

Résumé : La façon dont Riemann calculait sa fonction zêta sur la ligne critique était basée sur une application de sa technique du point de selle pour approximer les intégrales qui semble étonnante encore aujourd’hui. Son intégrale de contour pour le reste de la série de Dirichlet pour la fonction zêta n’impliquait pas une selle isolée, ni une selle proche d’un pôle ou d’un point terminal ou plusieurs selles coalescentes, mais la configuration, peu familière même aujourd’hui, d’une selle proche d’une chaîne infinie de pôles. Riemann a évalué exactement l’intégrale associée, et la formule de Riemann-Siegel qui en résulte est à la base des méthodes de calcul des zéros de Riemann et de l’une des approches physiques de l’hypothèse de Riemann.

1. Introduction

Ce livre marque la mort de Riemann il y a 150 ans en célébrant ses nombreuses réalisations. Je souhaite me concentrer sur un aspect étonnamment original de ses recherches qui n’a jamais été publié de son vivant, à savoir son application de la méthode du point-selle au calcul de sa fonction zêta éponyme. L’histoire sous-jacente est bien connue [1]. Près de soixante-dix ans après la mort de Riemann, Siegel [2] (réimprimé dans [3]) a reconstitué le calcul de Riemann à partir de notes incomplètes découvertes à titre posthume et a élucidé ce qu’on appelle aujourd’hui la formule de Riemann-Siegel.

La formule implique une intégrale de contour, que Riemann a approchée par une variante de sa méthode du point-selle. Dans sa forme la plus simple et la plus familière [4, 5], cette méthode fait intervenir des intégrales dominées par une exponentielle contenant un grand paramètre. L’approximation consiste à développer l’intégrale autour de son point critique sur le chemin d’intégration de la selle complexe (point stationnaire de l’exposant) conduisant, dans l’ordre le plus bas, à une intégrale gaussienne facilement évaluable. Cette version de la méthode est généralement attribuée à Debye [6], bien qu’il ait souligné qu’il l’avait apprise d’un article de Riemann de 1863, publié à titre posthume [7] avec du matériel supplémentaire de Schwarz. Riemann s’était concentré sur l’approximation de certaines fonctions hypergéométriques à variables complexes ; cela semble être une application spécialisée, mais il était clair que Riemann avait compris que la technique pouvait être appliquée dans des cas plus généraux. Entre les articles de Riemann et Debye, la méthode a été découverte indépendamment par Nekrasov [8].

Parfois, cette technique est appelée méthode des descentes les plus raides. Elle fait référence à la rotation du contour d’intégration pour passer à travers la selle dans la direction pour laquelle la partie réelle de l’exposant diminue le plus rapidement. Si au contraire on fait subir une rotation au contour (de $\pi/4$ au niveau de la selle) de sorte que la partie réelle de l’exposant reste constante, c’est-à-dire que l’intégrande est oscillatoire, la même technique est appelée méthode de phase stationnaire. Sous cette forme, la méthode a été anticipée par Stokes [9] (réimprimée dans [10]) et développée plus tard par Kelvin [11]. Pour la méthode du point-selle la plus simple, il s’agit de l’intégrale gaussienne ; pour la selle près d’une extrémité ou d’un pôle, c’est la fonction

Référence : in *The Legacy of Bernhard Riemann After One Hundred and Fifty Years* ALM 35, pp. 69-78, Higher Education Press and International Press Beijing-Boston.

Traduction en français : Denise Vella-Chemla, avec Google traduction, avril 2024.

d'erreur ; pour deux selles coalescentes, c'est la fonction d'Airy [13]. D'autres extensions incluent la déformation des intégrandes pour obtenir des approximations qui restent uniformément valables dans le régime du point-selle ordinaire loin des coalescences [14-16], la compréhension des ordres élevés des expansions [17, 18] et les intégrales multiples [4, 19].

Dans l'approximation de la fonction zêta de Riemann, son génie a été d'appliquer la méthode du point-selle à une situation que, à ma connaissance, personne d'autre n'avait envisagée au cours des 150 années qui ont suivi : une selle proche d'une chaîne infinie de pôles. Pour expliquer cela, il est nécessaire de reproduire du matériel publié précédemment [1, 2]. Je le ferai de manière simplifiée (méthode de Riemann-Siegel "simplifiée").

