Que veut-on dire par égal ?
Conférence à la mémoire de Vladimir Voevodsky
Pierre Deligne
11 septembre 2018

Ainsi, dans la théorie des types utilisée par Voevodsky, l'égalité $(a = b)$ n'a de sens qu'entre objets de même type ; plus précisément, la syntaxe ne permet de l'écrire que lorsque a et b sont déclarés comme étant des objets de même type. Et cette proposition n'est pas habituellement considérée comme une proposition, mais comme un type elle-même [1]. Cela m'intrigue, d'autant plus que j'ai toujours été très intéressé par l'utilisation du transport de structure, qui est en quelque sorte à la base de l'axiome d'univalence. Je souhaite donc comprendre ce que nous entendons habituellement par "égal" et son lien avec ce formalisme. Il est vite devenu évident que nous utilisions le mot "égal" avec des sens différents. Et c'est parfaitement normal, comme Heumpty Deumpty le disait à Alice : "Quand je fais beaucoup travailler un mot, je le paie toujours beaucoup plus", étant donné que nous devons savoir à chaque fois dans quel sens nous utilisons le mot. Donc, si j'utilise d'abord la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF), alors tout est ensemble et par axiome vous avez que X est égal à Y signifie que les deux sont le même élément $(X = Y \iff \forall x((x \in X \iff x \in Y))$.

C'est bien, mais ce n'est pas la façon habituelle dont ZF utilise le signe "égal", mais encore une fois, il n'y a pas de mal à cela, car pour moi, Zermelo-Fraenkel n'est pas, ou tout système formel n'est pas, un outil d'écriture mathématique, mais un outil d'analyse de preuves. Il est également très utile de donner un sens commun à ce que signifie avoir une preuve. Si quelqu'un veut dire "j'ai une preuve de quelque chose", pour moi, cela signifie qu'en principe, cela peut être formalisé en théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Donc, au moins, je sais ce que cela signifie. Et cela n'a pas toujours été le cas jusqu'au XVIIIe siècle, lorsque l'on s'intéressait à l'analyse, la signification d'une preuve n'était pas claire. C'est donc une signification de la preuve. Mais comme je le disais, ce n'est pas le sens habituel, et ce n'était pas le sens habituel avant ou après la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Si je remonte deux mille ans avant Zermelo-Fraenkel, lorsqu'on dit en géométrie plane euclidienne que deux triangles sont égaux, on ne veut pas dire qu'il s'agit du même triangle. En fait, ce que nous voulions dire n'était pas tout à fait clair. Cela signifie plus ou moins que nous pouvons déplacer l'un vers l'autre par isométrie sans que rien ne change. En termes modernes, nous dirions qu'il existe un automorphisme du plan transposant un triangle sur l'autre, mais c'est complètement anachronique. Premièrement, déplacer le plan ou l'espace entier n'aurait pas été considéré comme physiquement possible, alors qu'il est possible de déplacer une feuille de papier contenant un triangle sur une autre. De plus, le concept d'espace entier n'était pas bien considéré en raison d'un tabou sur l'infini actuel.

Mais nous avons cette forme depuis longtemps, et si je prends un exemple plus récent, lorsqu'on écrit quelque chose comme $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ ou si l'on écrit une formule de Künneth $H_*(X, F) = H_*(X, F)_*(Y, F)$ pour l'homologie avec des coefficients dans un corps, on ne veut certainement pas dire qu'ils sont égaux au sens de la théorie de Zermelo-Fraenkel. Ce sont des objets différents. Donc, dans ces cas, un peu comme pour les triangles, on veut dire... au sens faible, qu'il existe un isomorphisme entre les deux. Mais dans tous ces cas, l'existence d'un isomorphisme est une affirmation faible et, en règle générale, on veut dire plus. Ainsi, par exemple, si je regarde à nouveau un triangle en géométrie plane, si

Référence : https://www.youtube-nocookie.com/embed/WfDcrN5_1wA, septembre 2018.

Transcription : Denise Vella Chemla, juin 2022.

