Décidabilité de l'hypothèse de Riemann

Kevin Broughan

Résumé : en utilisant un résultat de la théorie des fonctions récursives et des résultats de Takeuti de l'analyse complexe qui est basée sur une théorie des types et sur le travail de Kreisel, et qui fournit une extension conservative de l'arithmétique de Peano du premier ordre (PA), on montre que RH est décidable dans PA.

1 Introduction

On sait que de nombreuses propositions mathématiques sont indécidables (voir par exemple [2], chapitre 10). Après plus de 160 ans d'efforts acharnés de nombreuses générations de cerveaux des meilleurs mathématiciens mais sans démonstration de l'hypothèse de Riemann (RH), on pourrait supposer qu'elle est aussi indécidable. Pourtant la plupart de ceux qui ont pensé à ce problème croient qu'il peut être résolu, et il y a eu des progrès récents significatifs dans cette direction (roir par exemple le travail de Nicolas, Rogers et Tao, Dobner, Polymath15 et Ono et al, présentés dans [2]).

Dans [2], chapitre 11, il y a des idées de preuves de la façon de montrer que RH est décidable. Pourtant, la supposition que tous les zéros de la droite critique sont simples a été faite. C'est le but de cet article que de supprimer cette supposition.

Pour faire cela, deux théories puissantes sont utilisées : la théorie des fonctions récursives et l'extension de Takeuti de l'arithmétique de Peano du premier ordre, qui est basée sur le travail de Kreisel et sur une forme de théorie des types. Cette extension fournit non seulement une grande part d'analyse réelle et d'analyse complexe, mais elle a aussi la propriété d'être "conservative". Cela signifie que tout ce qui peut être prouvé en utilisant sa théorie peut également être prouvé en utilisant l'arithmétique de Peano.

Le résultat de la théorie des fonctions récursives est beaucoup plus simple à énoncer qu'à comprendre. Il est en contraste saisissant avec le théorème de Rice, qui est souvent utilisé pour démontrer l'ubiquité des propositions indécidables.

Dans la section 2 sont données les définitions principales, la section 3 fournit les lemmes utiles, inclut l'énoncé du résultat de la théorie des fonctions récursives, donne quelques-uns des résultats que l'on utilise à partir du système de Takeuti pour l'analyse réelle et complexe, et on en déduit dans PAT une énumération croissante des zéros distincts de $\zeta(s)$ sur la droite critique qui ont une partie imaginaire positive. Finalement, dans la section 4, on donne une démonstration du résultat principal.

Il va sans dire qu'une preuve de la décidabilité de RH implique que toutes les formes équivalentes de l'hypothèse sont décidables, incluant celles fournies dans [1], [2]. De plus, la simplicité de la

Kevin Broughan : Département de Mathématiques et Statistiques, Université de Waikato, Hamilton, Nouvelle-Zélande.

Référence de l'article original en anglais : https://arxiv.org/pdf/2312.11565.pdf.
Traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2023.

démonstration indique que les extensions à des familles de L-fonctions telles que la classe étendue de Selberg ne devrait pas être trop difficile.

Ce travail est principalement basé sur les méthodes développées par Gaisi Takeuti, qui fait suite à celui de Gerhard Gentzen et George Kreisel. Il y a un résumé d'une partie de ce travail, spécialement celui de Gentzen et Takeuti, dans [2] (voir les sections M.11.6, O.3 et O.4). Pour éviter une éventuelle confusion, Takeuti ne base pas son développement de l'analyse réelle et complexe sur la forme d'arithmétique dont Gentzen a démontré qu'elle était consistante, mais simplement sur l'arithmétique de Peano du premier ordre PA.

2 Définitions

Dans cette section, on énonce les définitions qui sont utilisées dans la présente note. Elles proviennent de la théorie des fonctions récursives, de l'analyse élémentaire complexe de Takeuti, de la logique mathématique, et de la théorie analytique des nombres. Il n'y a pas de dérivations et le lecteur peut avoir besoin de consulter les références.

2.1 Fonctions récursives

Cette étude est basée sur des classes de fonctions $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ où $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ définies procéduralement, et dont le domaine n'est pas nécessairement l'ensemble $\mathbb{N}_0$ complet mais est déterminé par la structure de f (voir [2], sections N.2-N.4 et les références données là, particulièrement [3]).