2. Schéma de la dérivation de l'intégrale du reste de Riemann-Siegel

Riemann a approximé $\zeta(s)$ haut sur la droite critique $s = 1/2 + it$, i.e. pour t réel avec $t \gg 1$. Pour cela, il faut commencer par prolonger analytiquement la série de Dirichlet

$$(2.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

qui ne converge que pour $\Re s > 1$. Sur la droite critique, il convient d'approcher non pas la fonction complexe $\zeta(1/2 + it)$ mais la fonction $Z(t)$, dont l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ garantit qu'elle est réelle pour tout t réel :

$$(2.2) \quad Z(t) = \exp(i\theta(t))\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \quad \text{où} \quad \theta(t) = \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right)\right) - \frac{1}{2}t \log \pi.$$

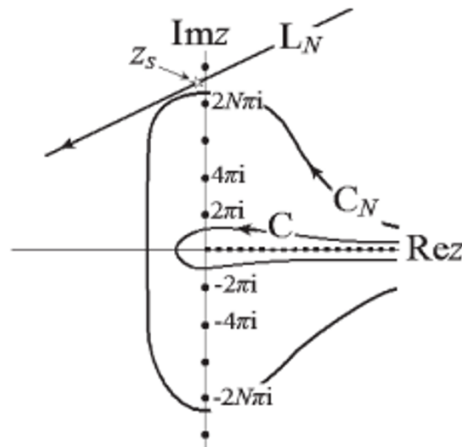


FIGURE 1 : Plan complexe z de l'intégrande, et contours d'intégration, dans les intégrales de Riemann-Siegel. Les points indiquent les pôles, l'étoile¹ indique la selle et la ligne pointillée représente la branche coupée.

Dans la série de Dirichlet (2.1), les N premiers termes sont conservés, et la suite s'effectue en modifiant les termes $n > N$ en utilisant la forme suivante de l'intégrale de Hankel [12] pour la fonction gamma :

¹où ?

$$(2.3) \quad 1 = -\frac{\Gamma(s)}{2\pi i} \int_C dz \frac{\exp(-z)}{(-z)^s} \quad (s \neq 0, -1, -2 \dots).$$

Ici le plan z est coupé le long de l'axe réel positif et le contour est représenté sur la figure 1. Les manipulations élémentaires donnent maintenant une représentation de $Z(t)$ dans laquelle la queue de la série de Dirichlet est résumée par :

$$(2.4) \quad Z(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\exp(i(\theta(t) - t \log n))}{\sqrt{n}} - \frac{\exp(i\theta(t))\Gamma(\frac{1}{2} - it)}{2\pi i} \int_C dz \frac{(-z)^{-\frac{1}{2}+it} \exp(-Nz)}{\exp(z) - 1}$$

C'est la suite analytique requise.

L'étape suivante consiste à étendre le contour jusqu'à C_N (figure 1), pour capturer les premiers pôles $N > 0$ sur les axes imaginaire positif et imaginaire négatif. Cela mène à

$$(2.5) \quad Z(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\exp(i(\theta(t) - t \log n))}{\sqrt{n}} + f(t) \sum_{n=1}^N \frac{\exp(i(-\theta(t) + t \log n))}{\sqrt{n}} + R_N(t)$$

le reste étant désormais donné par

$$(2.6) \quad R_N(t) = -\frac{\exp(i\theta(t))\Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right)}{2\pi i} \int_{C_N} dz \frac{(-z)^{-\frac{1}{2}+it} \exp(-Nz)}{\exp(z) - 1}.$$

Les manipulations de la fonction gamma (formules de réflexion et de duplication [12]) donnent le préfacteur de la deuxième somme comme

$$(2.7) \quad f(t) = 2 \exp(2i\theta(t))\Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right) (2\pi)^{-\frac{1}{2}+it} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} - it\right)\right) = 1.$$

Par conséquent les N termes de la deuxième série dans (2.5) sont les conjugués complexes de leurs homologues de la première série, et

$$(2.8) \quad Z(t) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos(\theta(t) - t \log n)}{\sqrt{n}} + R_N(t).$$

