

LA LOGIQUE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE
GARRETT BIRKHOFF, JOHN VON NEUMANN

1. Introduction. Un des aspects de la théorie quantique qui a attiré la plus grande attention, c'est la nouveauté des notions logiques qu'elle présuppose. Elle affirme que même une description mathématique complète d'un système physique ne permet pas en général à quiconque de prédire avec certitude le résultat d'une expérience sur \mathfrak{S} , et qu'en particulier, on ne peut jamais prédire avec certitude à la fois la position et le moment de \mathfrak{S} (principe d'incertitude de Heisenberg). Elle affirme de plus que la plupart des paires d'observations sont incompatibles, et ne peuvent être faites simultanément sur \mathfrak{S} (principe de non-commutativité des observations).

L'objet du présent article est de découvrir quelle structure logique on peut espérer trouver dans les théories physiques qui, comme la mécanique quantique, ne se conforment pas à la logique classique. Notre conclusion principale, basée sur des arguments heuristiques communément admis, est qu'on peut raisonnablement s'attendre à trouver un calcul propositionnel qui est formellement indistinguable du calcul des sous-espaces linéaires selon les *produits ensemblistes*, les *sommes linéaires*, et les *complémentaires orthogonaux* - et ressemble aux connecteurs logiques du calcul propositionnel habituel *et*, *ou*, et *non*.

Pour éviter de s'engager dans la théorie quantique dans sa forme présente, on a d'abord (dans les §§ 2-6) énoncé l'argument heuristique qui suggère qu'un tel calcul est le bon en mécanique quantique, et alors (dans les §§ 7-14), on a reconstruit ce calcul à partir du point de vue axiomatique. Dans les deux parties, on a tenté de clarifier la discussion par une comparaison continue avec la mécanique classique et son calcul propositionnel. L'article se termine par quelques tentatives de conclusions qui peuvent être tirées du matériau qui vient d'être résumé.

I. CONTEXTE PHYSIQUE

2. Observations sur les systèmes physiques. Le concept de "système physique" observable physiquement est présent dans toutes les branches de la physique, et on peut le supposer.

Il est clair qu'une "observation" d'un système physique \mathfrak{S} peut être généralement décrite comme une écriture des lectures de différentes¹ mesures compatibles. Ainsi si les mesures sont dénotées par les symboles μ_1, \dots, μ_n , alors une observation de \mathfrak{S} consiste à spécifier les nombres x_1, \dots, x_n correspondant aux différents μ_k .

Il en découle que la forme la plus générale d'une prédiction concernant \mathfrak{S} est que le point (x_1, \dots, x_n) déterminé en mesurant vraiment μ_1, \dots, μ_n appartiendra à un sous-ensemble S du (x_1, \dots, x_n) -espace. Par conséquent, si on appelle (x_1, \dots, x_n) -espaces associés à \mathfrak{S} , ses "espaces d'observation",

Reçu le 4 avril 1936.

Référence : *The Annals of Mathematics*, 2nd Sér., Vol. 37, N° 4 (Oct 1936), 823-843.

Transcription, traduction, Denise Vella-Chemla, janvier 2023.

¹Si on préfère, on peut regarder un ensemble de mesures compatibles comme une seule "mesure" composite - et également admettre des lectures non numériques - sans interférer avec les arguments suivants.

Parmi les observables visibles en théorie quantique, on trouve la position, le moment, l'énergie, et la symétrie (non numérique).

on peut appeler les sous-espaces des espaces d'observation associés à n'importe quel système physique \mathfrak{S} , "propositions expérimentales" concernant \mathfrak{S} .

3. Espace des phases. Il y a un concept que la théorie quantique partage avec la mécanique classique et avec l'électrodynamique classique. C'est le concept d'un "espace des phases" mathématique.

Selon ce concept, tout système physique \mathfrak{S} est à tout instant hypothétiquement associé à un "point" p dans un espace des phases fixé Σ ; ce point est supposé représenter mathématiquement l'"état" de \mathfrak{S} , et l'"état" de \mathfrak{S} est supposé être vérifiable par des observations "maximales"².

De plus, le point p_0 associé à \mathfrak{S} à un instant t_0 , avec une "loi de propagation" mathématique prescrite, détermine le point p_t associé à \mathfrak{S} à tout instant ultérieur t ; cette supposition incarne évidemment le principe de *causalité mathématique*³.

Ainsi en mécanique classique, chaque point de Σ correspond à un choix de n coordonnées de positions et de n coordonnées de moments conjugués - et la loi de propagation peut être la loi d'attraction inverse des carrés. Par conséquent, dans ce cas, Σ est une région de l'espace ordinaire de dimension $2n$. En électrodynamique, les points de Σ peuvent seulement être spécifiés après que certaines *fonctions* - telles que les potentiels électromagnétique et électrostatique - soient connues ; ainsi Σ est un espace de fonctions d'un nombre de dimensions infini. De façon similaire, en théorie quantique, les points de Σ correspondent à ce qu'on appelle les "fonctions d'ondes", et alors Σ est à nouveau un espace de fonctions - habituellement supposé être un espace de Hilbert⁴.

En électrodynamique, la loi de propagation est contenue dans les équations de Maxwell, et en théorie quantique, dans les équations dues à Schrödinger. Dans tous les cas, on peut imaginer que la loi de propagation induit un mouvement de fluide stable dans l'espace des phases.

On a observé de façon fructueuse que dans de nombreux cas importants de la dynamique classique, ce flot conserve les volumes. On peut noter qu'en mécanique quantique, le flot conserve les distances (i.e., les équations sont "unitaires").

4. Les propositions comme sous-ensembles de l'espace des phases. Maintenant avant qu'un espace des phases ne puisse devenir imprégné de réalité, ses éléments et sous-ensembles doivent être corrélés d'une certaine manière avec des "propositions expérimentales" (qui sont des sous-ensembles de différents espaces d'observation). De plus, cela doit être fait de telle manière que l'inclusion en théorie des ensembles (qui est l'analogue de l'implication logique) soit préservée.

Il y a une façon évidente de faire cela dans les systèmes dynamiques de type classique⁵. On peut mesurer la position et sa vitesse dérivée du temps - et par conséquent le moment - explicitement, et ainsi établir une correspondance bijective qui préserve l'inclusion entre les sous-ensembles de

²L. Pauling et E. B. Wilson, "*Une introduction à la mécanique quantique*", McGraw-Hill, 1935, p. 422. Dirac, "*Mécanique quantique*", Oxford, 1930, § 4.

³Pour l'existence d'une causalité mathématique, voir également p. 65 du livre de Heisenberg "*Les principes physiques de la théorie quantique*", Chicago, 1929.

⁴Cf. J. von Neumann, "*Mathematische Grundlagen der Quanten-mechanik*", Berlin, 1931. p. 18.

⁵Comme les systèmes idéalisant le système solaire ou le mouvement d'un projectile.

l'espace des phases et les sous-ensembles d'un espace d'observation adéquat.

Dans les cas de la théorie cinétique des gaz et des ondes électromagnétiques, aucune procédure simple n'est possible, mais on a imaginé pendant longtemps que des "démons" de taille suffisamment petite pourraient en traçant le mouvement de chaque particule ou par un dynamomètre et des charges ponctuelles infinitésimales et des aimants, mesurer les quantités correspondant à toute coordonnée de l'espace des phases qui interviendrait.

En théorie quantique, on n'imagine même pas cela, et la possibilité de prédire en général les lectures des mesures d'un système physique \mathfrak{S} à partir d'une connaissance de son "état" est inenvisageable ; seules les prédictions statistiques sont toujours possibles.

Cela a été interprété comme une renonciation de la doctrine de la pré-détermination ; une analyse réfléchie montre qu'une idée différente et plus subtile entre en jeu. L'idée centrale est que les quantités physiques sont *reliées*, mais ne sont pas toutes calculables à partir d'un certain nombre de quantités *indépendantes de base* (telles que la position et la vitesse)⁶.

On montrera dans le §12 que cette situation a un analogue algébrique exact dans le calcul des propositions.

5. Le calcul propositionnel en dynamique classique. On voit donc que l'acceptation non critique des idées de la dynamique classique (particulièrement lorsqu'elles font intervenir des problèmes à n corps) amène à identifier chaque sous-ensemble de l'espace des phases avec une proposition expérimentale (la proposition que le système considéré a des coordonnées de position et de moment qui satisfont certaines conditions) et inversement.

On voit clairement que cela n'est pas réaliste, par exemple, comme il était absurde d'appeler "proposition expérimentale" l'assertion que le moment angulaire (en radians par seconde) de la Terre autour du Soleil était à un certain instant un nombre rationnel !

Effectivement, au moins en statistiques, il semble mieux de supposer que ce sont les sous-ensembles mesurables au sens de Lebesgue d'un espace des phases qui correspondent aux propositions expérimentales, deux sous-ensembles étant identifiés, si leur différence a une mesure de Lebesgue nulle⁷.

