Extrait du livre *Combinatory logic*, de H.B. Curry, R. Feys, et W. Craig, 1958, North Holland Publishing Company, Amsterdam, dans lequel Curry présente son isomorphisme p. 313 et suivantes

E. Analogies avec l'algèbre propositionnelle

On étudiera ici une analogie surprenante entre la théorie de la fonctionnalité et la théorie de l'implication en algèbre des propositions. Dans le § 1 on montrera que, correspondant à tout théorème dans la théorie basique, il y a un théorème dans l'algèbre absolue[1] (i.e. intuitionniste positive) de l'implication pure. Au § 2 on étudiera la relation inverse, ainsi que quelques conséquences miscellanées de la relation. Une formulation inférentielle, analogue à la formulation de Gentzen de l'algèbre propositionnelle, sera considérée dans le § F.

1. La transformation F-P

Si F est remplacé par P (implication), et si on ignore le sujet, alors les schémas d'axiomes (FK) et (FS) deviennent respectivement

(1) $$\alpha \supset .\beta \supset \alpha,$$

(2) $$\alpha \supset .\beta \supset \gamma :\supset: \alpha \supset \beta. \supset .\alpha \supset \gamma,$$

où, pour se conformer à la pratique habituelle, on a utilisé la définition

$$\alpha \supset \beta \;\equiv\; \mathrm{P}\alpha\beta$$

Selon la même transformation, la règle F devient la règle du modus ponens. Il est bien connu que le modus ponens et les schémas de formules (1), (2) engendrent la théorie de l'implication pure dans l'algèbre propositionnelle intuitionniste, que nous appellerons simplement ici l'*algèbre absolue de l'implication*. Il découle par induction déductive que tout théorème élémentaire de la théorie basique est relié de façon similaire à un théorème élémentaire de l'algèbre absolue.

On peut rendre ce résultat plus explicite comme suit. Pour tout F-ob α, définissons α^P inductivement ainsi :

$$\theta_i^P \equiv \theta_i,$$

$$(\mathrm{F}\alpha\beta)^P \equiv \alpha^P \supset \beta^P (\equiv \mathrm{P}\alpha^P\beta^P).$$

Alors α^P est toujours une formule de l'algèbre absolue. De plus, on a le :

Théorème 1. *Tout théorème élémentaire dans la théorie basique est de la forme*

(3) $$\vdash \mathrm{F}_m\xi_1 \ldots \xi_m\eta X,$$

où

(4) $$(\vdash \mathrm{F}_m\xi_1 \ldots \xi_m\eta)^P$$

Transcription et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2022.

[1] Ce terme a été utilisé pour des systèmes dits 'A' dans [TFD]. L'usage est repris dans [LLA], [IFI].

est un théorème élémentaire de l'algèbre absolue de l'implication. De plus, si (3) est dérivable dans la théorie de base à partir des prémisses

(5) $\vdash \alpha_i a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p$;

alors (4) est dérivable dans l'algèbre absolue de l'implication à partir des prémisses

(6) $\vdash \alpha_i^P$

La preuve de ce théorème consiste simplement à observer que la transformation de (3) à (4) amène (FK) et (FS) sur les schémas de formules (1), (2), qui sont valides dans l'algèbre absolue ; qu'une inférence par la règle F est transformée en une inférence par la règle P (modus ponens) ; et que dans le cas d'une inférence par la règle Eq' les transformations de la prémisse et de la conclusion sont identiques.

2. Transformation inverse

Le théorème 1 a un inverse partiel qui est le :

Théorème 2. *Si (4) est dérivable par la règle* P *à partir des prémisses (6), alors pour toute dérivation de (4) à partir de (6) et toute affectation de $a_1, ..., a_p$ à $\alpha_1, ..., \alpha_p$ respectivement, il existe un X tel que (3) est dérivable à partir de (5) par la règle* F *seule.*

La preuve de cela consiste à observer qu'α est uniquement déterminé par α^P ; et qu'une inférence par la règle P est transformée en une inférence par la règle F dans laquelle le sujet de la conclusion est uniquement déterminé si ceux des prémisses le sont.

On ne devrait pas supposer, pourtant, qu'étant donnés $\xi_1 ..., \xi_m, \eta$, il existe un unique X satisfaisant (3). Ainsi

$$\vdash F(F\alpha\alpha)(F\alpha\alpha)X$$

est vrai quand $X \equiv Z_n$, n étant n'importe quel entier naturel.