[1] l'égalité $a = b$.

j'observe plusieurs triangles *(dessinant deux triangles au tableau)*, on a ce critère d'égalité des triangles : si les deux ont un même angle et la même longueur pour les deux côtés de l'angle (*symbolisant ces contraintes par des signes au tableau*), alors les deux triangles sont égaux, c'est une affirmation faible : il ne s'agit pas seulement de savoir s'il existe une isométrie entre les deux triangles, mais de noter que cette isométrie mènera ce point à ce point, ce point à ce point et ce point à ce point, ce qui est une affirmation plus forte. Par exemple, si vous observez un triangle avec un angle, et deux côtés égaux, vous pouvez utiliser le critère d'égalité des triangles pour écrire $ABC = ACB$. Vous saurez ainsi que le critère indique qu'il existe une isométrie associant A à A, B à C et C à B. Ainsi, vous obtenez la propriété de symétrie du critère d'égalité : les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égaux. C'est donc un aspect qui nécessite de se soucier des isomorphismes entre les objets, car les symétries entre objets sont également importantes.

Et j'ai dit que ce sont des affirmations faibles parce qu'il est en fait inutile de simplement connaître l'existence d'un isomorphisme : ici (*montrant l'identité $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ au tableau*) vous voudriez savoir par exemple que l'application identité de S^n correspond à un dans $\mathbb{Z}$ si vous voulez appliquer l'affirmation et ici (montrant l'identité de Künnteh au tableau), vous voulez savoir que vous avez un isomorphisme très explicite envoyant les classes de cohomologie α et β (*sur le côté droit de l'égalité*) sur les produits des images inverses de α et β par les deux facteurs (*sur le côté gauche de l'égalité*).

Donc ce que je veux retenir de tout cela, c'est que, très souvent, l'égalité signifie l'existence d'isomorphismes, mais que nous nous soucions également de comprendre les isomorphismes entre ces objets et pas seulement l'existence. Et cela correspond assez bien à ce que vous avez ici. Tout d'abord, pour parler d'isomorphismes d'objets, ils doivent avoir le même type : c'est la condition que l'égalité entre a et b n'a de sens que si nous avons des objets du même type. Et le fait que dans ces cas, pour ces exemples (*sphère et égalité de Künneth*), l'égalité est un type, ici elle serait interprétée comme étant l'ensemble des isomorphismes entre a et b. Et souvent, vous ne vous contenterez pas de prouver l'égalité, mais vous exposerez un objet de cette égalité (*écrivant $\alpha : a = b$ et en expliquant que*) ce double point signifie "est de type", ce qui signifie que vous construisez un isomorphisme et que vous l'utiliserez plus tard, cet isomorphisme que vous avez construit.

Or, un point qui apparaît déjà dans ce formalisme... Voici l'histoire : on part d'un type A, on a deux objets de type A, $(a, b : A)$; on considère l'égalité de types entre a et b ; et si on considère $a = a$, on obtient un isomorphisme d'identité : $id_a : a = a$. Cela indique qu'on peut itérer le processus. Dans ce formalisme, on peut considérer deux objets de type $a = b$, considérer le type d'égalité entre ces objets et itérer. Et cela se produit assez souvent dans divers cas. On a l'histoire de la théorie de l'homotopie, où l'égalité de X et Y correspond à l'équivalence d'homotopie entre X et Y. Si deux équivalences existent, on peut considérer l'équivalence entre homotopies ; si deux homotopies existent entre homotopies, on peut considérer l'équivalence entre homotopies, et ainsi de suite. On peut donc aller toujours plus loin, Voilà donc un contexte, il y a d'autres contextes où vous avez la même histoire : si vous considérez les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. l'égalité correspond essentiellement à avoir une équivalence de catégories entre elles. Maintenant, si vous avez deux équivalences de catégories, vous pouvez vous interroger sur l'isomorphisme entre les équivalences et ici, l'histoire s'arrête là, mais pour d'autres catégories, elle continuerait pendant un certain temps. Autre exemple : si vous considérez un complexe K^* et que vous considérez les classes de cohomologie de ce complexe (*écrivant $H^n(K^*)$*), souvent vous voulez plutôt considérer des cocycles (*écrivant c et c'*) et maintenant, une égalité entre cocycles (*écrivant $c = c'$*) serait une cochaîne d'une dimension précédente telle que $da = c - c'$, donc quelque chose montrant que les deux ont la même classe de cohomologie. Et maintenant vous pouvez continuer. Si vous avez deux tels a, leur différence est un cocycle et vous pouvez souhaiter que ce soit une colimite et ainsi de suite. Il s'agit donc d'un autre contexte permettant d'itérer cette notion d'égalité, et il est souvent très utile d'en garder une trace. Par exemple, si j'observe une cohomologie, si vous avez des classes de cohomologie h et h' et que vous prouvez leur égalité, plus précisément si vous prouvez de deux manières différentes qu'elles sont égales, cela aboutira souvent... à une classe de cohomologie en dimension inférieure. L'idée étant que vous examinez les cocycles c et c' correspondant à vos classes de cohomologie, une preuve d'égalité des classes de cohomologie vous donnera que la différence des cocycles est d de quelque chose (*écrivant* da), l'autre preuve d'égalité des classes de cohomologie donnera qu'elle est d de quelque chose d'autre (*écrivant* da'). et maintenant, vous avez $a - a'$, la différence entre les deux preuves qui est une classe de cohomologie dans H^{n-1}.