Mais dans tous les cas, la somme en théorie des ensembles et le produit de n'importe quels deux sous-ensembles, et le complément de n'importe quel sous-ensemble de l'espace des phases correspondant aux propositions expérimentales ont la même propriété. C'est-à-dire, par définition⁸

Les propositions expérimentales concernant n'importe quel système en mécanique classique correspondent à un "corps" de sous-ensembles de son espace des phases. Plus précisément : au "quo-

⁶Une situation similaire a lieu quand on essaie de corrélérer les polarisations dans différents plans des ondes électromagnétiques.

⁷Cf. J. von Neumann, "Operatorenmethoden in der klassischen Mechanik", Annals of Math. 33 (1932), 595-8. La différence de deux ensembles S_1, S_2 , est l'ensemble $(S_1 + S_2) - S_1 \cdot S_2$ de ces points qui appartiennent à l'un des deux, mais pas aux deux à la fois.

⁸F. Hausdorff, "Mengenlehre", Berlin, 1927, p. 78.

tient” d’un tel corps par un idéal qu’il contient. À n’importe quel niveau, ils forment une “algèbre booléenne”.⁹

Dans la discussion axiomatique du calcul propositionnel qui suit, on montrera que ceci est inévitable quand on traite des mesures compatibles exclusivement, et également que le corps particulier d’ensembles qui est utilisé est logiquement immatériel.

6. Un calcul propositionnel pour la mécanique quantique. La question de la connexion en mécanique quantique entre les sous-ensembles des espaces d’observation (ou les “propositions expérimentales”) et les sous-ensembles de l’espace des phases d’un système \mathfrak{S} , n’a pas été évoquée. La section présente sera consacrée à définir une telle connexion, en prouvant certains faits à son sujet, et en obtenant à partir d’elle de façon heuristique un calcul propositionnel pour la mécanique quantique en introduisant un postulat plausible.

Pour cela, observons que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, sont n’importe quelles observations compatibles sur un système de mécanique quantique \mathfrak{S} avec pour espace des phases \sum , alors¹⁰ il existe un ensemble de sous-espaces linéaires fermés mutuellement orthogonaux Ω_i de \sum (qui correspond aux familles de fonctions propres satisfaisant $\alpha_1 f = \lambda_{i,1} f, \dots, \alpha_n f = \lambda_{i,n} f$) tels que *tout* point (ou fonction) $f \in \sum$ peut s’écrire de façon unique sous la forme

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \dots [f_i \in \Omega_i]$$

Par conséquent, si on énonce la

DÉFINITION : Par “représentation mathématique” d’un sous-ensemble S de n’importe quel espace d’observation (déterminé par les observations compatibles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) pour un système mécanique quantique \mathfrak{S} , on voudra dire l’ensemble de tous les points de l’espace des phases de \mathfrak{S} , qui sont déterminés linéairement par des fonctions propres f_k satisfaisant $\alpha_1 f_k = \lambda_1 f_k, \dots, \alpha_n f_k = \lambda_n f_k$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S$.

Alors il s’ensuit immédiatement de cela : (1) que la représentation mathématique de toute proposition expérimentale est un sous-espace linéaire fermé de l’espace de Hilbert et (2) puisque tous les opérateurs de la mécanique quantique sont hermitiens, que la représentation mathématique du négatif¹¹ de toute proposition expérimentale est le *complément orthogonal* de la représentation mathématique de la proposition elle-même et (3) que les trois conditions suivantes sur deux propositions expérimentales P et Q concernant un type donné de système physique sont équivalentes :

(3a) La représentation mathématique de P est un sous-ensemble de la représentation mathématique de Q .

(3b) P implique Q - c’est-à-dire qu’à chaque fois qu’on peut prédire P avec certitude, on peut prédire Q avec certitude.

(3c) Pour tout ensemble statistique de systèmes, la probabilité de P est au plus la probabilité de

⁹M. H. Stone, “*Boolean Algebras and their application to topology*”, Proc. Nat. Acad. 20 (1934), p. 197.

¹⁰Cf. von Neumann, op. cit., pp. 121, 90, ou Dirac, op. cit., 17. On oublie les complications dues à la possibilité d’un spectre continu. Elles sont non essentielles dans le cas présent.

¹¹Par le “négatif” d’une proposition expérimentale (ou d’un sous-ensemble S d’un espace d’observations, on veut dire la proposition expérimentale correspondant à l’auto-complément de S dans le même espace d’observation.

Q.

L'équivalence de (3a)-(3c) amène à regarder l'agrégat des représentations mathématiques des propositions expérimentales concernant tout système physique \mathfrak{S} , comme représentant mathématiquement le calcul propositionnel pour \mathfrak{S} .

On introduit maintenant le

POSTULAT : *Le produit en théorie des ensembles de n'importe quelle représentation mathématique de propositions expérimentales à propos d'un système de mécanique quantique, est lui-même la représentation mathématique d'une proposition expérimentale.*

REMARQUES : Ce postulat devrait clairement être impliqué par la conjecture qui n'est pas non naturelle que tous les opérateurs symétriques hermitiens dans l'espace de Hilbert (espace des phases) correspondent à des observables ¹² ; la conjecture impliquerait même que ces opérateurs qui correspondent aux observables devraient coïncider avec les éléments hermitiens symétriques d'un anneau opérateur adéquat M ¹³.

Maintenant la somme fermée linéaire $\Omega_1 + \Omega_2$ de n'importe quels deux sous-espaces linéaires fermés Ω_i de l'espace de Hilbert, est le complémentaire orthogonal du produit ensembliste $\Omega'_1 \cdot \Omega'_2$ des complémentaires orthogonaux Ω'_i des Ω_i ; par conséquent si on ajoute le postulat ci-dessus aux postulats habituels de la théorie quantique, alors on peut déduire que

Le produit ensembliste et la somme linéaire fermée de n'importe quels deux sous-espaces linéaires fermés et le complémentaire orthogonal de n'importe quel sous-espace linéaire fermé d'un espace de Hilbert représentant mathématiquement une proposition expérimentale concernant un système de mécanique quantique \mathfrak{S} , lui-même représente une proposition expérimentale concernant \mathfrak{S} .

Cela définit le calcul des propositions expérimentales concernant \mathfrak{S} , comme un calcul avec trois opérations et une relation d'implication, qui ressemblent beaucoup aux systèmes définis au §5. Nous allons maintenant nous tourner vers l'analyse et la comparaison des trois calculs du point de vue de l'analyse algébrique axiomatique.

II. ANALYSE ALGÈBRIQUE

7. L'implication vue comme un ordre partiel. Il a été suggéré ci-dessus que dans toute théorie physique faisant intervenir un espace des phases, les propositions expérimentales concernant un système \mathfrak{S} correspondent à une famille de sous-ensembles de son espace des phases Σ , de telle manière que “ x implique y ” (x et y étant deux n'importe quelles propositions expérimentales)

¹²i.e., étant donné un tel opérateur α , on “pourrait” trouver un observable pour lequel les états propres seraient les fonctions propres de α .

¹³F. J. Murray and J. v. Neumann, “On rings of operators”, Annals of Math., 37 (1936), p. 120. Est montré p. 141, loc. cit. (Définition 4.2.1 et lemme 4.2.1), que les ensembles linéaires fermés d'un anneau M - c'est-à-dire les “opérateurs de projection” auxquels M appartient - coïncident avec les ensembles linéaires fermés qui sont invariants selon un certain groupe de rotations de l'espace de Hilbert. Et la dernière propriété est conservée de façon évidente quand il y a intersection du point de vue de la théorie des ensembles.

signifie que le sous-ensemble de Σ correspondant à x est contenu au sens de la théorie des ensembles dans le sous-ensemble correspondant à y . Cette hypothèse est clairement importante dans la mesure où des relations d'implication existent entre des propositions expérimentales correspondant aux sous-ensembles de différents espaces d'observation.

La section présente sera consacrée au fait de corroborer cette hypothèse en identifiant les propriétés algébriques axiomatiques de l'implication logique avec celles de l'inclusion ensembliste.

On admet habituellement que les relations d'“implication” sont des relations qui satisfont seulement

S1 : x implique x .

S2 : Si x implique y et y implique z , alors x implique z .

S3 : Si x implique y et y implique x , alors x et y sont logiquement équivalents.

En fait, S3 n'a pas besoin du tout d'être énoncé comme un postulat, mais peut être regardé comme une définition de l'équivalence logique. En poursuivant cette ligne de pensée, on peut interpréter comme une “qualité physique”, l'ensemble de toutes les propositions expérimentales équivalentes à une proposition expérimentale donnée¹⁴.

Maintenant si on regarde l'ensemble S_x des propositions impliquant une proposition donnée x comme un “représentant mathématique” de x , alors par S3, la correspondance entre les x et les S_x est une correspondance un-un, et x implique y si et seulement si $S_x \subset S_y$. Alors qu'inversement, si L est n'importe quel système de sous-ensembles X d'une classe fixée Γ , alors il y a un isomorphisme qui envoie l'inclusion sur l'implication logique entre L et le système L^* de propositions “ x est un point de X ”, $X \in L$.