Cette représentation, exacte pour toutes les valeurs de t et N , est le point de départ de la dérivation de la formule de Riemann-Siegel. La série (appelée "la somme principale" ou "l'équation fonctionnelle approximative") est réelle, tout comme $Z(t)$. Par conséquent, $R_N(t)$ est également réel, bien que cela ne soit pas évident d'après l'expression (2.6). La réapparition, dans la queue de la série de Dirichlet, des conjugués complexes des N premiers termes de la série, est un exemple du phénomène asymptotique général de résurgence, dans lequel les ordres élevés d'une série divergente peuvent être exprimés en fonction des ordres bas de la série [17, 20, 21]. La somme principale elle-même est assez précise : même le terme $n = 1$ possède des zéros avec les densités asymptotiques correctes, et les $N - 1$ termes restants déplacent les zéros approximatifs près de leurs emplacements exacts.

3. Reste de premier ordre

La théorie passe désormais de l'exactitude à l'approximation pour t grand. L'exposant au numérateur de l'intégrande dans (2.6) possède une selle, en z_s , donnée par

$$(3.1) \quad \frac{d}{dz} \left(\left(-\frac{1}{2} + it \right) \log z - Nz \right) = 0 \implies z = z_s = \frac{it}{N} - \frac{1}{2N}.$$

Nous voulons que cette selle soit proche du contour C_N afin qu'elle domine l'intégrale de R_N . Ceci peut être réalisé en choisissant

$$(3.2) \quad N = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right]$$

dans lequel [...] désigne la partie entière (fonction plancher). Notant la partie fractionnaire de $\sqrt{t/2\pi}$ par p , i.e.

$$(3.3) \quad \sqrt{\frac{t}{2\pi}} = N + p \quad (0 \leq p < 1),$$

l'emplacement de la selle peut s'écrire

$$(3.4) \quad z_s = \frac{2\pi i(N+p)^2}{N} - \frac{1}{2N} \rightarrow 2\pi i(N+2p) \text{ lorsque } N \rightarrow \infty$$

À mesure que N augmente, z_s se rapproche de l'axe imaginaire.

Les figures 2 (a, b) montrent le module normalisé du numérateur de l'intégrande dans (2.6) le long de la ligne droite passant par la selle dans la direction de la descente la plus raide, à savoir

$$(3.5) \quad M(x) = \left| \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{1}{2}+it} \exp(-N(z-z_0)) \right| \quad \text{pour } z = z_0 + x \exp\left(\frac{1}{4}i\pi\right)$$

où $z_0 = z_s$; par rapport à l'approximation gaussienne (expansion quadratique autour de z_0). L'ajustement gaussien est presque parfait, même pour la valeur relativement faible illustrée.

Un point non souligné dans la littérature de Riemann-Siegel est que ce n'est que pour $0 < p < 1/2$ que l'emplacement pour N grand (3.4) de la selle se situe entre les pôles N et $N+1$ de telle façon que C_N puisse le traverser ; pour $1/2 < p < 1$, la selle se trouve au-dessus du pôle $N+1$. Mais cela n'a pas d'importance : il n'est pas nécessaire que le C_N passe exactement par la selle. En fait, il est pratique de développer l'intégrale non pas par z_s mais par l'emplacement z_c du pôle N :

$$(3.6) \quad z_c = 2\pi iN = z_s - 4\pi ip \quad \text{pour } N \gg 1.$$

Comme l'illustrent les figures 2 (c, d), le module M de l'intégrande (c'est-à-dire (3.5) avec $z_0 = z_c$), est encore proche de gaussien. Le maximum est décalé et l'ajustement pour N fixe se détériore à mesure que p augmente, car le chemin passe plus loin de la selle traversant des régions de montée où M est grand. Pour tout p , l'ajustement s'améliore à mesure que N augmente.