Si on note (PX) la formule correspondant à (FX), alors les (PX) pour quelques combinateurs communs sont les suivants :

(PK)	$\vdash \alpha \supset .\beta \supset \alpha,$
(PS)	$\vdash \alpha \supset .\beta \supset \gamma :\supset: \alpha \supset \beta. \supset .\alpha \supset \gamma,$
(PB)	$\vdash \beta \supset \gamma. \supset: \alpha \supset \beta. \supset .\alpha \supset \gamma,$
(PC)	$\vdash \alpha \supset .\beta \supset \gamma :\supset: \beta \supset .\alpha \supset \gamma,$
(PW)	$\vdash \alpha \supset .\alpha \supset \beta :\supset: \alpha \supset \beta,$
(PB′)	$\vdash \alpha \supset \beta. \supset: \beta \supset \gamma. \supset .\alpha \supset \gamma.$

On adoptera cette notation pour exprimer les propriétés de P. On verra qu'à chaque fois que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont un ensemble de combinateurs primitifs, alors $(\mathrm{PX}_1), \ldots, (\mathrm{P}X_n)$ sont un ensemble de schémas d'axiomes pour l'algèbre absolue de l'implication, et vice versa[2]. Cela est en accord

[2]Ceci est vrai pour les ensembles connus de combinateurs primitifs (K,S), (K,B,C,W), (K,B',W). Mais on n'a pas pour but d'affirmer que ce sera nécessairement le cas. L'exempe suivant montre pourquoi. Pour des combinateurs dans lesquels K n'intervient pas, n'importe lequel parmi (B,C,W,I), (B,C,S,I), (J,I) forme un ensemble suffisant de combinateurs primitifs. Les ensembles (PB), (PC), (PW) ou (PS), et (PI) forment un ensemble suffisant de schémas d'axiomes pour l'algèbre propositionnelle correspondante, que Church [WTI] appelle la théorie faible de l'implication.

avec les théorèmes 1 et 2.

Pour certains objectifs, il sera pratique d'introduire P_m en analogie avec F_m. La définition est

(7) $$\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{P},$$

(8) $$\mathrm{P}_{m+1} \equiv [x_1, \ldots, x_m, y, z]\mathrm{P}_m x_1 \ldots x_m(\mathrm{P}yz).$$

Références

[IFI] Curry, H. B., The interpretation of formalized implication. Non encore publié.

[LLA] Curry, H. B., Leçons de logique algébrique. Paris et Louvain, 1962.

[TFD] Curry, H. B., A theory of formal deducibility. Notre Dame Mathematical Lectures, 6 , Notre Dame, Indiana, 1950.

[WTI] Church, A., The weak theory of implication. Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und zur Logik der Einzelwissenschaften, édité par A. Menne, A. Wilhelmy, Helmut Angstl (Festival pour les 60 ans du Prof. W. Britzelmayr), Munich, 1951, pp. 22-37.

D'un autre côté, (PJ) et (PI) ne forment pas un ensemble suffisant de postulats pour l'algèbre affaiblie. En fait le caractère fonctionnel de J comme défini par le théorème de stratification (voir § D4) est $\mathrm{F}_4(\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}\beta\beta)\alpha\beta\alpha\beta$; et on peut montrer par la technique du § B que l'on ne peut pas déduire de (FJ) et (FI) seuls le caractère fonctionnel de vrai de JII ($= C_*$). Ainsi (FJ) et (FI) sont insuffisants pour le théorème de stratification (modifié par la restriction que $_1, \ldots, x_m$ doivent effectivement avoir lieu dans $\mathfrak{X}$). Cela est en lien avec le fait que J répète son premier, plutôt que son dernier argument ; et par conséquent, une hypothèse analogue à (d) dans le théorème C3 ne devrait pas être satisfaite pour les réductions par (J). Il est important, alors, que les combinateurs primitifs forment un ensemble tel que leur schémas correspondant $(\mathrm{F}X)$ soit suffisants pour une modification appropriée du théorème de la stratification.

Traduction de l'article *La notion de construction formules-comme-types*, de W. H. Howard, (notes manuscrites de 1969, publiées en 1980 dans l'ouvrage collectif "To H. B. Curry : essays on combinatory logic, lambda calculus, and formalism", Curry H.B., Hindley B., Seldin J.R., Jonathan P. (eds.), Academic Press (1980)).

Dédié à H. B. Curry à l'occasion de son 80$^{\text{ème}}$ anniversaire

L'article suivant est constitué de notes qui ont circulé de façon privée en 1969. Comme il a été fait référence à ces notes quelques fois dans la littérature, il semble qu'il soit bon de les publier. Elles ont été réarrangées pour en faciliter la lecture, et quelques corrections non essentielles ont été faites.