La classe des **fonctions semi-calculables**, dénotée PRF, est la plus petite classe de fonctions $f \colon \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ pour un certain $k \geq 1$, dont le domaine A ne nécessite pas d'être $\mathbb{N}_0^k$ tout entier, mais est déterminé par la structure de la définition de la fonction, telle que la classe est fermée selon les opérations (a), (b) et (c), où

(a) PRF contient la fonction nulle $Z(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}_0$, la fonction successeur $S(x) = x' = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}_0$, et pour tout j avec $1 \leq j \leq k$ la fonction projection $\pi_j^k(x_1, \ldots, x_k) = x_j$. Ces trois fonctions sont définies partout et sont donc **totales**.

(b) Si $f(\mathbf{x})$ et $g_1(\mathbf{y}), \ldots, g_k(\mathbf{y})$ sont dans PRF, alors la **fonction composée** $h(\mathbf{y}) = f(g_1(\mathbf{y}), \ldots, g_k(\mathbf{y}))$ l'est aussi. Si l'une quelconque des g_j est indéfinie en un vecteur particulier $\mathbf{y}$ alors $f(\mathbf{y})$ l'est aussi.

(c) PRF est fermée selon la **récursion primitive**, notamment si $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x}, y, z)$ sont des fonctions dans PRF alors $h(\mathbf{x}, y)$ l'est aussi, $h(\mathbf{x}, y)$ étant défini par

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}), \\ h(\mathbf{x}, y+1) &= \begin{cases} g(\mathbf{x}, y, h(\mathbf{x}, y)), \\ \uparrow \text{ si } h(\mathbf{x}, y) \text{ est indéfini.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le symbole $\uparrow$ signifie indéfini et $\downarrow$ signifie défini.

(d) L'ensemble des fonctions PRF est fermé selon l'opération de **minimalisation**, notamment, si $g(\mathbf{x}, y)$ est dans PRF alors $h(\mathbf{x}) = \mu_y(g(\mathbf{x}, y) = 0)$ l'est aussi, où

$$\begin{aligned}
&h(\mathbf{x}) \text{ est le plus petit } y \text{ tel que } g(\mathbf{x}, y) = 0,\\
&\qquad\qquad \text{et, pour } 0 \leq j < y,\ \ g(\mathbf{x}, j), \text{ est défini et non nul,}\\
&h(\mathbf{x}) \text{ est indéfini s'il n'existe aucun } y \text{ avec } g(\mathbf{x}, y) = 0,\\
&\qquad\qquad \text{ou, si un tel } y \text{ existe, il existe un } j \text{ avec } 1 \leq j < y \text{ avec } g(\mathbf{x}, j) \text{ indéfini.}
\end{aligned}$$

Les fonctions dans PRF qui sont définies partout sont appelées fonctions totales et le sous-ensemble les contenant est noté TPR.

On utilise la **thèse de Church–Turing** pour simplifier les arguments. Un énoncé de cela est qu'une fonction partielle $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ est dans PRF si et seulement s'il existe un algorithme qui calcule f. C'est dans ce sens que le domaine de f est constitué de tous les points où f renvoie une valeur et le complément du domaine est constitué des points pour lesquels l'algorithme ne s'arrête pas.

Soit $A \subset \mathbb{N}_0^k$ un sous-ensemble. On dit que R est **décidable**[1] si la fonction caractéristique C_A de A est une fonction semi-calculable totale TPR.

Un sous-ensemble A avec $A \subset \mathbb{N}_0$ (ou $\mathbb{N}_0^k$) est **récursivement énumérable** (dénoté r.é.) s'il est le domaine d'une fonction semi-calculable PRF. Ceci est un peu contre-intuitif, mais le sens est plus clair dans le cas $k = 1$ où pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{N}_0$, les énoncés ci-dessous sont équivalents :

(a) A est récursivement énumérable, et

(b) A est l'ensemble vide où le domaine d'une fonction semi-calculable totale TPR sur $\mathbb{N}_0$, [2], théorème N.4.