En s'étendant autour de z_c jusqu'à l'ordre quadratique, le reste devient, après plus de manipulations et en utilisant la grande approximation t (Stirling), l'approximation pour la fonction gamma [1],

$$(3.7) \quad R_N(2\pi(N+p)^2) \xrightarrow{N \gg 1} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{1/4} (-1)^{N+1} \Psi(p),$$

dans laquelle

$$(3.8) \quad \Psi(p) = \frac{\exp(i(\frac{1}{8}\pi - 2\pi p^2))}{2\pi i} \int_L du \frac{\exp(u) - 1}{\exp(\frac{i u^2}{4\pi} + 2pu)}$$

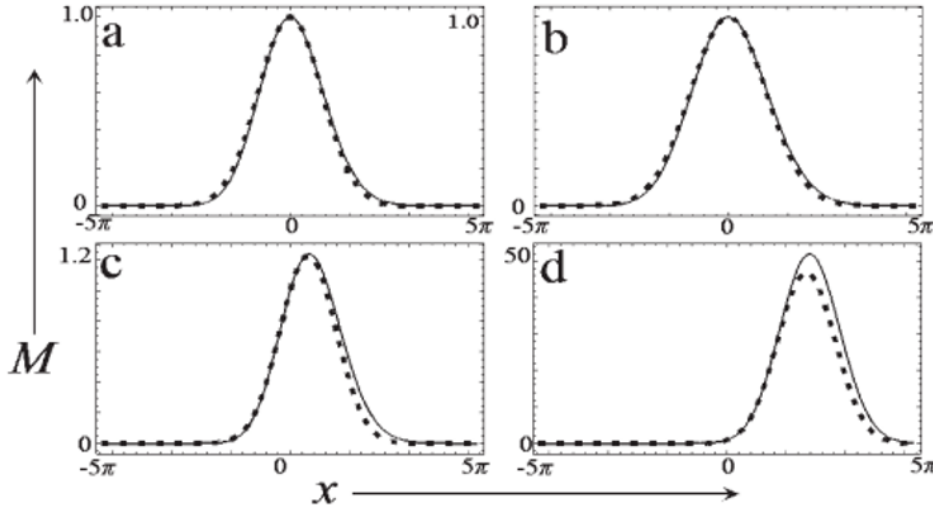


FIGURE 2 : Courbes complètes : (a,b) module M (équation (3.5)) de l'intégrale de Riemann-Siegel (2.6) le long du chemin droit 45° (localement le plus raide) chemin L_N passant par la selle z_s (equation (3.4)), avec $N = 3$, pour (a) : $p = 0.2$ et (b) : $p = 0.8$. (c,d) : lorsque (a), (b) pour le chemin passant par z_c (l'équation (3.6)) traversant le pôle N ; pour (c), $N = 3$ et pour (d), $N = 20$. Courbes en pointillés : approximations gaussiennes correspondantes.

Le contour L passe du coin supérieur droit au coin inférieur gauche, traversant l'axe imaginaire entre $u = 0$ et $u = 2\pi i$. Une analyse minutieuse [1] montre que les segments du contour C_N ainsi négligés donnent des contributions négligeables en comparaison de celui de L .

Ainsi Riemann a identifié la contribution dominante à $R_N(t)$ comme une intégrale dont le numérateur est gaussien et dont le dénominateur est une chaîne de pôles. Comme expliqué ailleurs [1, 2], il a pu évaluer cette intégrale avec précision. Le résultat est

$$(3.9) \quad \Psi(p) = \frac{\cos 2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16})}{\cos 2\pi p}$$

(la dérivation implique deux relations entre $\Psi(p)$ et $\Psi(p + 1/2)$). Malgré les apparences, il s'agit d'une fonction à part entière : les zéros : les zéros $p = (n + 1/2)\pi$ du dénominateur sont annulés par ceux du numérateur.

Ainsi, presque par hasard, sans fanfare, dans une réalisation inégalée de son époque à la nôtre, Riemann a établi la correction d'ordre dominant de la somme principale dans (2.8), de sorte que

$$(3.10) \quad Z(t) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos(\theta(t) - t \log n)}{\sqrt{n}} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{1/4} (-1)^{N+1} \frac{\cos 2\pi \left(p^2 - p - \frac{1}{16}\right)}{\cos 2\pi p} + O\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right).$$

Notez que cette expression est réelle, indiquant que l'approximation du point-selle préserve l'essence de l'équation fonctionnelle.