Le but ultime était de développer une notion de construction adaptée à l'interprétation des mathématiques intuitionnistes. La notion de construction développée dans les notes est certainement trop fruste pour cela, et donc l'usage du mot *construction* n'est pas très approprié. Pourtant, la terminologie a été conservée pour préserver le titre original et également pour préserver l'esprit des notes. Le titre a un second défaut ; un *type* devrait notamment être vu comme un objet abstrait alors qu'une *formule* est le nom d'un type.

Dans la Partie I, les idées sont illustrées pour le calcul propositionnel intuitionniste et dans la Partie II, elles sont appliquées à l'arithmétique de Heyting.

I. Calcul propositionnel intuitionniste

H. Curry (1958) a observé qu'il y a une forte correspondance entre les axiomes de la logique propositionnelle implicative positive d'un côté, et les combinateurs de base de l'autre côté. Par exemple, le combinateur $\mathrm{K} = \lambda \mathrm{X}.\lambda \mathrm{Y}.\mathrm{X}$ correspond à l'axiome $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$.

La notion suivante de construction, pour la logique propositionnelle implicative positive, était motivée par l'observation de Curry. Plus précisément, l'observation de Curry a fourni la *moitié* de la motivation. L'autre moitié a été fournie par la découverte de W. W. Tait de la forte correspondance entre l'élimination par le cut et la réduction des λ-termes (W. W. Tait, 1965). Il est plus pratique d'utiliser des λ-termes plutôt que des combinateurs. Cela correspond à la formulation par des séquents de la logique propositionnelle.

1. Formulation du calcul des séquents

Dénotons par $\mathrm{P}(\supset)$ la logique propositionnelle implicative positive. Les formules primitives de $\mathrm{P}(\supset)$ sont les variables propositionnelles. Si α et β sont des formules, $\alpha \supset \beta$ en est une aussi. Un *séquent* a la forme $\Gamma \to \beta$, où Γ est une séquence (possiblement vide) de formules et β est une formule. Les axiomes et les règles d'inférence de $\mathrm{P}(\supset)$ sont les suivantes :

W.H. Howard travaillait dans le Département de mathématiques, Université de l'Illinois à Chicago Circle, Chicago, Illinois 60680, U.S.A., quand il a écrit cet article.

Transcrit en 2017 en LATEX par Armando B. Matos.

Traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2022.

(1.1) Axiomes : tous les séquents sont de la forme $\alpha \to \alpha$,

(1.2) $\dfrac{\Gamma, \alpha \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta}$,

(1.3) $\dfrac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta \to \alpha \supset \beta}{\Gamma, \Delta \to \beta}$,

(1.4) Règles d'amincissement, de permutation et de contraction.

2. Symboles de type, termes et constructions

Par les termes "symbole de type", on désigne une formule de P($\supset$). On considèrera un λ-formalisme dans lequel chaque terme a un symbole de type α comme superscript (qu'on peut ne pas toujours écrire) ; le terme est dit être de type α. Les règles de formation des termes sont les suivantes :

(2.1) Les variables X^α, Y^β,... sont des termes.

(2.2) λ-abstraction : à partir de F^β, on obtient $(\lambda\mathrm{X}^\alpha.\ \mathrm{F}^\beta)^{\alpha\supset\beta}$.

(2.3) Application : à partir de $\mathrm{G}^{\alpha\supset\beta}$ et H^α, on obtient $(\mathrm{G}^{\alpha\supset\beta}\mathrm{H}^\alpha)^\beta$.

Par les termes "*construction* d'un séquent $\Gamma \to \beta$", on désigne un terme F^β de type β tel que pour toute variable libre X^α apparaissant dans F^β, il y a une occurrence correspondante de α dans Γ (ceci étant compris comme le fait que l'existence de k variables libres distinctes du même type α dans F^β est reflété par au moins k occurrences de α dans Γ). Ainsi X^α est une construction de $\alpha \to \alpha$ (mais X^α est également une construction de $\beta, \alpha \to \alpha$). Un autre exemple : $\lambda\mathrm{X}^\alpha.\ \lambda Y^\beta.\mathrm{X}^\alpha$ est une construction de $\to \alpha \supset (\beta \supset \alpha)$.

3. Correspondence entre la dérivation et les termes

De façon claire, les axiomes et les règles d'inférence (1.1)-(1.3) de P($\supset$) correspondent exactement aux règles (2.1)-(2.3) de la formation des termes. Une construction de $\Gamma \supset \beta$ est clairement également une construction de $\Gamma, \alpha \to \beta$ (amincissement) ; de façon simlaire pour une permutation de Γ ; et la contraction $\dfrac{\Gamma, \alpha, \alpha \to \beta}{\Gamma, \alpha \to \beta}$ correspond au fait de remplacer deux variables distinctes de type α par une variable de type α dans la construction correspondante.

