Traduction d'un extrait de l'article Dirac operators and spectral triples for some fractal sets built on curves *d'Erik Christensen, Cristina Ivan et Michel L. Lapidus* [1] *(Denise Vella-Chemla, août 2023)*

2. Triplet spectral pour un cercle

Beaucoup du contenu de cette section est bien connu (voir par exemple [14]) mais n'est habituellement pas présenté dans le langage des triplets spectraux. Il est utile, pourtant, de présenter ce contenu ici parce qu'à notre connaissance, il est seulement disponible dans des références dispersées et non dans la forme dont nous avons besoin. En particulier, on étudiera de façon quelque peu détaillée les domaines de définition des opérateurs non bornés pertinents pour notre objectif et les dérivations.

Soit C_r le cercle dans le plan complexe de rayon $r > 0$ et centré en 0. Comme d'habitude en géométrie non-commutative, on n'étudie pas le cercle directement mais on étudie plutôt une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur le cercle. De ce point de vue, il semble plus facile de regarder l'algèbre des fonctions complexes continues $2\pi r$-périodiques sur la droite réelle. Appelons $\mathcal{A}C_r$ cette algèbre. On notera $(1/2\pi r)\mathfrak{m}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur l'intervalle $[-\pi r, \pi r]$ et soit π_r la représentation standard de $\mathcal{A}C_r$ désignant les opérateurs de multiplication sur l'espace de Hilbert H_r qui est définie par $H_r := L([-\pi r, \pi r], (1/2\pi r)\mathfrak{m})$. L'espace H_r a une base orthonormale canonique, notée $(\phi_k^r)_{k\in\mathbb{Z}}$, qui consiste en les fonctions dans $\mathcal{A}C_r$ données par

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \ \phi_k^r(x) \ := \ \exp\left(\frac{ikx}{r}\right).$$

Ces fonctions sont les fonctions propres de l'opérateur différentiel $\dfrac{1}{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et les valeurs propres correspondantes sont $\{k/r \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Le choix naturel pour l'opérateur de Dirac pour cette situation est la fermeture de la restriction de l'opérateur ci-dessus à la portée linéaire de la base $\{\phi_k^r \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On notera D_r cet opérateur sur H_r. Il est bien connu que D_r est auto-adjoint et que $\mathrm{dom}(D_r)$, le domaine de définition de D_r, est donné par

$$\forall f \in H_r \ : \quad f \in \mathrm{dom}\ D_r \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^2}{r^2}\ |\langle f \mid \phi_k^r\rangle|^2 < \infty$$

où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit intérieur de H_r.

Pour un élément $f \in \mathrm{dom}\ D_r$, on a $D_r f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k/r)\langle f \mid \phi_k^r\rangle\phi_k^r$. L'opérateur auto-adjoint D_r a pour spectre $\{k/r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et chacune de ses valeurs propres a une multiplicité de 1. De plus, toute fonction continument différentiable $2\pi r$-périodique f sur $\mathbb{R}$ satisfait

$$[D_r, \pi_r(f)] = \pi_r(-if'),$$

de telle façon qu'on obtient un triplet spectral associé au cercle C_r de la façon suivante.

[1]Référence : Advances in mathematics 217 vol. 1 (2008) p. 47-48
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870807001855.

Définition 2.1. *Le triplet spectral naturel,* $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$*, pour l'algèbre du cercle* $\mathcal{A}C_r$ *est défini par* $\text{TripletSpectral}_n(C_r) := (\mathcal{A}C_r, H_r, D_r)$.

Un des principaux ingrédients dans les arguments à venir est la possibilité de construire des triplets spectraux *intéressants* comme sommes directes de modules de Fredholm non bornés, chacun d'eux transportant seulement une toute petite quantité de l'information de l'espace total. Dans le cas des triplets naturels pour les cercles, le nombre 0 est toujours une valeur propre et par conséquent, si l'opération somme est exécutée un nombre dénombrable de fois, la valeur 0 sera d'une multiplicité infinie pour l'opérateur de Dirac qui est obtenu par une construction par somme directe. Pour éviter ce problème, on remplacera, pour le cas C_r, l'opérateur de Dirac D_r par un opérateur légèrement modifié, D_r^t qui est le translaté de D_r donné par

$$D_r^t := D_r + \frac{1}{2r} I.$$

L'ensemble des valeurs propres devient maintenant $\{(2k+1)/2r \mid k \in \mathbb{Z}\}$, mais le domaine de définition est le même que pour D_r et, *en particulier*, pour toute fonction $f \in \mathcal{A}C_r$, on a $[D_r^t, \pi_r(f)] = [D_r, \pi_r(f)]$. Par conséquent, la translation ne change pas vraiment l'effet du triplet spectral.