Je peux donc donner un exemple qui n'est pas très important : considérons la cohomologie d'un espace à coefficient dans $\mathbb{Z}/2$ (*écrivant* $H^*(X, \mathbb{Z}/2)$), maintenant vous savez que si nous avons deux classes de cohomologie, le cup-produit dans la cohomologie mod 2 sera commutatif. Et c'est vrai seulement à cause de $\mathbb{Z}/2$, sinon il aurait un signe moins (*écrivant* $\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$). Maintenant si vous considérez une cup-classe elle-même (*écrivant* $\alpha \cup \alpha$), cela vous demande de prouver $\alpha \cup \alpha = \alpha \cup \alpha$, c'est une chose évidente. Et puis cette preuve de commutativité, et donc à partir de votre classe α de départ, non seulement vous obtenez un cup-produit dans H^{2n}, mais le fait que vous ayez la preuve d'égalité de $\alpha \cup \alpha$ elle-même vous donnera une classe de cohomologie dans H^{2n-1} qui est un carré de Steenrod de α. Il est donc utile de suivre ces égalités entre égalités entre égalités dans différents contextes.

Il y a une chose qui nous intéresse dans l'égalité, et c'est la raison pour laquelle nous utilisons le même mot pour décrire différentes situations : si vous avez une égalité $A = B$, vous vous souciez que tout ce que vous faites sur A puisse être fait sur B de la même manière, c'est le transport de structure, ou ne pas avoir à se soucier de celle que vous utilisez, ou les axiomes d'univalence. Et la façon habituelle de gérer cela est de restreindre le langage que l'on s'autorise à utiliser, comme par exemple dans la théorie de Zermelo-Fraenkel. Laissez-moi vous donner un exemple. Supposons que vous ayez deux groupes G et G' et que vous ayez un isomorphisme entre eux. Alors tout ce que vous faites sur G est vrai de la même manière sur G', sauf que si vous utilisez le langage complet de Zermelo-Fraenkel, c'est clairement faux: vous pouvez vous demander par exemple si cet ensemble particulier est un élément de G (*écrivant* $\{\varnothing\} \in G$? *et* $\{\varnothing\} \in G'$?) et vous pouvez même isomorphiser entre les deux groupes et c'est une mauvaise question donc ce ne sera pas équivalent pour G et G'.