Par conséquent :

Théorème 1 : *Étant donnée une dérivation de $\Gamma \to \beta$ dans P($\supset$), on peut trouver une construction de $\Gamma \to \beta$ et inversement.*

4. Interprétation des termes

Pour une interprétation dans la théorie des ensembles ordinaires, dénotons par chaque variable propositionnelle (i.e., par chaque symbole de type fondamental) un ensemble particulier d'objets de base. Alors tout symbole de type peut être utilisé pour dénoter un ensemble de choses selon la règle : $\alpha \supset \beta$ dénote l'ensemble de toutes les fonctions dont le domaine est un sur-ensemble de α et dont le domaine image est un sous-ensemble de β (selon que le sur-ensemble dépende de la fonction en question, ou qu'il ne dépende que de α, on obtient des interprétations légèrement différentes). Les variables de type α sont interprétées comme parcourant l'ensemble α.

La façon dont chaque terme doit être interprété comme une fonction des objets que ses variables libres parcourent, par induction sur les règles (2.1)-(2.3) de formation des termes, est maintenant claire. Ainsi, les termes fermés peuvent être interprétés comme un ensemble parfaitement concret de fonctionnelles de type fini sur les objets de base. Cette interprétation a été utilisée par H. Lauchli dans l'article qu'il a exposé à la Conférence d'été de Buffalo en 1968 : voir (Lauchli, 1970) pp. 227-229.

Bien sûr, un constructiviste serait intéressé par d'autres interprétations ; par exemple, les interprétations liées au *calcul* des termes (i.e., réduction à une forme irréductible). Il est facile de prouver que les termes donnés ci-dessus peuvent être réduits à une forme normale (i.e., irréductible) par λ-contractions. On va maintenant discuter brièvement de la relation entre cela et l'élimination par le cut.

5. Normalisation des termes et élimination par le cut

Clairement, la règle du cut pour $\mathrm{P}(\supset)$ correspond à la règle suivante de formation d'un terme : à partir de F^α et de G^β, on obtient $[\mathrm{F}^\alpha/\mathrm{X}^\alpha]\mathrm{G}^\beta$ (le résultat du remplacement de F^α par G^β pour les variables libres X^α, de façon à ce qu'aucune variable dans F^α ne devienne liée dans $[\mathrm{F}^\alpha/\mathrm{X}^\alpha]\mathrm{G}^\beta$). Bien que l'on n'ait pas inclus la substitution dans nos règles de formation des termes, la règle (2.3) (application) est juste plutôt mauvaise du point de vue de l'obtention de termes irréductibles. Le Professeur Curry aime souligner comment obtenir des termes irréductibles : remplacer simplement la règle (2.3) par :

(5.1) d'une variable X de type $\alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset (... \supset)(\alpha_n \supset \beta)...))$ et des termes F_1,..., F_n de types $\alpha_1, ..., \alpha_n$, respectivement, obtenir le terme XF_1... F_n de type β.

D'une manière correspondante, remplaçons la règle (1.3) de $\mathrm{P}(\supset)$ par la règle à n prémisses

$$\frac{\Gamma_1 \to \alpha_1 \quad \Gamma_2 \to \alpha_2 \quad \ldots \quad \Gamma_n \to \alpha_n}{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset (\ldots \supset (\alpha_n \supset \beta)\ldots)) \to \beta}. \tag{5.2}$$

Bien sûr, (5.2) peut être obtenue par n applications de l'une des règles de Gentzen

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta, \Delta \to \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \gamma}, \tag{5.3}$$

avec γ égal à β, et l'utilisation de β, $\Delta \to \beta$. Nous pourrions remplacer (5.1) par une règle de formation des termes correspondant à (5.3), mais (5.1) semble plus naturelle. Comme modification du théorème 1, on a le :

Théorème 2 : Désignons par P*($\supset$) le P($\supset$) avec la règle (1.3) remplacée par (5.2). Alors, étant donnée n'importe quelle dérivation de $\Gamma \rightarrow \beta$ dans P*($\supset$), on peut trouver une construction irréductible de $\Gamma \rightarrow \beta$ et inversement.

