Traduction des pages 282 à 285 du livre de Kevin Broughan "Equivalents of the Riemann hypothesis", vol. 1 : arithmetic equivalents, Cambridge university press, section 10.11 "*Hilbert-Pólya Conjecture*", (Denise Vella-Chemla, décembre 2023).

Pour décrire cette conjecture et l'équivalence, on a d'abord besoin de quelques définitions. Soit H un espace de Hilbert complexe et soit Δ un sous-espace linéaire dense et $T, \Delta \to H$ une transformation linéaire. Soit

$$\Delta_* := \{x \in H : y \to \langle x, Ty \rangle \text{ est une fonctionnelle continue linéaire sur tout } H\}.$$

Par le théorème de représentation de Riesz (volume 2 [32, théorème J.1]), pour tout $x \in \Delta$, il existe un unique $z \in H$ tel que $\langle x, Ty \rangle = \langle z, y \rangle$ pour tout $y \in \Delta$. On définit $T^*(x) = z$, et on appelle la transformation linéaire T^* l'**adjoint** de T. L'application T est dite **auto-adjointe** si le domaine de sa transformation adjointe T^* est également Δ, donc $\Delta_* = \Delta$, et sur ce domaine, on a $T = T^*$, donc pour tout $f, g \in \Delta$ on a $\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$. Par conséquent T est symétrique, une condition plus faible qu'être auto-adjoint.

La conjecture d'Hilbert-Pólya, telle que formulée par Hugh Montgomery en 1973 [119] possiblement pour la première fois, est que si l'on écrit chaque zéro non trivial de $\zeta(s)$ de partie imaginaire positive sous la forme d'un nombre de la forme $\frac{1}{2} + i\gamma_n$, alors les nombres γ_n correspondent aux valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint non borné T. Ceci bien sûr obligerait les γ_n, à être réels et résoudrait l'hypothèse de Riemann.

Puisque (voir Lorch [110, théorème 4-1]) une transformation auto-adjointe définie sur tous les H est nécessairement bornée, on doit avoir $\Delta \neq H$.

Il semble que la conjecture d'Hilbert-Pólya remonte à la toute naissance de l'hypothèse de Riemann. En étudiant la collection de papiers écrits à la main légués à la bibliothèque de l'Université de Göttingen, John Keating a trouvé une note reliant, sur une même page, la stabilité d'un fluide en rotation et des notes sur les zéros de $\zeta(s)$ (voir du Sautoy [151, p. 286]). La condition de la stabilité d'un fluide sujet à une perturbation était que l'ensemble des valeurs propres soient sur une ligne droite ! Une connexion implicite entre l'hypothèse de Riemann et un processus physique !

Andrew Odlyzko tenta[1], au début des années 1980 alors que Pólya était toujours en vie, de retrouver la formulation de la conjecture attribuée à Pólya et Hilbert en correspondant avec Pólya (voir volume 2 [32, Chapitre 5]). Pólya répondit en posant la question de Landau qui demande s'il y a une raison physique qui pourrait faire que l'hypothèse de Riemann soit vraie. La réponse de Pólya fut que ça pourrait être le cas si les zéros non triviaux de la fonction $\xi(s)$ était si liés à un problème physique que l'hypothèse de Riemann serait équivalente au fait que toutes les valeurs propres de ce problème soient réelles. Odlyzko n'a pas pu trouver la référence d'une telle assertion chez Hilbert, mais le nom de la conjecture est maintenant bien établi par l'usage.

Bien qu'au moment de la rédaction de cet article, l'approche d'Hilbert-Pólya n'ait pas réussi à fournir une preuve de l'hypothèse de Riemann, la conjecture a inspiré une grande quantité de travaux et de progrès, à l'intersection des mathématiques et de la physique. L'objectif principal

[1] Note de la traductrice : voir à cette page https://www-users.cse.umn.edu/ odlyzko/polya/index.html.

a été de concevoir l'espace de Hilbert H, le domaine Δ et la transformation T. Les systèmes macroscopiques de mécanique classique, de mécanique quantique et quelques autres ont été étudiés mais personne ne semble s'être approché de ce qui est nécessaire. Certains croient que demander que la transformation soit auto-adjointe est trop restrictif, ou bien que les structures doivent être construites en dehors des seules mathématiques, i.e. en commençant par les entiers. Sir Michael Berry et les personnes qui travaillent avec lui ont donné des spécifications assez précises auxquelles devrait répondre une structure pour aboutir à une démonstration [11].