On voit ainsi que les propriétés de l'implication logique sont indistingables de celles de l'inclusion ensembliste, et qu'ainsi il est *algébriquement* raisonnable d'essayer de corréler les qualités physiques avec les sous-ensembles de l'espace des phases.

Un système satisfaisant S1-S3, et dans lequel la relation “ x implique y ” s'écrit $x \subset y$, est habituellement¹⁵ appelé un “système partiellement ordonné”, et ainsi, notre premier postulat concernant le calcul propositionnel est que *les qualités physiques attribuables à n'importe quel système physique forment un système partiellement ordonné*.

Il ne semble pas excessif de requérir de plus qu'un tel calcul quelconque contienne deux propositions particulières : la proposition \square que le système considéré *existe*, et la proposition \odot qu'il *n'existe pas*. Clairement

S4 : $\odot \subset x \subset \square$ pour tout x .

\odot est, d'un point de vue logique, le “identiquement faux” ou la proposition “absurde” ; \square est le

¹⁴Ainsi dans le §6, les sous-espaces linéaires fermés de l'espace de Hilbert sont en correspondance un-plusieurs avec les propositions expérimentales, mais en correspondance un-un avec les qualités physiques dans ce sens-là.

¹⁵F. Hausdorff, “*Grundzüge der Mengenlehre*”, Leipzig, 1914, Chap. VI, §1.

“identiquement vrai” ou proposition “auto-évidente”.

8. Treillis. Dans tout calcul des propositions, il est naturel d’imaginer qu’il y a une proposition la plus faible, et une proposition la plus forte, impliquées par n’importe quelle paire de propositions. En fait, des recherches au sujet de systèmes partiellement ordonnés selon différents angles indiquent toutes que la première propriété qu’ils semblent posséder est l’existence d’une plus grande borne inférieure et d’une plus petite borne supérieure de leurs éléments. En accord avec cela, on énonce la

DÉFINITION : Un système partiellement ordonné L sera appelé un “treillis” si et seulement si à n’importe quelle paire x et y de ses éléments, il correspond

S5 : une “plus grande borne inférieure” (rencontre) $a \cap y$ telle que (5a) $x \cap y \subset z$, (5b) $x \cap y \subset y$, (5c) $z \subset x$ et $z \subset y$ implique $z \subset x \cap y$.

S6 : Une “plus petite borne supérieure” (jointure) $x \cup y$ satisfaisant (6a) $x \cup y \supset x$, (6b) $x \cup y \supset y$, (6c) $w \supset x$ et $w \supset y$ implique $w \supset x \cup y$.

La relation entre les rencontres et les jointures et l’inclusion abstraite peut être résumée comme suit¹⁶,

(8.1) Dans tout treillis L , les identités formelles suivantes sont vraies,

L1 : $a \cap a = a$ et $a \cup a = a$.

L2 : $a \cap b = b \cap a$ et $a \cup b = b \cup a$.

L3 : $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ et $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.

L4 : $a \cup (a \cap b) = a \cap (a \cup b) = a$.

De plus, les relations $a \supset b$, $a \cap b = b$, et $a \cup b = a$ sont équivalentes - chacune implique les deux autres.

(8.2) Inversement, pour n’importe quel ensemble d’éléments satisfaisant L2-L4 (L1 est redondant), $a \cap b = b$ et $a \cup b = a$ sont équivalents. Et si on les définit comme signifiant $a \supset b$, alors on réalise que L est un treillis.

Clairement, L1-L4 sont des propriétés formelles bien connues de *et* et *ou* en logique ordinaire. Cela donne une raison algébrique pour admettre comme un *postulat* (si nécessaire) l’énoncé qu’un calcul donné de propositions est un treillis. Il y a d’autres raisons¹⁷ qui pousse quelqu’un à admettre comme un postulat l’énoncé plus fort que le produit ensembliste de deux sous-ensembles quelconques d’un espace des phases qui correspond aux qualités physiques, représente lui-même une qualité physique - ceci est, bien sûr, le postulat du §6.

¹⁶Le résultat final a été trouvé indépendamment par O. Öre, “*The foundations of abstract algebra. I.*”, Annals of Math. 36 (1935), 406-37, et par H. MacNeille dans sa thèse doctorale à Harvard, 1935.

¹⁷La première raison est que cela n’implique aucune restriction sur la nature abstraite d’un treillis - n’importe quel treillis peut être réalisé comme un système de ses propres sous-ensembles, de telle manière que $a \cup b$ est le produit ensembliste de a et b . La seconde raison est que si l’on regarde un sous-ensemble S de l’espace des phases d’un système \mathfrak{S} comme correspondant à la *certitude* d’observer \mathfrak{S} dans S , alors il est naturel de supposer que la certitude combinée d’observer \mathfrak{S} dans S et T est la certitude d’observer \mathfrak{S} dans $S \cdot T = S \cap T$, - et suppose la théorie quantique.

Ça vaut le coup de remarquer qu'en mécanique classique, on peut aisément définir la rencontre et la jointure de deux n'importe quelles propositions expérimentales comme une *proposition expérimentale* - simplement en ayant des observateurs indépendants qui lisent les mesures avec n'importe quelle proposition impliquée, et combinent logiquement les résultats. Ceci est vrai en mécanique quantique seulement exceptionnellement - seulement quand toutes les mesures impliquées commutent (sont compatibles) ; en général, on peut seulement exprimer la jointure ou la rencontre de deux propositions expérimentales données comme une classe de propositions logiquement équivalentes - i.e., comme une *qualité physique*¹⁸.

9. Treillis complémentés. Outre les opérations (binaires) de formation des rencontre-et-jointures, il y a une troisième opération (unaire) qui peut être définie dans les systèmes partiellement ordonnés. C'est l'opération de *complémentation*.

Dans le cas des treillis isomorphes aux "corps" d'ensembles, la complémentation correspond au passage à l'ensemble complémentaire. Dans le cas des sous-espaces fermés linéaires de l'espace de Hilbert (ou du n -espace cartésien), cela correspond au passage au complémentaire orthogonal. Dans les deux cas, en dénotant le "complémentaire" d'un élément a par a' , on a les identités formelles,

$$\text{L71 : } (a')' = a.$$

$$\text{L72 : } a \cap a' = \odot \text{ et } a \cup a' = \square.$$

$$\text{L73 : } a \subset b \text{ implique } a' \supset b'.$$

Par définition, L71 et L73 reviennent à affirmer que la complémentation est un "automorphisme dual" de période deux. C'est un corollaire immédiat de cela et de la dualité entre les définitions (en terme d'inclusion) de la rencontre et de la jointure, que

$$\text{L74 : } (a \cap b)' = a' \cup b' \text{ et } (a \cup b)' = a' \cap b'$$

et un autre corollaire que la seconde moitié de L72 soit redondante.

Preuve : par L71 et par la première moitié de L74, $(a \cup a') = (a'' \cup a') = (a' \cap a)' = \odot'$, alors que selon l'inversion de l'inclusion, \odot devient évidemment \square . Cela permet de déduire L72 de la supposition plus faible que $a \subset a'$ implique $a = \odot$.

$$\text{Preuve : pour tout } x, (x \cap x')' = (x' \cup x'') = x' \cup x \supset x \cap x'.$$

Par conséquent, si on suppose comme un postulat l'assertion que *le passage d'une proposition expérimentale a à son complémentaire a' est un automorphisme dual de période deux, et a implique a' est absurde*, on a en effet supposé L71-L74.

Ce postulat est indépendamment suggéré (et L71 l'a démontré) par le fait que le "complémentaire" de la proposition que les lectures x_1, \dots, x_n , à partir d'une série d'observations compatibles μ_1, \dots, μ_n

¹⁸Le point suivant devrait être mentionné de façon à éviter toute incompréhension : si a, b sont deux qualités physiques, alors $a \cup b$, $a \cap b$ et a' (cf. ci-dessous) sont également des qualités physiques (et il en est également ainsi de \odot et \square). Mais $a \subset b$ n'est pas une qualité physique ; c'est une relation entre des qualités physiques.

appartiennent à un sous-ensemble S du (x_1, \dots, x_n) -espace, est par définition la proposition que les lectures appartiennent à l'ensemble complémentaire de S .

10. Identité distributive. Jusque là, on a seulement discuté des caractéristiques formelles des structures logiques qui semblent être communes à la dynamique classique et à la théorie quantique. Tournons-nous maintenant vers la différence centrale entre elles - l'*identité distributive* du calcul propositionnel :

$$L6 : a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \text{ et } a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

qui est une loi en mécanique classique, mais non pas en mécanique quantique.

D'un point de vue axiomatique, chaque moitié de L6 implique l'autre¹⁹. De plus, soit la moitié de L6, prise avec L72, implique L71 et L73, et supposer L6 et L72 revient à supposer la définition habituelle de l'algèbre booléenne²⁰. Également, dans tout treillis satisfaisant L6, l'isomorphisme selon l'inclusion implique l'isomorphisme selon la complémentation ; cela doit être vrai si L6 n'est pas supposé, comme le treillis des sous-espaces linéaires le montre par l'origine du n -espace cartésien.