L'*élimination* cut est un terme utilisé pour signifier la transformation d'une preuve de $\Gamma \rightarrow \beta$ dans P($\supset$) en une preuve de $\Gamma \rightarrow \beta$ dans P*($\supset$). Ainsi l'élimination cut peut être obtenue comme une conséquence de la réduction des termes à la forme normale. Comme mentionné dans le § 4, une telle réduction est facile à prouver pour les termes dont on discute. Les résultats découlant de l'élimination cut dans P($\supset$) (e.g.) la non-dérivabilité de la loi de Peirce $(\alpha \supset \beta. \supset \alpha) \supset \alpha$ semble pouvoir être obtenue au moins aussi facilement à partir de la normalisabilité des constructions.

6. Ajout de $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ à P($\supset$)

Correspondant à chacun de ces connecteurs, on ajoute certain termes fermés fondamentaux à notre lot de termes.

(i) Pour $\neg$, ajoutons une nouvelle formule fondamentale f à P($\supset$). Alors, pour toute formule α, introduisons un terme $A^{f \supset \alpha}$. Comme exercice, le lecteur peut souhaiter prouver - pour le système résultant - qu'il n'y a pas de termes fermés de type f. (Par normalisabilité, il suffit de prouver cela pour les termes irréductibles). *Il y a* des termes ouverts de type f ; par exemple, la variable X^f - qui est une construction de $f \rightarrow f$.

(ii) Pour $\wedge$: ajoutons les termes
$B_1{}^{\alpha \supset (\beta \supset \alpha \wedge \beta)}$,
$B_2{}^{\alpha \wedge \beta \supset \alpha}$, et
$B_3{}^{\alpha \wedge \beta \supset \beta}$.

Ce sont juste des fonctionnelles d'appariement et de projection ($\alpha \wedge \beta$ est le type d'une paire de termes de types α et β). Nous n'avons pas besoin d'ajouter un terme de type $\beta \supset (\alpha \supset \alpha \wedge \beta)$ parce qu'un tel terme peut être défini comme $\lambda Y^{\beta}.\lambda X^{\alpha}.B_1 X^{\alpha} Y^{\beta}$.

En lien avec la théorie de la réductibilité des constructions, il est utile de postuler la contraction
$B_2(B_1FG)$ contr F et
$B_3(B_1FG)$ contr G.

Alors on obtient le théorème suivant :

Théorème 3 : Tout terme irréductible fermé de type $\alpha \wedge \beta$ a la forme $B_1F^{\alpha}G^{\beta}$, où B_1 est comme ci-dessus.

[*Note ajoutée en 1979.* Ce traitement de $\neg$ et $\wedge$ ne semble pas approprié pour l'élimination cut dans le calcul des séquents de Gentzen. Comme P. Martin-Löf me l'a souvent fait remarquer, il est approprié pour la théorie de D. Prawitz du système de Gentzen de déduction naturelle. Voir Prawitz (1965). Les termes $A^{f \supset \alpha}$ et $B_1^{\alpha \supset (\beta \supset \alpha \wedge \beta)}$ correspondent aux règles d'inférence $\dfrac{f}{\alpha}$ et $\dfrac{\alpha \;\; \beta}{\alpha \wedge \beta}$, respectivement, alors que $B_2^{\alpha\wedge\beta\supset\alpha}$ et $B_3^{\alpha\wedge\beta\supset\beta}$ correspondent à $\dfrac{\alpha\wedge\beta}{\alpha}$ et $\dfrac{\alpha\wedge\beta}{\beta}$, respectivement.]

(iii) Pour $\vee$: il y a deux possibilités, correspondanr à la discussion de l'existence faible et de l'existence forte dans le § 12, ci-dessous. Correspondant au cas de l'existence faible, on ajoute les termes $C_1^{\alpha\supset\alpha\vee\beta}$, $C_2^{\beta\supset\alpha\vee\beta}$, et $C_3^{\alpha\vee\beta\supset(\alpha\supset\gamma.(\beta\supset\gamma.\supset\gamma))}$. Il est utile de postuler les contractions
$C_3(C_1M)FG$ contr FM et
$C_3(C_2N)FG$ contr GN
pour tous les termes M, N, F, G des types $\alpha, \beta, \alpha\supset\gamma, \beta\supset\gamma$, respectivement. Alors, on obtient le théorème suivant

Théorème 4 : *Tout terme irréductible fermé de type $\alpha\vee\beta$ a la forme C_1F^α or C_2G^β, où C_1 et C_2 sont comme ci-dessus.*

II. Arithmétique de Heyting

Nous nous intéresserons principalement au sous-système $H(\supset,\wedge,\forall)$ de l'arithmétique de Heyting obtenu en omettant $\vee$ et $\exists$. Comme c'est bien connu, $\neg\alpha$ peut être défini comme $\alpha\supset 0=1$. Dans le § 12, nous ferons quelques remarques à propos de la question de l'ajout de $\exists$. Bien sûr, $\vee$ peut être défini au moyen de $\exists$. Les variables appartenant à $H(\supset,\wedge,\forall)$ seront appelées *variables nombres.*

7. Constructions

Nos constructions seront des termes construits à partir des termes fondamentaux au moyen des règles de formation des termes comme indiqué en (ii)-(iv), ci-dessous. Tout terme est représenté par un symbole unique de type. Les termes nombres notamment, les termes appartenant à $H(\supset,\wedge,\forall)$ ont pour type 0.