2.2 Logique mathématique

On a besoin de très peu d'énoncés de ce large domaine d'idées et de techniques. Pour un résumé concis des concepts de base (voir par exemple [2], appendice M, particulièrement la section M.11.1 pour l'arithmétique de Peano du premier ordre PA, et la section M.11.6 pour l'extension conservative de Takeuti de PA pour l'analyse réelle et complexe, que l'on appellera PAT, mais que Takeuti appelle "analyse complexe élémentaire"). Consulter l'article bien écrit de Takeuti [5] est digne d'intérêt, particulièrement les chapitres 3 et 4. La motivation sera augmentée en commençant par lire la dernière section 4.8, où l'on fournit une description de cette sorte de résultats qui ne peuvent pas être prouvés dans PAT comme ceux reposant sur l'axiome du choix,

> ...la théorie analytique des nombres classique, par exemple, la théorie dans [2] (qui est le texte de l'article d'Ingham de 1971, *La distribution des nombres premiers*) peuvent être réalisée dans l'analyse complexe élémentaire.

[1] A au lieu de R ?

Une extension T_2 d'une théorie T_1 est dite **conservative** si toute proposition qui peut être prouvée dans la théorie T_2 peut être prouvée dans T_1.

2.3 Théorie analytique des nombres

On a besoin de très peu d'éléments de la théorie analytique des nombres, seulement les deux fonctions à valeurs réelles de Riemann-Siegel Z et ϑ qui sont définies comme suit (voir [4], section 6.5 ou [6], section 4.17).

Prenons $s = \frac{1}{2} + it$ et $x = y = \sqrt{t/(2\pi)}$ dans l'équation fonctionnelle d'approximation pour $\zeta(s)$, (voir par exemple [2], théorème G.2), pour obtenir

$$\zeta(\tfrac{1}{2} + it) = \textstyle\sum_{n\le x} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} + it} + \chi(\sigma + it) \sum_{n\le x} \frac{1}{n^{-\frac{1}{2}} + it} + O\left(\frac{1}{t^{1/4}}\right),$$

où $|\chi(\frac{1}{2} + it)| = 1$. Définissons

$$\vartheta(t) = -\frac{\arg(\chi(\frac{1}{2} + it))}{2} \text{ et } Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2} + it).$$

On obtient

$$Z(t) = 2\sum_{n\le x} \frac{\cos(\vartheta(t) - t\log n)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{t^{1/4}}\right),$$

et on peut écrire

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

3 Lemmes

Le premier lemme provient de l'analyse réelle de Takeuti FA ([5], chapitre 3) :

Lemme 1. (Takeuti) *([5], proposition 3.5.1) Le supremum d'une séquence réelle qui est bornée supérieurement existe comme nombre réel dans PAT. La propriété correspondante de l'infimum peut être énoncée de façon similaire.*

Lemme 2. *([2], théorème N.10, [3], théorème 7-2.14) Un sous-ensemble de l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}_0$ *est semi-calculable, et par conséquent décidable, si et seulement s'il est le domaine d'une fonction semi-calculable totale croissante, c'est-à-dire s'il peut être énuméré TPR dans un ordre croissant strict.*

Ce lemme suivant est une variation de [2] (3), section 11.10. Tous les arguments peuvent être transportés soit dans les extensions conservatives de Takeuti de PA appelées FA pour analyse mathématique, soit dans son "analyse complexe élémentaire" ou analyse complexe, i.e. dans ce que nous appelons PAT.

Lemme 3. (Énumération des zéros de zeta sur la droite critique)

Les zéros sur la droite critique de $\zeta(s)$ de partie imaginaire positive sont récursivement énumérables TPR dans un ordre croissant.

Preuve : **(1)**
Par le lemme 1, toute séquence réelle qui est bornée supérieurement a une plus petite borne supérieure réelle. Ceci implique que l'axiome archimédien pour le système FA de Takeuti est vérifié, et par conséquent, pour toute paire de réels x, y avec $x < y$, il existe un nombre rationnel r disons tel que $x < r < y$. Par [5], théorème 4.5.2, les zéros des fonctions entières sont isolés.

Par conséquent, les zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique sont isolés dans PAT, et donc, puisque

$$Z(t) = exp(i\vartheta(t))\zeta(\tfrac{1}{2} + it),\ t \in \mathbb{R}$$

il en est de même de $Z(t)$ dans $\mathbb{R}$.