Comme élément de cette histoire de synergies fructueuses entre les mathématiques et la physique, il y a l'interaction bien connue et souvent rappelée entre Hugh Montgomery et Freeman Dyson lors du thé de l'Institut pour les études avancées (IAS), à Princeton [151, p. 262]. On a relié cette interaction au grand domaine de travail au sujet des matrices aléatoires, qui fut d'abord développé comme une façon d'étudier, statistiquement, les niveaux d'énergie des noyaux lourds, i.e. ceux avec de grandes quantités de neutrons et protons. Les relations avec les résultats des calculs des parties imaginaires des zéros de zeta, spécialement ceux d'Andrew Odlyzko [79, 130], ont été surprenants.

La lecture bibliographique devrait inclure les travaux de Conrey [41], Katz et Sarnak [90] et Rudnick et Sarnak [147]. Du côté physique, il y a un preprint tour d'horizon de Schumayer et Hutchinson [155].

L'une des particularités particulièrement remarquable de la théorie des matrices aléatoires a été l'expression très précise des moments des fonctions de distribution, fournissant les conjectures correspondantes pour les moments de $\zeta(s)$. Voici les moments conjecturés par John Keating et Nina Snaith [91] pour $\zeta(s)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et s sur la droite critique :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^{2k}\,dt \sim g_k a(k)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{k^2},$$

où

$$a(k) := \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(m+k)}{m!\Gamma(k)}\right)^2 \frac{1}{p^m}$$

et

$$g_1 = 1, \qquad g_2 = 1/12, \qquad g_3 = 42/9!, \qquad g_4 = 2024/16!,$$

et

$$G(n) := \prod_{i=0}^{n-2} i! \implies g_k = \frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)}.$$

Des estimations des moments de zeta ont été très significatives, et l'ont été longtemps. Par exemple, Landau dans son traité de 1908 a fourni le théorème suivant pour le cas $k=1$ [51, section 9.7]: étant donné $\epsilon > 0$ et $\sigma_0 > \frac{1}{2}$, il existe un certain T_0 tel que pour tout $\sigma \geq \sigma_0$ et $T \geq T_0$, on a

$$\left|\frac{1}{T-1}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt - \zeta(2\sigma)\right| < \epsilon.$$

Cette estimation a été utilisée par Bohr et Landau [51, section 9.6], avec la formule de Jensen (volume 2 [32, théorème B.5]), pour montrer que le nombre de zéros de zeta dans n'importe quel rectangle $R := [\delta, 1] \times [0, T]$ pour tout $\delta > \frac{1}{2}$ est borné supérieurement par $K_\delta T$. Puisque le nombre total de zéros de zeta $N(T) \in [0, 1] \times [0, T]$ satisfait $N(T) \sim T/(2\pi) \log(T/(2\pi e))$, la proportion de racines dans R divisée par le nombre total jusqu'à T tend vers 0 lorsque $T \to \infty$. Ce résultat est encore l'un des meilleurs éléments en faveur de l'évidence analytique de la vérité de l'hypothèse de Riemann.

Pour des développements significatifs plus récents au sujet des estimations des moments et références, il y a un article de Soundararajan [160].

Chercher une seule transformation auto-adjointe pour résoudre l'hypothèse de Riemann serait peut-être trop demander. Par exemple, associer chaque zéro à une transformation individuelle dépendant du zéro en question donnerait le même résultat. Le travail de Ross Barnett et de l'auteur menant à [21], un article consistant avec la théorie des matrices aléatoires, semble indiquer une relation entre des rotations et les zéros de zeta, qu'il reste à développer complètement.

Théorème 10.45 (critère d'Hilbert-Pólya) *L'hypothèse de Riemann est équivalente à la propriété suivante : pour tout zéro critique ρ de $\zeta(s)$, quand on l'écrit sous la forme $\rho = \frac{1}{2} + i\eta$ il existe une transformation auto-adjointe T_ρ de l'espace de H_ρ telle que η est une valeur propre de T_ρ.*

Preuve. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, posons $H = \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec le produit intérieur euclidien, et pour $n \in \mathbb{N}$ soit $e_n := (0, 0, ..., 1, 0, ...)$ le $n^{\text{ième}}$ élément de la base standard. Si $\rho_n = \frac{1}{2} + i\eta_n$ est le $n^{\text{ième}}$ zéro complexe de partie imaginaire positive, définissons $T : \Delta \to H$ en posant $T(e_n) = \eta_n e_n$, donc

$$T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \eta_n x_n e_n.$$

Soit $\Delta := \{xH : \|T(x)\| < \infty\}$. Puisque le sous-espace linéaire engendré par n'importe quel sous-ensemble fini des (e_n) est dans Δ, Δ est dense dans H. Puisque par l'hypothèse de Riemann tout η_n, est réel, T est auto-adjoint. Poser $T_\rho = T$ complète le raisonnement.