < \infty\}.$$

*La **trace de Dixmier** de $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ où $T \geq 0$, est donnée par*

$$\mathrm{Tr}_w(T) = w \left\{ \frac{1}{\log(1+N)} \sum_{j=1}^{N} \mu_j(T) \right\}.$$

Définissons Tr_w *pour les opérateurs auto-adjoints et ensuite pour des opérateurs arbitraires par linéarité.*

La séquence

$$\left\{ \frac{1}{\log(1+N)} \sum_{j=1}^{N} \mu_j(T) \right\}_{N=1}^{\infty}$$

ne converge pas toujours lorsque $N \to \infty$, donc $\mathrm{Tr}_w(T)$ peut dépendre de la limite étendue w. Dans la plupart des applications on peut montrer l'indépendance de $\mathrm{Tr}_w(T)$ à partir de w. Comme pour la trace des opérateurs habituelle, la trace de Dixmier a de nombreuses propriétés utiles.

Proposition 3.2.2.6. [9]

1. $\mathrm{Tr}_w(\cdot)$ est une fonctionnelle linéaire positive sur l'idéal des opérateurs T pour lesquels $\mu_j(\mathrm{T}) = O(n^{-1})$.
2. $\mathrm{Tr}_w(\mathrm{ST}) = \mathrm{Tr}_w(\mathrm{TS})$ pour tous les opérateurs compacts T avec $\mu_j(\mathrm{T}) = O(n^{-1})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.
3. $\mathrm{Tr}_w(\cdot)$ s'évanouit sur les opérateurs compacts T avec $\mu_j(\mathrm{T}) = O(n^{-\alpha})$ pour $\alpha > 1$. i.e. $\mathrm{Tr}_w(\mathrm{T}) = 0$ si $n\mu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Un résultat de Connes est que pour un choix adéquat du triplet spectral, l'application $\mathrm{Tr}_w(\pi(f)|D|^{-\mathfrak{d}})$ est une fonctionnelle linéaire positive non triviale sur $C(X)$ et induit par conséquent une mesure ; voir [9]. C'est comme cela qu'on utilisera un triplet spectral pour induire une mesure sur un ensemble fractal. Maintenant que nous avons tous les outils nécessaires, nous pouvons commencer à explorer comment les utiliser pour étudier la géométrie fractale. Voir [28] pour davantage d'éléments sur la théorie des traces singulières comme la trace de Dixmier. Le théorème suivant d'Alain Connes dans [9] est souvent utilisé pour calculer la trace de Dixmier comme résidu d'une certaine série. On utilisera ce théorème dans les sections qui suivent.

Théorème 15.

Pour $\mathrm{T} \geq 0, \mathrm{T} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$*, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1.
$$(s-1)\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(\mathrm{T})^s \to L \text{ lorsque } s \to 1^+ \;;$$

2.
$$\frac{1}{\log(N+1)}\sum_{n=1}^{N} \mu_n(\mathrm{T}) \to L \text{ lorsque } N \to \infty.$$

Références bibliographiques

[9] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.

[10] A. Connes, Compact metric spaces, Fredholm modules, and hypefiniteness, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **9** (1989), 207220.

[11] R. E. Edwards, *Functional Analysis : Theory and Applications*, Dover Publications Inc., New York, 1995.

[28] S. Lord, F. Sukochev, D. Zanin, *Singular Traces: Theory and Applications*, vol. 46. De Gruyter Studies in Mathematics, 2013.

[30] M. A. Rieffel, Metrics on states from actions of compact groups, *Doc. Math.* 3 (1998) 215-229.

[31] M. A. Rieffel, Metrics on state spaces, *Doc. Math.* 4 (1999) 559-600. https://arxiv.org/pdf/math/9906151.pdf.

[32] M. A. Rieffel, Compact quantum metric spaces, in : *Operator Algebras, Quantization, and Non-Commutative Geometry*, Contemp. Math., 365, Amer. Math. Soc., 2004, 315-330.