Si γ est un tel zéro et si $x_\gamma < \gamma < y_\gamma$ est un intervalle dans $\mathbb{R}$ qui contient le zéro de zeta de partie imaginaire γ et aucun autre zéro, appelons r_γ un rationnel avec $x_\gamma < r_\gamma < y_\gamma$. Cela montre que les zéros de $Z(t)$ forment un ensemble énumérable.

Par les résultats de Titchmarsh [7], basés sur l'équation fonctionnelle d'approximation [2], théorème G.2, les zéros positifs de $Z(t)$ ont un sous-ensemble infini h_n avec $h_n \to \infty$.

Maintenant appelons γ_1 l'infimum réel de l'ensemble des zéros de $Z(t),\ t > 0$. Puisque les zéros sont isolés $Z(\gamma_1) = 0$. Si γ_n a été défini, soit $\delta > 0$ tel que $Z(t)^2 > 0$ sur $(\gamma_n, \gamma_n + \delta]$ et soit (a_n) une énumeration des zéros de $Z(t),\ t > 0$ qui satisfait $a_n > \delta$. Soit $\gamma_{n+1} = \inf_n a_n$. Alors $Z(\gamma_{n+1}) = 0$ et $Z(t)^2 > 0$ sur (γ_n, γ_{n+1}). Tout ceci est vrai dans FA et donc dans PAT.

(2) Soit $S := \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $T = \{\gamma : Z(\gamma) = 0\}$ donc $S \subset T$. Si $S \neq T$ posons $\gamma \in T \setminus S$. Notons que pour tout n, $\gamma_n < \gamma < \gamma_{n+1}$ est faux, puisque par l'étape (1), on a $Z(t)^2 > 0$ sur (γ_n, γ_{n+1}). Donc $\gamma_n < \gamma$ pour tout n. Par le lemme 1, le supremum $\gamma_0 := \sup \gamma_n$ existe en tant que réel dans FA. Par continuité on a $Z(\gamma_0) = 0$. Mais les zéros sont isolés, donc on doit avoir $\gamma_0 = \gamma_n$ pour un certain n, dont on a vu que c'était faux. Donc $S = T$ et on peut exprimer l'ensemble des zéros positifs de $Z(t)$ comme

$$\{\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \cdots\} \text{ avec } \gamma_n \to \infty.$$

Ceci complète la preuve.

Lemme 4. (Takeuti) *([5], Théorème 4.5.6) Soit f une fonction holomorphe dans un disque Δ et non identiquement nulle dans Δ. Soient z_j les zéros de $f(z)$, chaque zéro étant compté autant de fois que ses multiplicités. Pour toute courbe fermée γ dans Δ qui ne passe pas par un zéro, on a*

$$\sum_j n(\gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

où la somme a seulement un nombre fini de termes non nuls.

4 Résultat

À nouveau, on utilise l'extension conservative de Takeuti de l'arithmétique de Peano, PAT, (voir l'appendice M Section M.11.6), et l'**assertion**, RH est décidable dans PAT et par conséquent dans PA.

Théorème 5. *En supposant l'arithmétique de Peano du premier ordre PA, l'hypothèse de Riemann est décidable.*

Preuve : **(1)** Soit $(\gamma_n : n \in \mathbb{N}_0)$ l'énumération croissante des zéros fournie par le lemme 3. Pour $n, j \in \mathbb{N}_0$, dénotons par $\mathbb{C}_{n,j}$ un contour circulaire centré en γ_n et de rayon $1/j$. Alors par le lemme 4, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{n,j}} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\, dz$$

existe et est décroissante de façon monotone selon j avec des valeurs dans $\mathbb{N}$. Par le lemme 1, la limite

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{n,j}} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\, dz$$

existe dans PAT. C'est la multiplicité du zéro γ_n. Dénotons sa valeur par l'entier positif l_n.