Donc vous devriez savoir quand il est acceptable d'utiliser un transport de structure et dire que tout sur G peut être transporté vers G' et au chapitre 4... Oh oui, d'abord je devrais en dire un peu plus sur la restriction du langage que l'on s'autorise à utiliser. C'est quelque chose qui est très familier ; par exemple, considérez la notion d'entiers $\{0, 1, 2....\}$; il existe un certain nombre de définitions différentes : si vous aimez la définition de Frege, vous avez l'ensemble vide, l'ensemble réduit à l'ensemble vide, et ainsi de suite (*écrivant* $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \ldots...$). Et en général, $n+1$ est égal à l'ensemble des entiers plus petits ou égaux à n (*en écrivant* $n + 1 = \{i | i \leq n\}$) ; donc c'est une définition. Si vous aimez la définition de Russel, vous direz que c'est la classe de tous les ensembles de même cardinal qu'un ensemble fini. Et une variante de cela est celle utilisée par Bourbaki : il faut utiliser le fait universel... (*Quelqu'un dans l'auditoire raconte quelque chose à propos de ce qui est écrit au tableau : le second est aussi une idée de Frege.*) Chez Bourbaki, il y a l'axiome du choix universel dans le formalisme sélectionnant un élément dans chaque classe, et ensuite chez Bourbaki, un entier est un représentant d'une telle classe d'ensembles finis équipotents. Maintenant, quand vous écrivez un article et que vous utilisez des entiers, vous ne dites pas laquelle des définitions vous utiliserez, mais cela signifie que vous ne vous autoriserez pas à utiliser quoi que ce soit où ces définitions seraient pertinentes. Par exemple, si vous avez un théoricien de l'homotopie et que vous voulez ensuite considérer l'ensemble $\{0, ..., n\}$, vous l'appellerez peut-être Δ_n, vous ne l'appellerez pas $n+1$. Ainsi, restreindre au langage que l'on utilise est une chose, mais nous le faisons couramment, et de même, pour déterminer quand utiliser le transport de structure, Bourbaki a fait l'effort courageux de codifier ce qu'il faut restreindre au langage que l'on utilise. Mais j'ai trouvé un peu ironique que le formalisme qu'il donnait ait été adéquat jusqu'à la publication de ce chapitre, seulement ! Donc, une chose importante est toujours la première... Je vais décrire brièvement ce qu'il faisait. Il faut d'abord définir ce qu'est une structure sur certains ensembles. Par exemple, on a des ensembles $E_1, \ldots, E_\ell$ et on cherche à définir ce qu'est une structure sur ces ensembles. Maintenant, je simplifie un peu : Bourbaki utilisait aussi des ensembles auxiliaires, comme les entiers ou un corps fondamental que vous utiliseriez. Donc la première chose qu'il faut dire est de quel type d'objet est la structure et, cela dit, qu'elle appartient à un ensemble construit à partir de l'ensemble de base par une liste d'opérations ; donc on peut dire le type d'objet qu'est l'ensemble. Mais il s'avère que les constructions utilisées par Bourbaki sont très peu nombreuses : il y a juste le produit (*écrivant* $\times$) et un ensemble de tous les sous-ensembles (*écrivant* $\mathfrak{P}$); donc avant de dire ce qu'est un groupe, je dirai d'abord que la structure est un élément de l'ensemble des sous-ensembles de E fois E fois E (*écrivant* $E \times E \times E$) dont je dois penser la structure comme un graphe d'une application de la loi de composition de $E \times E$ allant vers E (*Il écrit ceci* $s \in \mathfrak{P}(E \times E \times E)$). Maintenant que j'ai dit quel est le type de la structure, une chose que j'obtiens est que si j'ai une bijection entre F_i... (*effaçant une partie de ce qui est écrit verticalement* $E_\ell \to F_\ell$)... Laissez-moi juste penser à un ensemble de base avec un autre exemple si vous voulez une structure d'un espace topologique, votre s sera dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, l'ensemble de tous les sous-ensembles ouverts pour la topologie. Maintenant, si vous avez une bijection de votre ensemble de base vers un autre ensemble (*montrant* $E \xrightarrow{s} F$) et certains s dont vous avez prescrit le type, cela vous permettra de passer d'une structure sur E à une structure sur F. Si vous avez un sous-ensemble de E, cela vous donne un sous-ensemble de F. Si vous avez un ensemble de sous-ensembles, cela vous donne un ensemble de sous-ensembles. Mais pour cela, vous devez bien sûr prescrire quel type d'objets vous considérez. Et maintenant les axiomes de la structure doivent être tels que les axiomes sont vrais pour certains s si et seulement s'ils sont vrais pour certains s transportés et il y a beaucoup de critères pour savoir quand tout cela est vrai et en pratique, nous le faisons sans réfléchir. On n'impose pas d'axiomes stupides comme φ est un élément de notre ensemble de base (*écrivant* $\varphi \in E$) ou quelque chose de ce genre, qui ne serait pas transportable. Non. Un point fondamental ici, si l'on veut formuler des énoncés transportables, est important : on ne peut exiger l'égalité qu'entre objets de même type. Et cela correspond également à la condition selon laquelle il ne devrait jamais y avoir d'égalité entre objets de types différents (*montrant la première définition de* $a = b$ *au premier tableau*). Ici (*montrant* $E \to F, s \to t$), ce ne serait pas transportable.