D'un point de vue mathématique plus profond, L6 est la propriété caractéristique de la combinaison d'ensembles. Plus précisément, chaque "corps" d'ensembles est isomorphe à une algèbre booléenne, et inversement²¹. Cela apporte une nouvelle lumière sur le fait bien connu que les calculs propositionnels de la mécanique classique soient des algèbres booléennes.

Il est intéressant que L6 soit aussi une conséquence logique de la compatibilité des observables intervenant dans a, b , et c . C'est à dire que si les observations sont faites par des observateurs indépendants, et combinées selon les règles habituelles de la logique, on peut prouver L1-L4, L6, et L71-74.

Ces faits suggèrent que la loi distributive peut échouer en mécanique quantique. Le fait qu'elle *échoue effectivement* est montré par le fait que si a dénote l'observation expérimentale d'un paquet d'ondes ψ d'un côté d'un plan dans l'espace ordinaire, a' correspondant à l'observation de ψ de l'autre côté, et si b est l'observation de ψ dans un état symétrique par rapport au plan (comme on peut facilement le vérifier) :

$$b \cap (a \cup a') = b \cap \square = b > \odot = (b \cap a) = (b \cap a') \\ = (b \cap a) \cup (b \cap a')$$

REMARQUE : En relation avec cela, c'est un fait saillant que la loi distributive *généralisée* de la logique :

$$L6^* : \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j(i)} \left(\prod_{i=1}^m a_{i,j(i)} \right)$$

¹⁹R. Dedekind, "*Werke*", Braunschweig, 1931, vol. 2, p. 110.

²⁰G. Birkhoff, "*On the combination of subalgebras*", Proc. Camb. Phil. Soc. 29 (1933), 441-64, §§ 23-4

²¹M. H. Stone, "*Boolean algebras and their application to topology*", Proc. Nat. Acad. 20 (1934), 197-202.

échoue dans l'algèbre quotient du corps des ensembles à mesure de Lebesgue par l'idéal des ensembles de mesure de Lebesgue valant 0, ce qui est si fondamental en statistiques et dans la formulation du principe ergodique²².

11. L'identité modulaire. Bien que des sous-espaces linéaires fermés de l'espace de Hilbert et que le n -espace cartésien n'aient pas besoin de satisfaire L6 par rapport aux produits ensemblistes et aux sommes linéaires fermées, les propriétés formelles de ces opérations ne sont pas restreintes à L1-L4 et L71-L73.

En particulier, les produits ensemblistes et les sommes linéaires directes sont connus²³ pour satisfaire ce qu'on appelle l'"identité modulaire".

L5 : Si $a \subset c$, alors $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$.

Par conséquent (puisque la somme linéaire de deux sous-espaces linéaires quelconques de l'espace de Hilbert est elle-même de dimension finie et par conséquent fermée), les produits ensemblistes et les sommes linéaires *fermées* des sous-espaces *de dimension finie* de n'importe quel espace linéaire topologique tel que le n -espace cartésien ou l'espace de Hilbert satisfont L5, eux-aussi.

On peut interpréter L5 directement de différentes manières. D'abord, c'est évidemment une loi associative sur les jointures et les rencontres mélangés. L5 peut être également aussi bien regardé comme une loi distributive affaiblie, puisque si $a \subset c$, alors $a \cup (b \cap c) = (a \cap c) \cup (b \cap c)$ et $(a \cup b) \cap c = (a \cup b) \cap (a \cup c)$. Et L5 est auto-dual : remplacer \subset, \cap, \cup par \supset, \cup, \cap remplace simplement a, b, c , par c, b, a .

Aussi, graphiquement parlant, supposer qu'un treillis L est modulaire (i.e., satisfait L5) est équivalent à²⁴ dire que L ne contient pas de sous-treillis isomorphe au treillis dessiné dans la figure 1 :

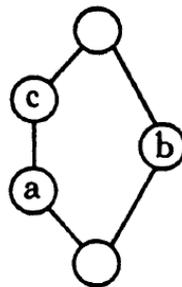


FIGURE 1

Par conséquent dans l'espace de Hilbert, on peut trouver un contre-exemple à L5 de ce type.

²²Une explication détaillée sera omise, pour raccourcir le présent article ; on peut se référer au travail de G. D. Birkhoff, J. von Neumann, et A. Tarski.

²³G. Birkhoff, op. cit., § 28. La preuve est aisée. On note d'abord que puisque $a \subset (a \cup b) \cap c$ si $a \subset c$, et $b \cap c \subset (a \cup b) \cap c$ dans tous les cas, $a \cup (b \cap c) \subset (a \cup b) \cap c$. Alors on note que n'importe quel vecteur dans $(a \cup b) \cap c$ peut s'écrire $\xi = \alpha + \beta$ [$\alpha \in a, \beta \in b, \xi \in c$]. Mais $\beta = \xi - \alpha$ est dans c (puisque $\xi \in c$ et $\alpha \in a \subset c$) ; par conséquent $\xi = \alpha + \beta \in a \cup (b \cap c)$, et $a \cup (b \cap c) \supset (a \cup b) \cap c$, ceci complétant la preuve.

²⁴R. Dedekind, "Werke", vol. 2, p. 255.

Dénotons par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ une base de vecteurs orthonormés de l'espace, et par a, b , et c respectivement les sous-espaces linéaires fermés engendrés par les vecteurs $(\xi_{2n} + 10^{-n}\xi_1 + 10^{-2n}\xi_{2n+1})$, par les vecteurs ξ_{2n} , et par a et le vecteur ξ_1 . Alors a, b , et c engendrent le treillis de la figure 1.

Finalement, on peut démontrer que l'identité modulaire est une conséquence de la supposition qu'il existe une fonction de dimension numérique $d(a)$, avec les propriétés

D1 : Si $a > b$, alors $d(a) > d(b)$.

D2 : $d(a) + d(b) = d(a \cap b) + d(a \cup b)$.

Ce théorème a un inverse si on se restreint aux treillis dans lesquels il y a une borne supérieure finie à la longueur n des chemins²⁵ $\odot < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \square$ d'éléments.

Puisque les conditions D1-D2 décrivent partiellement des propriétés formelles de probabilité, la présence de la condition L5 est très liée à l'existence d'un "poids a priori des états thermodynamiques". Mais il serait désirable d'interpréter L5 par des propriétés phénoménologiques plus simples de la physique quantique.

12. Relation aux géométries projectives abstraites. Nous allons maintenant étudier comment la supposition de postulats énonçant que les qualités physiques attribuables à n'importe quel système de mécanique quantique \mathfrak{S} sont un treillis satisfaisant L5 et L71-L73 caractérise le calcul propositionnel résultant. Cette question est évidemment purement algébrique.

On croit que la meilleure façon de trouver cela est d'introduire une supposition limitant la longueur des chaînes d'éléments (en supposant des dimensions finies) du treillis, en admettant franchement que cette supposition est purement heuristique.

On sait²⁶ que n'importe quel treillis de dimensions finies satisfaisant L5 et L72 est le produit direct d'un nombre fini de géométries projectives abstraites (au sens de Veblen et Young), et une algèbre booléenne finie, et inversement.

REMARQUE : C'est un corollaire qu'un treillis satisfaisant L5 et L71-L73 possède des éléments de base indépendants dont n'importe quel élément est une union, si et seulement si c'est une algèbre booléenne.

À nouveau, un tel treillis est une géométrie projective unique si et seulement s'il est *irréductible* - c'est-à-dire si et seulement s'il ne contient pas d'éléments "neutres"²⁷, $x \neq \odot, \square$ tels que $a = (a \cap x) \cup (a \cap x')$ pour tout a . En mécanique quantique effective, un tel élément aurait un opérateur de projection, qui commute avec tous les opérateurs de projection des observables, et ainsi avec tous les opérateurs d'observables en général. Cela violerait la nécessité d'"irréductibilité" en mécanique quantique²⁸. Par conséquent, on conclut que le *calcul propositionnel de la mécanique quantique a la*

²⁵Les énoncés de ce paragraphe sont des corollaires du théorème 10.2 de G. Birkhoff, op. cit.

²⁶G. Birkhoff "*Combinatorial relations in projective geometries*", Annals of Math. 36 (1935), 743-8.

²⁷O. Öre, op. cit., p. 419.

²⁸En utilisant la terminologie de la note de bas de page, et de loc. cit. ici : L'anneau MM' ne devrait pas contenir

même structure qu'une géométrie projective abstraite.

De plus, cette conclusion a été obtenue en analysant purement les propriétés internes du calcul, d'une manière qui fait seulement intervenir l'espace de Hilbert indirectement.

13. Géométries projectives abstraites et corps gauches (anneaux à division). Nous allons maintenant essayer d'obtenir une nouvelle image du calcul propositionnel de la mécanique quantique, en nous rappelant la correspondance dans les deux sens bien connue entre les géométries abstraites projectives et les corps (non nécessairement commutatifs).