(2) Soit $f(0) = \gamma_0 = 1$, et en utilisant le lemme 3, pour tout $n \geq 1$ soit $f(n) = \gamma_n$ l'énumération strictement croissante des parties imaginaires des zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique. Soit $J_0 := [i, 1+i]$ et pour chaque $n \geq 1$ notons

$$\delta_n := \frac{f(n) + f(n-1)}{2} \text{ and } J_n := [i\delta_n, 1 + i\delta_n].$$

Alors il n'y a aucun zéro de $\zeta(s)$ dans les intervalles J_0 ou J_1. Pour chaque zéro de $\zeta(s)$ dans l'intervalle J_n, indentons le contour avec un chemin semi-circulaire vers le bas, de telle façon que les nouveaux zéros soient associés avec la $n^{\text{ième}}$ région, qui est l'intérieur de la région Δ_n indentée définie suivante.

(3) Maintenant posons $g(0) = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$ définissons le contour rectangulaire

$$\Delta_n := [i\delta_n, 1 + i\delta_n] \cup [1 + i\delta_n, 1 + i\delta_{n+1}] \cup [1 + i\delta_{n+1}, i\delta_{n+1}] \cup [i\delta_{n+1}, i\delta_n],$$

indenté comme nécessaire, et appelons

$$M(n) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Delta_n} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\, dz.$$

Rappelons que l_n est défini dans l'étape (1). Soit

$$g(n) := \begin{cases} g(n-1) & \text{si } M(n) = l_n, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors g est une fonction non décroissante ce qui, par PAT et par la thèse de Church-Turing, est TPR. Par le lemme 2, le domaine de g est un ensemble décidable. Mais ce domaine indice tous les rectangles (potentiellement indentés) contenant un zéro de $\zeta(s)$ en dehors de la droite critique. Par conséquent, RH est décidable.

Remerciements

L'auteur remercie Tim Stokes, Yuri Matiasevich et Alex Weiermann pour leurs communications utiles.

Références

[1] K. A. Broughan, *Equivalents of the Riemann hypothesis, volumes 1 et 2*, Cambridge University Press, 2017.

[2] K. A. Broughan, *Equivalents of the Riemann hypothesis, volume 3*, Cambridge University Press, 2023.

[3] N. Cutland, *Computability: an introdution to recursive function theory.*

[4] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974. Réimprimé par Dover, 2001.

[5] G. Takeuti, *Two applications of logic to mathematics*, Iwanami Shoten et Princeton University Press, 1978.

[6] E.C. Titchmarsh, D.R. Heath-Brown, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, seconde édition, Oxford University Press, 1986.

[7] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV)*, Quart. J. Math. Oxford sér. **5** (1934), 98–105.

Traduction de deux commentaires sur Mathstodon
(ici https://mathstodon.xyz/@andrejbauer/111615373550038171
ou là https://mathstodon.xyz/@highergeometer/111614696487775322) :

Andrej Bauer : J'ai aussi passé du temps à regarder l'extension conservative de l'arithmétique de Peano de Takeuti. L'auteur de l'article sur arxiv commet trop de négligences pour qu'on le croie, par exemple, il donne une définition erronée de la conservativité (il fait une erreur courante), donc je ne crois pas que l'auteur soit suffisamment compétent en logique.

En fait, l'assertion du titre est fausse.

L'auteur fait la chose suivante. Il montre que l'ensemble des (codes des) rectangles rationnels qui contiennent des zéros en dehors de la droite critique est récursif. Il appelle cela la "décidabilité de l'hypothèse de Riemann" (HR), mais ça ne l'est pas. Tout ce qu'il a montré, c'est que HR est équivalent à l'assertion qu'un certain ensemble décidable est vide, ce qui est une Π_1-assertion (et non pas une Δ_0-assertion, qui est ce que devrait être la décidabilité), mais ceci n'est pas nouveau.

Antoine Chambert-Loir : Pour diverses raisons, mon sentiment est désespérément négatif... La présence de trivialités, telles que le fait que l'ensemble des zéros de zeta soit un ensemble dénombrable, par exemple, est un indice que quelque-chose "doit" être faux. Attribuer un résultat standard concernant les fonctions holomorphes (la formule de Cauchy) à Takeuti est un autre indice.

D'un autre côté, les personnes qui ont testé HR sur un certain domaine savent très bien qu'on peut prouver que la partie réelle de certains zéros est exactement 1/2 en utilisant la formule de Rouché - une fois que vous savez qu'un contour contient exactement un zéro (en intégrant zeta'/zeta le long de ce contour), les symétries vous montrent que sa partie réelle doit être 1/2, sinon, il y aurait 2 zéros...