Or, je disais que cela était suffisant presque jusqu'à la parution du livre de Bourbaki, et essentiellement pour deux raisons, la première est que les constructions de types autorisées sont beaucoup trop restrictives en pratique : par exemple si vous regardez un espace topologique X que vous prenez fixé et que vous considérez des faisceaux sur X, donc une partie des données (ou préfaisceaux, ce que vous voulez) pour chaque ouvert, vous voulez un ensemble $\mathcal{F}(U)$ et vous savez ce qu'un isomorphisme de faisceaux est censé faire de $\mathcal{F}(U)$ vers $\mathcal{F}(V)$, si vous avez $s \in \mathcal{F}(U)$ et $t \in \mathcal{F}(V)$, cela ne devrait pas avoir de sens d'exiger l'égalité entre s et t ($s = t$) car, si vous avez un isomorphisme de ce faisceau dans un autre, ce genre de condition ne sera pas respecté. Donc c'est un exemple basique où ce formalisme est insuffisant. Et je dirais que lorsque vous êtes dans ce cadre, la notion d'isomorphisme qui en découle est automatique : vous n'avez pas besoin de définir ce qu'est l'isomorphisme ; c'est juste l'isomorphisme de... une bijection de E vers F sera un isomorphisme de s et t si elle envoie s sur t. Ainsi, les faisceaux sont un exemple lorsque les choses sont en dehors de ce formalisme et aussi certaines constructions que nous aimons faire ne sont pas autorisées dans le formalisme, dans le sens où nous ne voulons pas prescrire un type, ou sinon, ce serait artificiel. Par exemple, si vous avez sur un corps deux espaces vectoriels (*écrivant* $k \quad V \quad W \quad V \otimes W$) et que vous voulez considérer leur produit tensoriel, la seule chose qui vous importe est que vous ayez une application de V tenseur W vers le produit tensoriel (*écrivant* $V \times W \to V \otimes W$) avec une propriété universelle. Vous pourriez d'abord construire l'objet en supposant que vous prenez le groupe libre engendré par des paires d'éléments et que vous obtiendriez un certain type sur l'ensemble de base, mais c'est assez artificiel et c'est ce que Bourbaki fait pour définir le produit tensoriel. Cependant, vous vous souciez uniquement de la propriété universelle avec la définition du tenseur $V \otimes W$ à isomorphisme unique près, ce qui est également en dehors du formalisme que Bourbaki utilise.

Et une chose que je me demande, c'est "Et si c'était un ?" est aussi une barrière psychologique à la notion d'espace analytique avec des nilpotents ou de schéma avec des nilpotents parce que si vous voulez considérer juste l'espace analytique réduit complexe X, la structure qui suffit à donner un est une fonction de X vers $\mathbb{C}$ qui est analytique (*écrivant* $f : X \to \mathbb{C}$ *analytique*). La structure est donc un ensemble de fonctions, elle doit satisfaire un certain nombre d'axiomes et cela correspondait au formalisme.

Mais si l'on a un nilpotent, il faut donner des faisceaux avec une propriété, ce qui sort du formalisme utilisé. Mais en pratique, nous savons que nous avons suffisamment d'expérience pour savoir ce que nous pouvons dire et ce que nous ne devons pas dire, de sorte que tout ce que nous faisons dans une situation donnée peut être transposé dans une situation isomorphe, même en l'absence de référence concrète dans la littérature le justifiant dans tous les cas où nous souhaitons le faire. Or, si l'on utilise des catégories plutôt que des ensembles structurés, la situation est moins bonne.