Définition 2.2. Le *triplet spectral translaté*, $\text{TripletSpectral}_t(C_r)$, pour l'algèbre du cercle $\mathcal{A}C_r$ est défini par $\text{TripletSpectral}_t(C_r) = (\mathcal{A}C_r, H_r, D_r^t)$.

La prochaine question est de déterminer pour quelles fonctions f de $\mathcal{A}C_r$ le commutateur $[D_r^t, \pi_r(f)]$ est borné et densément défini. Ceci est fait dans le lemme suivant qui est standard, mais que nous inclurons parce que son assertion particulière ne peut se trouver aisément dans la forme dont nous avons besoin. D'un autre côté, la preuve utilise de l'analyse élémentaire et pour cette raison, elle sera omise.

Lemma 2.3. *Soit* $f \in \mathcal{A}C_r$*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $[D_r^t, \pi_r(f)]$ *est densément défini et borné.*

(ii) $f \in \text{dom}(D_r)$ *et* $D_r f$ *est essentiellement borné.*

(iii) *Il existe une fonction mesurable, essentiellement bornée* g *sur l'intervalle* $[-\pi r, \pi r]$ *telle que*

$$\int_{-\pi r}^{\pi r} g(t)\mathrm{d}t = 0 \ \text{ et } \ \forall x \in [-\pi r, \pi r] \ : \ f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Si les conditions ci-dessus sont satisfaites, alors $g(x) = (iD_r f)(x)$ *presque partout.*

On terminera cette section en mentionnant quelques propriétés de ce triplet spectral. Nous ne démontrerons aucune de ces assertions car elles sont aisées à vérifier. D'abord, remarquons que toutes les assertions ci-dessous sont vérifiées à la fois par les triplets translatés $\text{TripletSpectral}_t(C_r)$ et par les triplets naturels $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$, bien qu'on ne les énonce que pour les triplets naturels $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$.

Théorème 2.4. *Soit* $r > 0$ *et soit* $(\mathcal{A}_r C, H_r, D_r)$ *le triplet spectral naturel du cercle* $\mathrm{TripletSpectral}_n(C_r)$. *Alors les deux résultats suivants sont vérifiés :*

(i) *La métrique, disons* d_r*, induite par le triplet spectral naturel* $\mathrm{TripletSpectral}_n(C_r)$ *sur le cercle est la distance géodésique sur* C_r*.*

(ii) *Le triplet spectral naturel* $\mathrm{TripletSpectral}_n(C_r)$ *est sommable pour tout* $s > 1$*, mais pas pour* $s = 1$*. Par conséquent, il a pour dimension métrique 1.*

Références

[5] A. Connes, Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness, Ergodic Theory Dynam. Systems 9. (1989) 207–220, https://www.cambridge.org/core/journals/ergodic-theory-and-dynamical-systems/article/compact-metric-spaces-fredholm-modules-and-hyperfiniteness/2ACB2EBA0AA0A40F9D890AA9915500F7.

[6] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, San Diego, 1994, https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf.

[7] A. Connes, Unpublished notes on a Dirac operator associated to the Cantor subset of the unit interval (electronic message to Michel Lapidus, May 2002).

[8] A. Connes, M. Marcolli, A walk in the noncommutative garden, https://arxiv.org/pdf/math/0601054.pdf.

[9] A. Connes, D. Sullivan, Quantized calculus on S1 and quasi-Fuchsian groups, unpublished, 1994, https://www.math.stonybrook.edu/ dennis/publications/PDF/DS-pub-0093.pdf.

[14] R. E. Edwards, Fourier Series. A modern introduction, Vol. 1, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 64, Springer-Verlag, New York (1979).