4. Ordres supérieurs et remarques finales

Riemann a fait plus que calculer le reste d'ordre dominant : il a développé un schéma d'expansion systématique, pour dériver des ordres supérieurs sous la forme d'une série en puissances de $(2\pi/t)^{1/4}$; impliquant des dérivées de $\Psi(p)$, je ne décris pas ici ces corrections supérieures, car il existe une procédure plus directe, stimulée par une idée de Keating [22] et élaborée ailleurs [23]. Ceci est basé directement sur la série de Dirichlet (2.1), dont le reste, corrigeant la somme principale, est donné formellement par

$$(4.1) \quad R_N(t) = \exp(i\theta(t)) \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} - \exp(-i\theta(t)) \sum_1^N \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-it}}$$

La procédure consiste à développer chaque somme autour de sa limite N , ainsi que $\theta(t)$, pour $t \gg 1$. Les termes résultants sont tous réels, comme ils doivent l'être, et coïncident avec ceux obtenus rigoureusement par Riemann et Siegel. De plus, la procédure formelle permet d'établir le comportement d'ordre élevé de la série, indiquant qu'elle diverge factoriellement, bien que de manière légèrement peu familière [23].

Dans la somme principale (2.8), la limite supérieure N dépend de t selon (3.2). La somme principale est donc une fonction discontinue de t . Mais la fonction exacte $Z(t)$ est continue et également lisse, donc l'un des rôles des termes de correction de Riemann-Siegel est de réduire systématiquement les discontinuités dans la valeur et les dérivées de la somme principale. Il existe plusieurs développements plus sophistiqués de $Z(t)$ [23-27], dans lesquels les discontinuités sont lissées.

Toutes les méthodes actuellement utilisées pour les calculs numériques de la fonction zêta et de ses zéros sont basées sur la formule de Riemann-Siegel. La principale difficulté est de calculer la somme principale, mais elle a été surmontée de plusieurs manières [28, 29].

La formule de Riemann-Siegel a une interprétation physique. Une approche de l'hypothèse de Riemann est basée sur la conjecture selon laquelle $Z(t)$ est le déterminant spectral (polynôme caractéristique) d'un opérateur hamiltonien quantique dont la contrepartie classique est un système dynamique chaotique [30-32]. Selon cette analogie, les hauteurs t des zéros de Riemann correspondent aux niveaux d'énergie quantique. Ce système quantique, ainsi que son homologue classique, n'ont pas été identifiés, mais plusieurs de leurs propriétés sont connues. En particulier, la somme principale de Riemann-Siegel est la contrepartie d'une expansion du déterminant spectral quantique comme somme sur des combinaisons d'orbites périodiques du système classique [30, 33, 34], et la divergence de la série pour le reste $R_N(t)$ suggère la nature des orbites périodiques classiques complexes [23]. Des informations supplémentaires sur le système dynamique classique sous-jacent

supposé pourraient être cachées dans la forme détaillée de la série de corrections de Riemann-Siegel, impliquant $\Psi(t)$.

Si Riemann n'avait pas laissé des indices sur sa façon de calculer $Z(t)$ dans son journal, et si Siegel n'avait pas découvert et déchiffré les notes de Riemann, il est probable que nous ignorerions encore leur signification aujourd'hui. La formule de Riemann-Siegel sous-tend une approche de l'hypothèse de Riemann, elle est impliquée dans les liens entre la dynamique chaotique de la mécanique quantique et les nombres premiers, et elle est utilisée dans les calculs des zéros de Riemann. La réalisation de Riemann, innovante à bien des égards, notamment son application de la méthode du point-selle à une intégrale avec une chaîne de pôles, semble encore magique.