(i) *Symboles de type.* Les symboles de types fondamentaux sont : 0 et toute équation de $H(\supset,\wedge,\forall)$. À partir de ceux-ci, on engendre tous les symboles de types par les deux règles suivantes.

  (a) De α et β, on obtient $\alpha\supset\beta$ et $\alpha\wedge\beta$.

  (b) De α et d'une variable nombre x, on peut créer $\forall x\,\alpha$.

(ii) *Termes fondamentaux.* Ce sont :

  (a) les variables nombres $x, y, \ldots$; les constantes 0 et 1 ; les symboles de fonction pour plus et fois,

  (b) les variables X^α, Y^β,…,

  (c) certain termes spéciaux, mentionnés dans le § 8, ci-dessous, correspondant aux axiomes et aux règles d'inférence de $H(\supset,\wedge,\forall)$.

(iii) λ-*abstraction :*

  (a) De F^β, on obtient $(\lambda X^\alpha.F^\beta)^{\alpha\supset\beta}$ comme dans le § 2.

(b) Si x n'apparaît pas comme étant libre dans le symbole de type de n'importe quelle variable libre de F, on peut former $(\lambda x.\mathrm{F}^{\beta})^{\forall x\,\beta}$

(iv) *Application :*

(a) De F^{α} et $\mathrm{G}^{\alpha\supset\beta}$, formons $(\mathrm{GF})^{\beta}$ comme dans le § 2.

(b) De $\mathrm{G}^{\forall x\,\alpha(x)}$ et t de type 0, formons $\mathrm{G(t)}^{\alpha(t)}$

8. Termes spéciaux

(i) les termes de types $x + 0 = x$ et $x + (y + 1) = (x + y) + 1$,

(ii) les termes de types $x \cdot 0 = 0$ et $x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$,

(iii) un terme de type $x = x$,

(iv) un terme de type $x = y \supset t(x) = t(y)$ pour chaque terme $t(x)$ de type 0,

(v) les termes B_1, B_2, et B_3 discutés au § 6 (ii),

(vi) un terme $\mathrm{R}^{\forall y\,\beta(y)}$ pour chaque $\beta(y)$ de la forme
$\alpha(0) \supset [\forall x(\alpha(x) \supset \alpha(x + 1)) \supset \alpha(y)]$,
également un terme $\mathrm{R}^{\beta(n)}$ pour chaque numéral n.

9. Constructions et dérivations dans H($\supset, \wedge, \forall$)

Définissons les constructions comme au § 2. Comme dans le cas de P($\supset$) - voir le § 3 - les axiomes de H($\supset, \wedge, \forall$) correspondent à l'existence de certain termes, et les règles d'inférence correspondent aux règles de formation des termes. En particulier $\forall x\,\alpha(x) \to \alpha(t)$ a la construction $\mathrm{Y}^{\forall x\,\alpha(x)}t$. Si F est une construction de $\Gamma \to \alpha$, alors $\lambda x.\mathrm{F}$ est une construction de $\Gamma \to \forall x\ \alpha$. Si $\mathrm{G}(\mathrm{X}^{\alpha(t)})$ est une construction de $\Gamma, \alpha(y) \to \beta$, alors $\mathrm{G}(\mathrm{Y}^{\forall x\,\alpha(x)}t)$ est une construction de $\Gamma, \forall x\ \alpha(x) \to \beta$. Ainsi, on obtient le :

Théorème 5 : *Étant donnée n'importe quelle dérivation de $\Gamma \to \beta$ dans H($\supset, \wedge, \forall$), on peut trouver une construction de $\Gamma \to \beta$ et inversement.*

10. Interprétation des termes de H($\supset, \wedge, \forall$)

On étend la discussion du § 4 comme suit.