Notamment, soit F un tel corps, et considérons les définitions et constructions suivantes : n éléments x_1, \dots, x_n de F , non tous $= 0$, forment une relation à droite $[x_1 : \dots : x_n]_r$, deux relations à droite $[x_1 : \dots : x_n]_r$, et $[\xi_1 : \dots : \xi_n]_r$, sont dites "égales", si et seulement s'il existe un $z \in F$ avec $\xi_i = x_i z, i = 1, \dots, n$. De façon similaire, n éléments y_1, \dots, y_n de F , non tous $= 0$, forment une relation à gauche $[y_1 : \dots : y_n]_l$, deux relations à gauche $[y_1 : \dots : y_n]_l$ et $[\eta_1 : \dots : \eta_n]_l$, sont dites "égales", si et seulement s'il existe un $z \in F$ avec $\eta_i = z y_i, i = 1, \dots, n$.

Maintenant définissons une géométrie projective à $n - 1$ dimensions $P_{n-1}(F)$ comme suit : les "points" de $P_{n-1}(F)$ sont toutes les relations à droites $[x_1 : \dots : x_n]_r$. Les "sous-espaces linéaires" de $P_{n-1}(F)$ sont ces ensembles de points, qui sont définis par les systèmes d'équations

$$\alpha_{k1}x_1 + \dots + \alpha_{kn}x_n = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

($m = 1, 2, \dots$; les α_{ki} sont fixés, mais sont des éléments arbitraires de F). La preuve, que ceci est une géométrie abstraite projective, revient tout simplement à établir les propriétés de base de la dépendance linéaire²⁹.

Les mêmes considérations montrent que les hyperplans (à $n - 2$ dimensions) dans $P_{m-1}(F)$ correspondent à $m = 1$, avec les α_i non tous $= 0$. Posons $\alpha_{1i} = y_i$, alors on a

$$(*) \quad y_1x_1 + \dots + y_nx_n = 0, \quad \text{non tous } y_i = 0.$$

Cela prouve que les hyperplans (à $n - 2$ dimensions) dans $P_{m-1}(F)$ sont en correspondance bi-univoque avec les relations à gauche $[y_r : \dots : y_n]_l$.

Ainsi, on peut les identifier avec les relations à gauche, comme les points sont déjà identiques avec les relations à droite, et (*) devient la définition de l'"incidence" (point \subset hyperplan).

Réciproquement, toute géométrie projective abstraite à $n - 1$ dimensions Q_{n-1} avec $n = 4, 5, \dots$ appartient de cette manière à un corps $F(Q_{n-1})$ (non nécessairement commutatif), et Q_{n-1} est isomorphe à $P_{n-1}(F(Q_{n-1}))$ ³⁰.

d'autres opérateurs de projection que 0, 1, ou : l'anneau M doit être un "facteur". Cf. loc. cit.¹³, p. 120.

²⁹Cf. §§ 103-105 "Moderne Algebra" de B. L. Van der Waerden, Berlin, 1931, Vol. 2.

³⁰ $n = 4, 5, \dots$ signifie bien sûr $n - 1 \geq 3$, c'est-à-dire que Q_{n-1} est nécessairement une géométrie "de Desargues". (Cf. O. Veblen et J. W. Young, "Projective Geometry", New York, 1910, Vol. 1, page 41). Alors $F = F(Q_{n-1})$ peut être construit de manière classique. (Cf. Veblen et Young, Vol. 1, pages 141-150). La preuve de l'isomorphisme

14. Relation entre le complémentaire abstrait et les anti-isomorphismes involutifs dans les corps gauches. On a vu que la famille des treillis irréductibles satisfaisant L5 et L72 est précisément la famille des géométries projectives, en supposant que l'on exclue le cas à 2 dimensions. Mais qu'en est-il de L71 et L73 ? En d'autres termes, pour quels $P_{n-1}(F)$ peut-on définir les complémentaires possédant toutes les propriétés formelles connues des complémentaires orthogonaux ? La section présente sera consacrée à répondre à cette question³¹

D'abord on montrera qu'il est *suffisant* que F admette un *anti-isomorphisme involutif* $W : \bar{x} = W(x)$, c'est-à-dire :

Q1. $w(w(u)) = u$,

Q2. $w(u + v) = w(u) + w(v)$,

Q3. $w(uv) = w(v)w(u)$,

avec une *forme hermitienne à diagonale définie* $w(x_1)\gamma_1\xi_1 + \dots + w(x_n)\gamma_n\xi_n$, où

Q4. $w(x_1)\gamma_1x_1 + \dots + w(x_n)\gamma_nx_n = 0$ implique $x_1 = \dots = x_n = 0$,

les γ_i étant des éléments fixés de F , satisfaisant $w(\gamma_i) = \gamma_i$.

Preuve : Considérons les n -uplets (et non pas des relations à droite ou à gauche !) $x : (x_1, \dots, x_n), \xi : (\xi_1, \dots, \xi_n)$ d'éléments de F . Définissons pour eux les opérations vectorielles

$$xz : (x_1z, \dots, x_nz) \quad (z \text{ dans } F)$$

$$x + \xi : (x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n),$$

et un "produit intérieur"

$$(\xi_1x) = w(\xi_1)\gamma_1x_1 + \dots + w(\xi_n)\gamma_nx_n.$$

Alors les formules suivantes sont des corollaires de Q1-Q4.

IP1 : $(x, \xi) = w((\xi, x))$,

IP2 : $(\xi, xu) = (\xi, x)u, (\xi u, x) = w(u)(\xi, x)$,

IP3 : $(\xi, x' + x'') = (\xi, x') + (\xi, x''), (\xi' + \xi'', x) = (\xi', x) + (\xi'', x)$,

IP4 : $(x, x) = w((x, x)) = [x]$ est $\neq 0$ si $x \neq 0$ (c'est - à - dire, si n'importe quel $x_i \neq 0$).

On peut définir $x \perp \xi$ (en d'autres termes : "est orthogonal à") pour signifier que $(\xi, x) = 0$. Ceci est évidemment symétrique en x, ξ , et dépend des relations à droite $[x_1 : \dots : x_n]_r, [\xi_1 : \dots : \xi_n]_r$

entre Q_{n-1} et les $P_{n-1}(F)$ comme construit ci-dessus, revient à cela : introduire des coordonnées homogènes (non nécessairement commutatives) x_1, \dots, x_n , à partir de F dans Q_{n-1} , et exprimer les équations des hyperplans selon elles. Cela peut être fait à la manière familière utilisée en géométrie projective, bien que la plupart des livres ne considèrent que le cas commutatif ("Pascalien"). D. Hilbert, "*Grundlagen der Geometrie*", 7^{ième} édition, 1930, pages 96-103, considère le cas non-commutatif, mais pour la géométrie affine, et pour $n - 1 = 2, 3$ seulement.

Considérant la longueur de la preuve complète (même si elle est de caractère élémentaire), nous proposons de la publier ailleurs.

³¹R. Brauer, "A characterization of null systems in projective space", Bull. Am. Math. Soc. 42 (1936), 247-54, traite la question analogue dans le cas opposé où l'on suppose que $X \cap X' \neq \emptyset$.

seulement de telle façon que cela établit la relation de “polarité”, $a \perp b$, entre les points

$$a : [x_1 : \dots : x_n]_r, \quad b : [\xi_1 : \dots : \xi_n]_r \text{ de } P_{n-1}(F).$$

Les polaires de chaque point $b : [\xi_1 : \dots : \xi_n]$ de $P_{n-1}(F)$ constituent un sous-espace linéaire de points de $P_{n-1}(F)$, qui par Q4 ne contient pas b lui-même, et même avec b engendre tout l'espace projectif $P_{n-1}(F)$, puisque pour n'importe quel n -uplet $x : (x_1, \dots, x_n)$

$$x = x' + \xi \cdot [\xi]^{-1}(\xi, x)$$

où par Q4, $[\xi] \neq 0$, et par IP $(\xi, x') = 0$. Ce sous-espace linéaire est, par conséquent, un hyperplan à $n - 2$ dimensions.

Par conséquent si c est n'importe quel élément à k dimensions de $P_{n-1}(F)$, on peut établir inductivement k points mutuellement polaires $b^{(1)}, \dots, b^{(k)}$ dans c . Alors, il est facile de montrer que l'ensemble c' des points polaires à tout $b^{(1)}, \dots, b^{(k)}$ - ou de façon équivalente, à tout point dans c - constituent un élément à $n - k - 1$ dimensions, satisfaisant $c \cap c' = \odot$ et $c \cup c' = \square$. De plus, par symétrie $(c')' \supset c$, donc par des considérations dimensionnelles $c'' = c$. Finalement, $c \supset d$ implique $c' \subset d'$, et ainsi la correspondance $c \rightarrow c'$ définit un automorphisme dual involutif de $P_{n-1}(F)$ ce qui complète la démonstration.

Dans l'appendice, on montrera que cette condition est également nécessaire. Ainsi la classe de systèmes ci-dessus est exactement la classe des treillis irréductibles de dimensions finies > 3 satisfaisant L5 et L71-L73.