Références

- [1] Edwards, H. M., 2001, Riemann's Zeta Function, Dover Publications, Mineola, New York.
- [2] Siegel, C. L., 1932, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik 2, 45-80.
- [3] Siegel, C. L., 1966, Carl Ludwig Siegel Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Wong, R., 1989, Asymptotic approximations to integrals, Academic Press, New York and London.
- [5] de Bruijn, N. G., 1958, Asymptotic Methods in Analysis, North-Holland, reprinted by Dover books 1981, Amsterdam.
- [6] Debye, P., 1909, Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index Math. Ann 67, 535-558.
- [7] Riemann, B., 1863, Sullo svoglimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita in Complete works, 2nd. ed, pp 424-430 eds., Dover 1963, New York.
- [8] Petrova, S. S., Solov'ev, A. D., 1997, The Origin of the Method of Steepest Descent, Historia Mathematica 24, 361-375.
- [9] Stokes, G. G., 1847, On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series, Trans. Camb. Phil. Soc. 9, 379-407.
- [10] Stokes, G. G., 1883, Mathematical and Physical Papers, University Press, Cambridge.
- [11] Kelvin, L., 1887, On the waves produced by single impulse on water of any depth, or in a dispersive medium, Philos. Mag. 23, 252-255.
- [12] DLMF,2010, NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, Cambridge <http://dlmf.nist.gov>.
- [13] Airy, G. B., 1838, On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, Trans. Camb. Phil. Soc. 6, 379-403.

- [14] Chester, C., Friedman, B., Ursell, F., 1957, An extension of the method of steepest descents, Proc. Camb. Phil. Soc. 53, 599-611.
- [15] Duistermaat, J. J., 1974, Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities, Commun Pure App. Math. 27, 207-281.
- [16] Berry, M. V., 1976, Waves and Thom's theorem, Advances in Physics 25, 1-26.
- [17] Dingle, R. B., 1973, Asymptotic Expansions: their Derivation and Interpretation, Academic Press, New York and London.
- [18] Berry, M. V., Howls, C. J., 1991, Hyperasymptotics for integrals with saddles, Proc. Roy. Soc. Lond. A434, 657-675.
- [19] Howls, C. J., 1997, Hyperasymptotics for multidimensional integrals, exact remainder terms and the global connection problem, Proc. Roy. Soc. Lond. A453, 2271-2294.
- [20] Écalle, J., 1985, Les fonctions réurgentes (3 volumes). Pub. math. Orsay
- [21] Berry, M. V., Howls, C. J., 2015, Divergent series: taming the tails in The Princeton Companion to Applied Mathematics, ed. Higham, N., Princeton University Press, Princeton, pp 634-640.
- [22] Keating, J. P., 1993, The Riemann zeta-function and quantum chaology in Quantum Chaos eds. Casati, G., Guarneri, I., Smilansky, U., North-Holland, Amsterdam, pp. 145-185.
- [23] Berry, M. V., 1995, The Riemann-Siegel formula for the zeta function: high orders and remainders, Proc. Roy. Soc. Lond. A450, 439-462.
- [24] Paris, R. B., 1994, An asymptotic representation for the Riemann zeta function on the critical line, Proc. Roy. Soc. Lond. A446, 565-587.
- [25] Paris, R. B., Cang, S., 1997, An exponentially-improved Gram-type formula for the Riemann zeta function, Methods. Appl. Anal. 4, 326-338.
- [26] Paris, R. B., Cang, S., 1997, An asymptotic representation for $\zeta(1/2+it)$, Methods. Appl. Anal. 4, 449-470.
- [27] Kuznetsov, A., 2007, On the Riemann-Siegel formula, Proc. R. Soc. A 463, 2557-2568.
- [28] Odlyzko, A. M., Schönhage, A., 1988, Fast Algorithms for Multiple Evaluations of the Riemann Zeta Function, Trans. Amer. Math. Soc. 309, 797-809.
- [29] Hiary, G. A., 2011, Fast methods to compute the Riemann zeta function, Ann. Math. 174, 891-946.
- [30] Berry, M. V., 1986, Riemann's zeta function: a model for quantum chaos? in Quantum chaos and statistical nuclear physics eds. Seligman, T. H., Nishioka, H., Vol. 263, pp. 1-17.
- [31] Berry, M. V., Keating, J. P., 1999, The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics, SIAM Review 41, 236-266.
- [32] Berry, M. V., 2008, Three quantum obsessions, Nonlinearity 21, T19-T26.
- [33] Berry, M. V., Keating, J. P., 1992, A new approximation for $\zeta(1/2 + it)$ and quantum spectral determinants, Proc. Roy. Soc. Lond. A437, 151-173.
- [34] Keating, J. P., Sieber, M., 1994, Calculation of spectral determinants, Pr. Roy. Soc. Lond. A447, 413-437.