(i) On interprète chaque formule fermée α comme un ensemble α^* de la manière suivante. Si α est une équation fermée, alors α^* est l'ensemble singleton $\{1\}$ si l'équation est vraie et l'ensemble $\{0\}$ si l'équation est fausse. Si $\alpha(n)^*$ a été défini pour chaque numéral n, alors définissons $(\forall x\ \alpha(x))^*$ comme l'ensemble de toutes les fonctions f telles que $f(n) \in \alpha(n)^*$ pour tout n. Définissons $(\alpha \supset \beta)^*$ en fonction de α^* et β^* comme dans le § 4. Définissons $(\alpha \wedge \beta)^*$ comme le produit cartésien de α^* et β^*.

(ii) À chaque terme, on associe un objet F^* en utilisant les clauses suivantes. On doit noter que si F est fermée, alors le symbole de type de F est une formule fermée α ; et F^* est un élément de α^*.

(a) Supposons que F ait la forme $G(x_1, ..., x_k)$, où $x_1, ..., x_k$ sont les variables nombres libres de F. En supposant que $G(n_1, ..., n_k)^*$ a été définie pour tous les numéraux $n_1, ..., n_k$, on définit F^* comme étant l'application qui envoie chaque k-tuple $n_1, \ldots, n_k$ sur $G(n_1, ..., n_k)^*$.

(b) Supposons que F n'ait pas de variables nombres libres. Si F a la forme $\forall x\ G(x)$, alors définissons F^* comme l'application qui envoie chaque numéral n sur $G(n)^*$. Si F n'a pas cette forme, alors les variables libres de F auront les types $\beta_1, ..., \beta_k$ qui ont été interprétés comme les ensembles $\beta_1^*, ..., \beta_k^*$ dans (i), ci-dessus, et F sera une application du produit cartésien de $\beta_1^*, ..., \beta_k^*$ dans α^*.

En particulier, si F a la forme $\lambda Y^\beta.G$, alors F^* est défini en fonction de G^* par l'interprétation habituelle de la λ-abstraction.

Pour être systématique, on doit autoriser les variables libres, ici et dans (a), à apparaître de façon vide.

(c) Si F est de la forme $R_n^{\beta(n)}$ comme dans § 8 (vi), alors F^* est défini par une récursion primitive sur n. Si F est $R^{\forall y \beta(y)}$, alors F^* est l'application qui envoie tout numéral n dans $(R_n^{\beta(n)})^*$.

11. Normalisation des termes

Pour la théorie de la réductibilité des termes, on postule les schémas de contraction suivants

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{lll} (\lambda X.F(X))^{\alpha\supset\beta}G & \text{contr} & F(G)^\beta \\ (\lambda X.F(X))^{\forall x\,\alpha(x)}t & \text{contr} & F(t)^{\alpha(t)} \end{array}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{lll} B_2(B_1FG) & \text{contr} & F \\ B_3(B_1FG) & \text{contr} & G \end{array}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{array}{lll} R_0^{\beta(0)}FG & \text{contr} & F \\ R_{n+1}^{\beta(n+1)}FG & \text{contr} & Gn(R_n^{\beta(n)}FG) \\ R^{\forall x\beta(x)}n & \text{contr} & R_n^\beta(n) \end{array}$$

Considérons également les étapes du calcul des termes nombres fermés comme des étapes de réduction.

Par la méthode de Tait (1967), il est facile de démontrer le :

Théorème 6 : *Tout terme peut se réduire à une forme irréductible.*

Le théorème 3 du § 6 s'étend aux termes présents. En utilisant le théorème 3, il est facile de montrer qu'il n'y a pas de construction irréductible d'un séquent de la forme $\rightarrow m = n$ avec $m \neq n$. Ainsi par un raisonnement fini, on peut prouver que le théorème 6 implique la consistance de $H(\supset, \wedge, \forall)$.

12. Introduction de $\exists$

Comment allons-nous gérer le quantificateur existentiel dans notre théorie des constructions ? Cela s'avère être une question non-triviale. Les deux alternatives suivantes sont envisageables.

(i) *Existence faible.* Dans la formulation de $H(\supset, \wedge, \forall)$, prenons les séquents

$$\begin{aligned} &\to \alpha(t) \supset \exists y\ \alpha(y) \\ &\to \exists y\ \alpha(y) \supset (\forall x(\alpha(x) \supset \beta) \supset \beta) \end{aligned}$$

(x non libre dans β) comme étant des axiomes et introduisons de nouveaux termes fondamentaux C_1, C_2 de types $\alpha(t) \supset \exists y\, \alpha(y)$ et $\exists y\, \alpha(y) \supset (\forall x(\alpha(x) \supset \beta) \supset \beta)$, respectivement. Postulons la contraction

$C_2(C_1F)G$ contr GtF

pour tous les termes F et G de types $\alpha(t)$ et $\forall x(\alpha(x) \supset \beta) \supset \beta$, respectivement.