III. CONCLUSIONS

15. Modèles mathématiques pour le calcul propositionnel. Une conclusion qui peut se dessiner à partir des considérations algébriques précédentes est qu'on peut construire de nombreux modèles différents pour un calcul propositionnel en mécanique quantique, qui ne peuvent pas être différenciés par des critères connus. Plus précisément, on peut prendre tout corps F ayant un anti-isomorphisme satisfaisant Q4 (de tels corps incluent les réels, les complexes, et les systèmes des nombres quaternions³²), introduire les notions adéquates de dépendance linéaire et complémentarité, et construire ainsi pour tout n le nombre de dimensions un modèle $P_n(F)$, qui a toutes les propriétés du calcul propositionnel suggéré par la mécanique quantique.

On peut aussi construire des modèles ∞ -dimensionnels $P_\infty(F)$ dont les éléments sont tous les sous-espaces linéaires fermés des espaces normés de dimensions infinies. Mais philosophiquement, le principe de Hankel de la “persévérance des lois formelles” (qui amène à essayer de préserver L5³³)

³²Dans le cas réel, $w(x) = x$; dans le cas complexe, $w(x + iy) = x - iy$; pour les quaternions, $w(u + iz + jy + kz) = u - ix - jy - kz$; dans tous les cas les λ_i sont égaux à 1. Inversement, A. Kolmogoroff, “Zur Begründung der projektiven Geometrie”, Annals of Math. 33 (1932), 175-6 a montré que toute géométrie projective dont les éléments k -dimensionnels ont une *topologie localement compacte* relativement à laquelle les opérations sur le treillis sont continues, doivent être sur les réels, les complexes, ou le corps des quaternions.

³³L5 peut aussi être préservée par l'artifice de ne considérer dans $P_\infty(F)$ que les seuls éléments qui soit sont de dimensions finies soit ont leur complémentaire qui est de dimensions finies.

et mathématiquement, les analyses techniques de la théorie spectrale dans l'espace de Hilbert, amène à préférer un modèle de dimension continue $P_c(F)$, qui sera décrit par l'un de nous dans un autre article³⁴.

$P_c(F)$ est très analogue avec le modèle fourni par les sous-ensembles mesurables de l'espace des phases en dynamique classique³⁵.

16. La cohérence logique de la mécanique quantique. Les considérations heuristiques ci-dessus suggèrent en particulier que les énoncés physiquement signifiants en mécanique quantique constituent une sorte de géométrie projective, alors que les énoncés physiquement signifiant concernant un système donné en dynamique classique constituent une algèbre booléenne.

Ils suggèrent même plus fortement qu'alors qu'en mécanique classique, tout calcul propositionnel faisant intervenir plus de deux propositions peut être décomposé en constituants indépendants (sommées directes au sens de l'algèbre moderne), la théorie quantique fait intervenir des calculs propositionnels irréductibles d'une complexité illimitée. Cela indique que la mécanique quantique a une *cohérence logique plus grande* que la mécanique classique - une conclusion corroborée par l'impossibilité en général de mesurer différentes quantités indépendamment.

17. Relation à la logique pure. Les modèles pour les calculs propositionnels qui ont été considérés dans les sections précédentes sont aussi intéressants du point de vue de la logique pure. Leur nature est déterminée par un raisonnement technique et quasi-physique, différent de considérations introspectives et philosophiques qui ont dû guider les logiciens jusqu'ici. Par conséquent, il est intéressant de comparer les modifications qu'ils ont introduites dans l'algèbre booléenne, avec celles que les logiciens "intuitionnistes" et des domaines apparentés ont essayé d'introduire.

La différence principale semble être qu'alors que les logiciens supposent habituellement que les propriétés L71-L73 de la négation étaient les minima nécessaires pour résister à l'analyse critique, l'étude de la mécanique désigne les *identités distributives* L6 comme étant le lien le plus faible dans l'algèbre de la logique. Cf. les deux derniers paragraphes du § 10.

Notre conclusion s'accorde peut-être davantage avec ces critiques de la logique, qui trouve que l'on peut davantage s'opposer à la supposition que $a' \cup b = \square$ implique $a \subset b$ (ou, de façon duelle, la supposition que $a \cap b' = \odot$ implique $b \supset a$ - la supposition que déduire une absurdité de la conjonction de a et de non b , justifie d'en déduire que a implique b ³⁶).

18. Questions suggérées. Le même raisonnement heuristique suggère que les questions suivantes devraient être fructueuses.

Quel sens expérimental peut-on attacher à la jointure et à la rencontre de deux propositions

³⁴J. von Neumann, "Continuous geometries", Proc. Nat. Acad., 22 (1936), 92-100 et 101-109. Cela pourrait être un cadre plus adéquat pour la théorie quantique, que l'espace de Hilbert.

³⁵En mécanique quantique, les dimensions mais non les complémentaires sont déterminés de manière unique par la relation d'inclusion ; en mécanique classique, l'inverse est vrai !

³⁶Il n'est pas difficile de montrer, qu'en supposant nos axiomes L1-5 et 7, la loi distributive L6 est équivalente à ce postulat : $a' \cup b = \square$ implique $a \subset b$.

expérimentales données ?

Quelle motivation simple et plausible y a-t-il pour la condition L5 ?

APPENDICE

1. Considérons une géométrie projective Q_{n-1} comme celle décrite au §13. F est un corps (non nécessairement commutatif, mais associatif), $n = 4, 5, \dots$, $Q_{n-1} = P_{n-1}(F)$ la géométrie projective de toutes les relations à droite $[x_1 : \dots : x_n]_r$, qui sont les *points* de Q_{n-1} . Les *hyperplans* ($n - 2$ -dimensionnels) sont représentés par les relations à gauche $[y_1 : \dots : y_n]_l$, l'incidence d'un point $[x_1 : \dots : x_n]_r$ et d'un hyperplan $[y_1 : \dots : y_n]_l$ est définie par

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0$$

Tous les sous-espaces linéaires de Q_{n-1} forment le treillis L , avec les éléments a, b, c, \dots . Supposons maintenant qu'une opération a' avec les propriétés L71-L73 dans le §9 existe :

$$\text{L71 : } (a')' = a$$

$$\text{L72 : } a \cap a' = \odot \text{ et } a \cup a' = \square,$$

$$\text{L73 : } a \subset b \text{ implique } a' \supset b'.$$

Cela implique (cf. §9)

$$\text{L74 : } (a \cap b)' = a' \cup b' \text{ et } (a \cup b)' = a' \cap b'.$$

Observons que la relation $a \subset b'$ est symétrique en a, b , en raison de L73 et L71.

2. Si $a : [x_1 : \dots : x_n]_r$ est un point, alors a' est un $[y_1 : \dots : y_n]_l$. On peut donc écrire :

$$(2) \quad [x_1 : \dots : x_n]_r' = [y_1 : \dots : y_n]_l,$$

et définir une opération qui relie les relations à gauche et les relations à droite. On sait depuis le §14, qu'une caractérisation générale de a' (a n'importe quel élément de L) est obtenue dès qu'on dérive une caractérisation algébrique de la relation ci-dessus $[x_1 : \dots : x_n]_r'$. On va maintenant trouver une telle caractérisation de $[x_1 : \dots : x_n]_r'$, et montrer qu'elle justifie la description donnée au §14.

Pour faire cela, on devra utiliser de façon plutôt libre les *collinéations* dans Q_{n-1} . Une collinéation est, par définition, une transformation de coordonnées, qui remplace $[x_1 : \dots : x_n]_r$ par $[\bar{x}_1 : \dots : \bar{x}_n]_r$,

$$(3) \quad \bar{x}_j = \sum_{i=2}^n \omega_{ij} x_i \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

Ici les ω_{ij} sont des éléments fixés de F , et ainsi que (3) ont un inverse.

$$(4) \quad x_i = \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \bar{x}_j, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

les θ_{ij} étant des éléments fixés de F , également. (3), (4) signifient clairement :

$$\delta_{kl} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{array} \right\} :$$

$$(5) \quad \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \omega_{kj} = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^n \omega_{ij} \theta_{ik} = \delta_{jk}.$$

En considérant (1) et (5) ils impliquent des transformations de coordonnées contravariantes pour les hyperplans : $[y_1 : \dots : y_n]_l$ devient $[\bar{y}_1 : \dots : \bar{y}_n]_l$, où

$$(6) \quad \bar{y}_i = \sum_{j=1}^n y_j \theta_{ij}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n,$$

$$(7) \quad y_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \omega_{ij}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

(Observons que la position des coefficients sur le côté gauche des variables dans (4), (5), et sur leur côté droit dans (6), (7), est essentielle !)

3. On apportera

$$(8) \quad [\delta_{i1} : \dots : \delta_{in}]'_r = [\delta_{i1} : \dots : \delta_{in}]_l \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

en choisissant un système adéquat de coordonnées, c'est-à-dire, en appliquant les collinéations convenables. On procède par induction : supposons que (8) soit vérifiée pour $i = 1, \dots, m-1$ ($m = 1, \dots, n$), alors on trouvera une collinéation qui rend (8) vraie pour $i = 1, \dots, m$.