Supposons que vous ayez deux catégories ; si elles sont équivalentes et que vous raisonnez de manière catégorique (*écrivant* $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$), tout ce que vous faites sur $\mathcal{C}$ devrait pouvoir être transporté vers $\mathcal{D}$. Nous savons plus ou moins quand ce que nous disons peut effectivement être transporté, mais nous ne respectons pas toujours ces règles ou nous sommes inconstants. Par exemple, si nous avons un foncteur... Oui... Une règle de base qui n'est pas toujours respectée est qu'il est presque toujours mauvais d'écrire l'égalité (*écrivant* $X = Y$) entre objets ; l'existence d'un isomorphisme ou la définition d'un isomorphisme, c'est bien. Mais l'égalité entre objets est dangereuse. Ainsi, par exemple, si vous avez un foncteur entre catégories (*écrivant verticalement* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$) et que vous voulez définir la fibre de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ sur un objet $D \in \mathcal{D}$, c'est une très mauvaise idée de dire que vous regardez le X tel que $F(X)$ est égal à D (*écrivant à gauche de* $\mathcal{C}$ *l'ensemble* $\{X|F(X) = D\}$) ; du moins c'est une mauvaise idée sauf si ce foncteur a une propriété intéressante comme être une fibration. La notion qui est bonne est de considérer un objet de X avec un isomorphisme de $F(X)$ avec D (*écrivant* $F(X) \mapsto D$) : Cette définition (*montrant la première idée*) n'est pas compatible en remplaçant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par des équivalents, tandis que celle-ci (*montrant* $F(X) \mapsto D$) l'est; au moins, en remplaçant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par des équivalents, on obtient un résultat final équivalent. Il est important que les énoncés formulés soient invariants par équivalence, de la même manière qu'il est important, lorsqu'on parle d'entiers, de ne pas utiliser une définition spécifique, mais une définition qui fonctionne aussi bien pour tous. Car même pour des catégories très standard, il existe de petites variantes de définitions qui donnent des catégories différentes, et il serait difficile de déterminer la définition exacte utilisée.

Nous savons donc plus ou moins ce qu'il faut faire pour les catégories, mais ici, une nouveauté se produit : dans le cas des structures, si l'on applique des règles d'hygiène, on sait que le transport des structures fonctionnera bien. Pour les catégories, il existe des cas où la construction est invariante par ce type d'équivalence, mais où ce n'est pas évident à première vue. Voici quelques exemples. Si vous avez de telles catégories, vous pouvez considérer le nerf $\mathcal{NC}$ de $\mathcal{C}$, le nerf $\mathcal{ND}$ de $\mathcal{D}$, et vous obtiendrez une application d'espaces de l'un à l'autre, ce qui sera une équivalence d'homotopie. Ce n'est pas difficile, mais ce n'est pas évident à première vue. Par exemple, si vous prenez ici un seul objet et un seul automorphisme (*montrant le côté concernant* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{NC}$) et ici quelques objets avec un seul isomorphisme entre deux d'entre eux (*montrant le côté concernant* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{ND}$), vous obtiendrez ici quelque chose comme un point, et ici quelque chose de contractile, mais il faudra peut-être le prouver. Ce n'est pas une preuve difficile, mais contrairement au cas de la structure, ce n'est pas une tautologie. Un autre exemple plus pertinent : supposons que vous ayez une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et que vous souhaitiez définir le groupe de catégories supérieures de $\mathcal{A}$ (*écrivant* $K_\bullet(\mathcal{A})$), ou mieux encore, que vous souhaitiez définir le spectre de la $K_\bullet$-théorie de $\mathcal{A}$. L'intuition de ce que vous souhaitez faire est donc assez claire. Ici dans cette catégorie vous avez des objets (*écrivant* A *sous* $\mathcal{A}$), vous voulez que chaque objet définisse... oui si je pense à cela (*écrivant* $K_\bullet(\mathcal{A})$) comme un groupoïde de catégorie infinie devant lequel je prends $2\pi i$, je veux attacher à chaque objet un objet virtuel (*écrivant* $[A]$ *sous* $K_\bullet(\mathcal{A})$), je veux qu'une courte suite exacte (*écrivant* $A' \to A \to A''$ *sous* A) me donne quelque chose et soit universelle d'une certaine manière.

Pour évoquer une intuition, mais que je ne pense pas avoir formalisée, il existe un certain nombre de définitions qui, je suppose, reposent toujours sur la même intuition : la construction Q de Quillen ou la construction Wegge-Olsen (?) des groupes de la K-théorie. Dans tous les cas, il est vrai que si l'on a une équivalence de catégories abéliennes, on obtient les mêmes K-groupes, mais cela nécessite une démonstration qui n'est pas difficile, mais qui n'est pas totalement évidente. Et je dirais que la situation se complique un peu si l'on passe à des catégories supérieures et que l'on se demande quelle définition on veut donner exactement.