Les théorèmes 3, 5 et 6 s'étendent à $H(\supset, \wedge, \forall, \exists)$.

Correspondant au théorème 4, on a le :

Théorème 7 : *Tout terme irréductible fermé de type* $\to \exists y\, \alpha(y)$ *a la forme* $C_1^{\alpha(n) \supset \exists y\, \alpha(y)} F^{\alpha(n)}$.

Ainsi, à partir d'une construction irréductible de $\to \exists y\, \alpha(y)$, on obtient un numéral n et une construction irréductible de $\to \alpha(n)$ (en supposant que $\exists y\, \alpha(y)$ fermé).

(ii) Existence forte (opérateur de choix). Il est naturel d'interpréter un objet de type $\exists y\, \alpha(y)$ comme une paire $\langle t, F^{\alpha(t)} \rangle$. Ainsi, dans § 10, $(\exists y\, \alpha(y))^*$ serait défini comme l'ensemble de toutes les paires $\langle n, Z \rangle$ telles que $Z \in \alpha(n)^*$. Par conséquent, introduire des opérateurs de projection P_1 et P_2 qui donnent les composants requis t et $F^{\alpha(t)}$ quand on les applique à une paire $\langle t, F^{\alpha(t)} \rangle$ regardée comme un objet de type $\exists y\, \alpha(y)$. Les opérateurs P_1 et P_2 peuvent être considérés comme ayant les types $\exists y\, \alpha(y) \supset 0$ et $X^{\exists y\, \alpha(y)} \alpha(P_1 X^{\exists y\, \alpha(y)})$, respectivement. Cela nous sort du formalisme de $H(\supset, \wedge, \forall, \exists)$: les symboles de type de P_1 et P_2 ne sont pas des formules de $H(\supset, \wedge, \forall, \exists)$. Cependant, le sens à attacher à P_1 et P_2 est clair. Notamment, P_1 s'applique à un objet F de type $\exists y\, \alpha(y)$ et amène un objet P_1F de type 0 ; et P_2 quand on l'applique à F amène un objet de type $\alpha(P_1F)$.

Pour illustrer l'utilisation de P_1 comme opérateur de choix, soit $\alpha(x, y)$ une formule de $H(\supset, \wedge, \forall, \exists)$ avec les variables libres x et y, et soit F une construction du type $\exists y\, \alpha(x, y)$. Alors $\lambda x.P_1F$ est un terme ϕ satisfaisant $\forall x\ \alpha(x, \phi(x))$.

En général un symbole de type de la forme $\forall X^\alpha \beta$ est obtenu par abstraction à partir d'un terme F^β, où la variable X^α apparaît dans β (ainsi que dans d'autres endroits dans F). Une théorie de tels termes devrait étendre la théorie développée dans les sections précédentes. Dans la dernière théorie, les seules variables qui apparaissent dans les symboles du type sont de type 0 (ce sont, notamment, les variables nombres de H($\supset, \wedge, \forall, \exists$)).

Il peut être intéressant de connaître la réponse à la question suivante. Soit G un terme fermé obtenu en étendant notre offre de constructions de la façon qui vient d'être décrite. Supposons que G soit de type α où α est une formule de H($\supset, \wedge, \forall, \exists$). Doit-il y avoir une dérivation de $\rightarrow \alpha$ dans H($\supset, \wedge, \forall, \exists$) ?

13. Constructions infinies

Comme il est bien connu, on n'a pas d'élimination cut pour H($\supset, \wedge, \forall$) à moins que l'axiome d'induction mathématique ne soit remplacé par une ω-règle. Il n'y a pas de difficulté à développer une théorie des constructions pour la version ω-règle de H($\supset, \wedge, \forall$). En fait, si on utilise la notion de Tait des termes infinis (Tait, 1967), on obtient une théorie très simple (modulo la question de la gestion constructive des termes infinis).

Références

[1] Curry, H. B., Feys, R. (1958). Combinatory Logic, North-Holland, Amsterdam.

[2] Lauchli, H. (1970). An abstract notion of realizability for which intuitionistic predicate calculus is complete. In "Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N.Y." (Eds. G. Myhill, A. Kino, R. E. Vesley) pp. 227-234. North-Holland, Amsterdam.

[3] Prawitz, D. (1965). Natural Deduction, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

[4] Tait, W. W. (1965). Infinitely long terms of transfinite type. In "Formal Systems and Recursive Functions" (Eds. J. N. Crossley and M. A. E. Dummett), North-Holland, Amsterdam.

[5] Tait, W. W. (1967). Intensional interpretations of functionals of finite type, Journal of Symbolic Logic 32, 198-212.