Dénotons le point $[\delta_{i1} : \dots : \delta_{in}]_r$ par p_i^* et l'hyperplan $[\delta_{i1} : \dots : \delta_{in}]'_l$ par h_i^* ; notre supposition sur (8) est : $p_i^{*'} = h_i^*$ pour $i = 1, \dots, m-1$. Considérons maintenant un point $a : [x_1 : \dots : x_n]_r$, et l'hyperplan $a' : [y_1 : \dots : y_n]_l$. Maintenant $a \leq p_i^{*'} = h_i^*$ signifie (utiliser (1)) $x_i = 0$, et $p_i^* \leq a'$ signifie (utiliser (8)) $y_i = 0$. Mais ces deux énoncés sont équivalents. Donc on voit : si $i = 1, \dots, m-1$, alors $x_i = 0$ et $y_i = 0$ sont équivalents.

Considérons maintenant $p_m^* : [\delta_{m1} : \dots : \delta_{mn}]_r$. Posons $p_m^{*'} : [y_1^* : \dots : y_n^*]_l$. Comme $\delta_{mi} = 0$ pour $i = 1, \dots, m-1$, donc on a $y_i^* = 0$ pour $i = 1, \dots, m-1$. De plus, $p_m^* \cap p_m^{*' } = 0, p_m^* \neq 0$, de telle façon que p_m^* ne soit pas $\leq p_m^{*'}$. Par (1) cela signifie que $y_m^* \neq 0$.

Formons les collinéations (3), (4), (6), (7), avec

$$\theta_{ii} = \omega_{ii} = 1, \quad \theta_{mi} = \omega_{im} = y_m^* - 1 y_i^* \quad \text{pour } i = m+1, \dots, n,$$

avec tous les autres $\theta_{ij}, \omega_{ij} = 0$.

On vérifie immédiatement que cette collinéation laisse les coordonnées des $p_1^* : [\delta_{i1} : \dots : \delta_{in}]_r, i = 1, \dots, n$, invariantes, et similairement ceux des $p_i^{*' } : [\delta_{i1} : \dots : \delta_{im}]_l, i = 1, \dots, m-1$, alors qu'elle transforme ceux de

$$p_m^{*' } : [y_1^* : \dots : y_n^*]_l$$

en $[\delta_{m1} : \dots : \delta_{mn}]_l$.

Ainsi, après cette collinéation, (8) est vérifiée pour $i = 1, \dots, m$.

Ainsi, on peut supposer, par induction sur $m = 1, \dots, n$, que (8) est vérifiée pour tout $i = 1, \dots, n$. C'est ce que nous allons faire.

L'argument ci-dessus montre maintenant que pour $a : [x_1 : \dots : x_n]_r, a' : [y_1, \dots, y_n]_l$,

$$(9) \quad x_i = 1 \text{ est équivalent à } y_i = 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, n.$$

4. Posons $a : [x_1 : \dots : x_n]_r, a' : [y_1, \dots, y_n]_l$ et $b : [\xi_1 : \dots : \xi_n]_r, b' : [\eta_1, \dots, \eta_n]_l$.

Supposons d'abord $\eta_1 = 1, \eta_2 = n, \eta_3 = \dots = \eta_n = 0$. Alors (9) donne $\eta_1 \neq 0$, de telle façon qu'on peut normaliser $\eta_1 = 1$, et $\eta_2 = \dots = \eta_n = 0$. η_2 peut dépendre de $\eta_2 = n$ seulement, ainsi $\eta_2 = f_2(\eta)$.

Supposons de plus que $x_1 = 1$. Alors (9) donne $y_1 \neq 0$, de telle façon qu'on peut normaliser $y_1 = 1$. Maintenant $a \leq b'$ signifie par (i) $1 + \eta_2 x_2 = 0$, et $b \leq a'$ signifie $1 + y_2 f_2(\eta) = 0$. Ces deux énoncés doivent, par conséquent, être équivalents. Ainsi, si $x_2 \neq 0$, on peut poser $\eta = -x_2^{-1}$, et obtenir $y_2 = -(f_2(\eta))^{-1} = -(f_2(-x_2^{-1}))^{-1}$. Si $x_2 = 0$, alors $y_2 = 0$ par (9). Ainsi, x_2 détermine à n'importe quel niveau y_2 (indépendamment de x_3, \dots, x_n) : $y_2 = \varphi_2(x_2)$. Permuter les $i = 2, \dots, n$ donne, par conséquent :

Il existe pour chaque $i = 2, \dots, n$ une fonction $\varphi_i(x)$, telle que $y_i = \varphi_i(x_i)$. Ou :

$$(10) \quad \text{Si } a : [1 : x_2 : \dots : x_n]_r, \quad \text{alors } a' : [1 : \varphi_2(x_2) : \dots : \varphi_n(x_n)]_l.$$

Appliquer cela à $a : [1 : x_2 : \dots : x_n]_r$, et $c : [1 : u_1, \dots : u_n]_r$ montre : comme $a \leq c'$ et $c \leq a'$ sont équivalents, donc

$$(11) \quad \sum_{i=2}^n \varphi_i(u_i) x_i = -1 \text{ est équivalent à } \sum_{i=2}^n \varphi_i(x_i) u_i = -1.$$

Observons que (9) devient :

$$(12) \quad \varphi_i(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = 0.$$

5. (11) avec $x_3 = \dots = x_n = u_3 = \dots = u_n = 0$ montre : $\varphi_2(u_2) x_2 = -1$ est équivalent à $\varphi_2(x_2) u_2 = -1$. Si $x_2 \neq 0, u_2 = (-\varphi_2(x_2))^{-1}$, alors la seconde équation est vérifiée, et donc les deux le sont.

Choisissons x_2, u_2 de cette manière, mais laissons $x_3, \dots, x_n, u_3, \dots, u_n$ arbitraires. Alors (11) devient :

$$(13) \quad \sum_{i=3}^n \varphi_i(u_i) x_i = 0 \text{ est équivalent à } \sum_{i=3}^n \varphi_i(x_i) u_i = 0.$$

Maintenant posons $x_5 = \dots = x_n = u_5 = \dots = u_n = 0$.

Alors (13) devient :

$$\varphi_3(u_3)x_3 + \varphi_4(u_4)x_4 = 0 \text{ est équivalent à } \varphi_3(x_3)u_3 + \varphi_4(x_4)u_4 = 0,$$

ce qui est (pour $x_4, u_4 \neq 0$) :

$$(a) \quad x_3x_4^{-1} = \varphi_4(u_4)^{-1}\varphi_3(u_3)$$

(14) est équivalente à

$$(b) \quad u_3u_4^{-1} = \varphi_4(x_4)_3^{-1}(x_3).$$

Soient x_4, x_3 donnés. Choisissons u_3, u_4 de telle façon que (b) soit satisfaite. Alors (a) est vraie, également. Maintenant (a) reste vraie, si on laisse u_3, u_4 inchangés, mais change x_3, x_4 sans changer $x_3x_4^{-1}$. Donc (b) reste vraie également sous ces conditions, c'est-à-dire que la valeur de $\varphi_4(x_4)^{-1}\varphi_3(x_3)$ ne change pas. En d'autres termes : $\varphi_4(x_4)^{-1}\varphi_3(x_3)$ dépend de $x_3x_4^{-1}$ seulement. C'est-à-dire : $\varphi_4(x_4)^{-1}\varphi_3(x_3) = \varphi_{34}(x_3x_4^{-1})$. Posons $x_3 = xz, x_4 = x$, alors on obtient :

$$(15) \quad \varphi_3(xz) = \varphi_4(x)\psi_{34}(z).$$

Ceci a été dérivé pour $x, z \neq 0$, mais ça serait vérifié pour x ou $z = 0$, aussi, si on définit $\psi_{34}(0) = 0$. (Utiliser (12).)

(15), avec $z = 1$ donne $\varphi_3(x) = \varphi_4(x)\alpha_{34}$, où $\alpha_{34} = \psi_{34}(1) \neq 0$, en raison de (12) pour $x \neq 0$. Permuter les $i = 2, \dots, n$ donne, par conséquent :

$$(16) \quad \varphi_i(x) = \varphi_j(x)\alpha_{ij}, \quad \text{où } \alpha_{ij} \neq 0.$$

(pour $i = j$ posons $\alpha_{ii} = 1$.)