Maintenant, je dois commencer par préciser que je ne comprends que partiellement ce que j'avance, mais mon interprétation des axiomes d'univalence est que l'on souhaite un langage intégrant une notion d'égalité intégrant toutes ces difficultés, et où il est impossible d'énoncer des choses qui contrediraient le transport de structure. Je dois dire que cela me rappelle beaucoup la novlangue de 1984 d'Orwell, où l'idéal était d'avoir un langage où il serait impossible d'exprimer des pensées hérétiques. Ce qui m'inquiète, c'est qu'il existe des exemples comme les définitions de la K-théorie, des groupes, du nerf d'une catégorie, où la pensée n'est pas hérétique, mais pas si évidente. Le langage que nous souhaitons utiliser devrait donc faciliter l'expression de ces choses. Notez que j'aimerais expliquer les choses, mais je m'interroge un moment et j'essaie parfois de me rassurer : les axiomes utilisés sont suffisamment solides pour le but recherché, mais il se peut que je les comprenne mal parfois. Bien sûr, je suis prêt à croire qu'il est possible de reconstruire ou de modéliser Zermelo-Fraenkel dans cette théorie des types, de sorte qu'elle soit suffisamment solide. Cependant, l'important n'est pas de devoir utiliser ce magnifique essai pour comprendre ce que signifie "égal" et de l'abandonner ensuite pour faire ce que l'on veut. J'ai ensuite des questions concrètes dans quelle mesure est-il exprimable et dans quelle mesure on peut prouver des choses qui devraient être évidentes, ou si une action pourrait manquer. Je vais donc donner un exemple de ce que j'ai en tête, et peut-être qu'on me dira que c'est simple. Supposons donc que vous ayez un type et un élément de ce type. Donc, l'image que je voulais représenter (*écrivant* $a : A$) est que ceci (*montrant* A) est un espace topologique représentant un type d'homotopie et ici, j'ai un point de cet espace (montrant a). Alors, dans ce cas, le type $a = a$ correspond à l'espace de boucles de A basé sur ce point (*écrivant* ΩA) et dans celui-ci, vous avez l'identité qui est de ce type (*écrivant* $id_a : a = a$). Donc, vous voyez que vous partez d'un type avec quelque chose de ce type, et vous obtenez à nouveau un type avec quelque chose de ce type, cela devrait correspondre à la construction de l'espace de boucle, clairement vous pouvez itérer ceci. Donc, vous itérez un certain nombre n de fois et vous définissez un $id_a^n : a =_n a$ au niveau n et qui est un objet d'un certain type correspondant à une itération de l'espace de boucle. Supposons maintenant que vous sachiez, par exemple, dans la théorie de Zermelo-Fraenkel que dans $\pi_{n+k}(S^n)$ vous avez un élément (*écrivant* $\alpha \in \pi_{n+k}(S^n)$) et même éventuellement que vous l'avez réalisé comme une application explicite de S^{n+k} vers S^n. Donc la question est "à partir de cela, pouvez-vous dans la théorie des types (récupérer) construire quelque chose de type (*écrivant* $[\alpha] : a =_n a \to a_{n+k}a$) ?", correspondant à l'image que si vous avez un élément de $\pi_{n+k}(S^n)$ (*écrivant* $\alpha \in \pi_{n+k}(S^n)$), cela vous donne une application de l'espace supérieur complet S^{n+k} vers l'espace supérieur complet S^n. Donc la question est "est-ce possible ?" et on aimerait aussi que cela ait une propriété universelle, au moins que si vous avez deux éléments distincts (*écrivant* $\alpha \neq \beta$), il devrait y avoir un cas où l'égalité entre l'application que vous obtenez soit également contradictoire. Pour moi, cela est lié à un rêve que j'ai aussi dans le formalisme de Lurie pour les catégories supérieures, un élément de ce type est intégré au formalisme qui utilise un formalisme d'espaces ou d'espaces simpliciaux, et cela doit donc provenir de la liberté. Mais je me demande encore si l'on pourrait donner, ou si l'on a donné, une définition des catégories supérieures, de sorte qu'une telle déclaration puisse être utilisée pour définir un groupe d'homotopie d'une sphère, et éventuellement être calculée. Dans un cas simple, par exemple, si l'on examine l'arbre des chemins de S^2, cela peut être fait manuellement. Mais en général, je n'en ai aucune idée. Et je m'arrêterai là.