Maintenant (15) devient

$$(17) \quad \begin{aligned} \varphi_2(zx) &= \varphi_2(x)w(z) \\ w(z) &= \alpha_{12}\psi_{34}(z)\alpha_{23} \end{aligned}$$

Posons $x = 1$ dans (17), écrivons x pour z , et utilisons (16) avec $j = 2$:

$$(18) \quad \begin{aligned} \varphi_i(x) &= \beta w(z)\gamma_i, \quad \text{où } \beta, \gamma_i \neq 0. \\ (\beta &= \varphi_2(1), \gamma_i = \alpha_{i2}). \end{aligned}$$

6. Comparons (17) pour $x = 1, z = u; x = u, z = v$; et $x = 1, z = vu$.

Alors

$$(19) \quad w(vu) = w(u)w(v)$$

donne (12) et (18) donne

$$(20) \quad w(u) = 0 \text{ si et seulement si } u = 0.$$

Maintenant écrivons $w(z), \gamma_i$ pour $\beta w(z)\beta^{-1}, \beta\gamma_i$. Alors (18), (19), (20) reste vraies, (18) est simplifiée jusqu'ici, de telle façon qu'on a $\beta = 1$ là. Donc (11) devient

$$(21) \quad \sum_{i=2}^n w(u_i)\gamma_i x = -1$$

(21) est équivalente à

$$\sum_{i=2}^n w(x_i)\gamma_i u_i = -1$$

$x_2 = x, u_2 = u$ et tous les autres $x_i = u_i = 0$ donnent : $w(u)\gamma_2 x = -1$ est équivalent à $w(x)\gamma_2 u = -1$. Si $x \neq 0, u = -\gamma_2^{-1}w(x)^{-1}$, alors la seconde équation est vérifiée, et ainsi la première donne : $x = -y_2^{-1}w(u)^{-1}(w(-\gamma_2^{-1}w(x)^{-1}))^{-1}$. Mais (19), (20) impliquent $w(1) = 1, w(w^{-1}) = w(w)^{-1}$, donc la relation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} x &= -\gamma_2^{-1}(w(-\gamma_2^{-1}w(x_1^{-1}))^{-1})^{-1} = -\gamma_2^{-1}w((-\gamma_2^{-1}w(x)^{-1})^{-1}) \\ &= -\gamma_2^{-1}w(w(x)(-\gamma_2)) = -\gamma_2^{-1}w(-\gamma_2)w(w(x)). \end{aligned}$$

En mettant dans l'équation $x = 1$, comme $w(w(1)) = w(1) = 1$, ainsi $-\gamma_2^{-1}w(-\gamma_2) = 1, w(-\gamma_2) = -\gamma_2$ en découle. Alors l'équation ci-dessus devient

$$(22) \quad w(w(x)) = x,$$

et $w(-\gamma_2) = -\gamma_2$ donne, si on permute les $i = 2, \dots, n$,

$$(23) \quad w(-\gamma_i) = -\gamma_i.$$

Posons $u_i = -\gamma_i^{-1}$ dans (21). Alors en considérant (22) et (19)

$$(24) \quad \sum_{i=2}^n = 1 \text{ est équivalent à } \sum_{i=2}^n w(x_i) = 1$$

en découle. Posons $x_2 = x, x_3 = y, x_4 = 1 - x - y, x_5 = \dots = x_n = 0$. Alors (24) donne $w(x) + w(y) = 1 - w(1 - x - y)$. Donc $w(x) + w(y)$ dépend seulement de $x + y$. Remplacer x, y par $x + y, 0$ montre que cela est égal à $w(x + y) + w(0) = w(x + y)$ (utiliser 20). Donc on a :

$$(25) \quad w(x) + w(y) = w(x + y)$$

(25), (19) et (22) donnent ensemble :

$$w(x) \text{ est un anti-isomorphisme involutif de } F.$$

Observons que (25) implique $w(-1) = -w(1) = -1$, et ainsi (23) devient

$$(26) \quad w(\gamma_i) = \gamma_i.$$

7. Considérons $a : [x_1 : \dots : x_n]_r, a' : [y_1 : \dots : y_n]_l$. Si $x_1 \neq 0$, on peut écrire $a : [1 : x_2 x_1^{-1} : \dots : x_n x_1^{-1}]_r$, et ainsi $a' : [1 : w(x_2 x_1^{-1})\gamma_2 : \dots : w(x_n x_1^{-1})\gamma_n]_l$. Mais

$$w(x_i, x_1^{-1})\gamma_i = w(x_1^{-1})w(x_i)\gamma_i = w(x_1)^{-1}w(x_i)\gamma_i,$$

et ainsi on peut écrire

$$a' : [w(x_1) : w(x_2)\gamma_2 : \dots : w(x_n)\gamma_n]_l$$

également. Donc on a

$$(27) \quad y_i = w(x_i)\gamma_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

où les γ_i pour $i = 2, \dots, n$ sont ceux provenant de 6., et $\gamma_1 = 1$. Et $w(1) = 1$, donc (26) est vérifié pour tout $i = 1, \dots, n$. Ainsi on a la représentation (27) avec γ_i obéissant à (26), si $x_i \neq 0$.

La permutation des $i = 1, \dots, n$ montre qu'une relation similaire est vérifiée si $x_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} (27^+) \quad & y_i = w^+(x_i)\gamma_i^+, \\ (26^+) \quad & w^+(\gamma_i^+) = \gamma_i^+, \end{aligned}$$

$w^+(x)$ étant un anti-isomorphisme involutif de F . ($w^+(x), \gamma_i^+$ peuvent différer de $w(x), \gamma_i!$). À la place de $\gamma_1 = 1$ on a maintenant $\gamma_2^+ = 1$, mais on n'utilisera pas cela.

Posons que tous les $x_i = 1$. Alors $a' : [y_1 : \dots : y_n]_l$ peut être exprimé par les deux formules (27) et (27+). Comme $w(x)_1, w^+(x)$ sont tous les deux des anti-isomorphismes, donc $w(1) = w^+(1) = 1$, et par conséquent $[y_1 : \dots : y_n]_l = [\gamma_1 : \dots : \gamma_n]_l = [\gamma_1^+ : \dots : \gamma_n^+]_l$ en résulte. Ainsi $(\gamma_1^+)^{-1}\gamma_i^+ = (\gamma_1)^{-1}\gamma_i = \gamma_i, \gamma_i^+ = \gamma_1^+\gamma_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Supposons maintenant que seul $x_2 \neq 0$. Alors (27+) donne $y_i = w^+(x_i)\gamma_i^+$, mais comme nous traitons les relations à gauche, nous pouvons aussi bien poser

$$y_i = (\gamma_1^+)^{-1}w^+(x_i)\gamma_i^+ = (\gamma_1^+)^{-1}w^+(x)\gamma_1^+\gamma_i.$$

Posons $\beta^+ = \gamma_1^+ \neq 0$, alors on a :

$$(27^{++}) \quad y_i = \beta^{+-1}w^+(x_i)\beta^+\gamma_i.$$

Posons maintenant $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x$, avec tous les autres $x_i = 0$. À nouveau $a' : [y_1 : \dots : y_n]_l$ peut être exprimé par les deux formules (27) et (27^{++}), à nouveau $w(1) = w^+(1)$. Par conséquent

$$[y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : \dots : y_n]_l = [\gamma_1 : \gamma_2 : w(x)\gamma_3 : 0 : \dots : 0]_l = [\gamma_1 : \gamma_2 : \beta^{+-1}w^+(x)\beta^+\gamma_3 : 0 : \dots : 0]_l$$

en découle. Ceci implique $w(x) = \beta^{+-1}w(x)\beta^+$ pour tout x , et ainsi (27^{++}) coïncide avec (27).

En d'autres termes : (27) est vérifiée pour $x_2 \neq 0$ aussi.

En permutant $i = 2, \dots, n$ (seul $i = 1$ a un rôle exceptionnel dans (27)), on voit que

(27) est vérifiée si $x_i \neq 0$ pour $i = 2, \dots, n$. Comme $x_1 \neq 0$ (27) est vérifiée dans tous les cas, et pour certains $i = 1, \dots, n$ on doit avoir $x_i \neq 0$. Par conséquent :

(27) est vérifiée pour tous les points a: $[x_1 : \dots : x_n]_r$.

8. Considérons maintenant deux points $a : [x_1 : \dots : x_n]_r$ et $b : [\xi_1 : \dots : \xi_n]_r$. Posons $a' : [y_1 : \dots : y_n]_l$, alors $b \leq a'$ signifie, en considérant (1) et (27) (cf. la fin de 7.) :

$$(28) \quad \sum_{i=1}^n w(x_i)\gamma_i\xi_i = 0.$$

$a \leq a'$ ne peut jamais être vérifiée ($a \cap a' = 0, a \neq 0$), donc (28) peut seulement être vérifié pour $x_i = \xi_i$, si tous les $x_i = 0$. Ainsi,

$$(29) \quad \sum_{i=1}^n w(x_i)\gamma_i x_i = 0 \text{ implique } x_1 = \dots = x_n = 0.$$

En ajoutant le dernier résultat de 6., et les formules (26), (29) et (28), on obtient :

Il existe un anti-isomorphisme involutif $w(x)$ de F (cf. (22), (25), (19)) et une forme hermitienne diagonale définie $\sum_{i=1}^n w(x_i)\gamma_i \xi_i$, dans F (cf. (26), (29)), telle que pour $a : [x_1 : \dots : x_n]_r, b : [\xi_1 : \dots : \xi_n]_r, b \leq a'$ est défini par polarité par rapport à lui :

$$(28) \quad \sum_{i=1}^n w(x_i)\gamma_i \xi_i = 0.$$

C'est exactement le résultat du § 14, qui est ainsi justifié.

ASSOCIATION DES CAMARADES, UNIVERSITÉ DE HARVARD.
INSTITUT D'ÉTUDE AVANCÉE.