15 mai 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

La description de la réalité physique par la mécanique quantique peut-elle être considérée comme complète ?

A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen
Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey
(Reçu le 15 Mars 1935)

Résumé : Dans une théorie complète, il y a un élément correspondant à chaque élément de la réalité. Une condition suffisante pour qu'une quantité physique soit réelle est la possibilité de la prédire avec certitude, sans perturber le système. En mécanique quantique dans le cas de deux quantités physiques décrites par des opérateurs non-commutatifs, la connaissance de l'un empêche la connaissance de l'autre. Alors soit (1) la description de la réalité donnée par la fonction d'onde en mécanique quantique n'est pas complète soit (2) ces deux quantités ne peuvent pas être réelles simultanément. La considération du problème de faire des prédictions concernant un système sur la base de mesures faites sur un autre système qui avait précédemment interagi avec lui amène au résultat que si (1) est faux alors (2) est également faux. On est alors amené à conclure que la description de la réalité telle qu'elle est donnée par une fonction d'onde n'est pas complète.

1.

Toute considération sérieuse d'une théorie physique doit prendre en compte la distinction entre la réalité objective, qui est indépendante de toute théorie, et les concepts physiques avec lesquels la théorie opère. Ces concepts sont destinés à correspondre avec la réalité objective, et au moyen de ces concepts, nous nous figurons à nous-mêmes la réalité.

Pour essayer de juger du succès d'une théorie physique, on peut se poser deux questions : (1) "La théorie est-elle correcte ?" et (2) "La description donnée par la théorie est-elle complète ?" C'est seulement dans le cas où l'on peut répondre positivement à ces deux questions à la fois, que les concepts de la théorie peuvent être considérés comme satisfaisants. La correction d'une théorie se juge par le degré d'accord qui existe entre les conclusions de cette théorie et l'expérience humaine. Cette expérience, qui seule nous permet de faire des inférences à propos de la réalité, prend en physique la forme de l'expérience et de la mesure. C'est la seconde question que nous souhaitons considérer ici, appliquée à la mécanique quantique.

Quel que soit le sens que l'on donne au mot complet, l'énoncé suivant semble être un énoncé nécessaire pour qu'une théorie soit complète : *tout élément de la réalité physique doit avoir un élément lui correspondant dans la théorie physique.* Nous appellerons cela la condition de complétude. On répond alors facilement à la seconde question, dès qu'on est capable de décider ce que sont les éléments de la réalité physique.

Les éléments de la réalité physique ne peuvent pas être déterminés par des considérations philosophiques *a priori*, mais ils doivent être trouvés en se fiant aux résultats des expériences et aux mesures. Une définition compréhensible de la réalité n'est pourtant pas nécessaire pour parvenir à notre objectif. Nous serons satisfaits par le critère suivant, que nous trouvons raisonnable. *Si, sans perturber un système d'aucune manière, on peut prédire avec certitude (i.e. avec une probabilité égale à un) la valeur d'une quantité physique, alors il existe un élément de la réalité physique correspondant à cette quantité physique.* Il nous semble que ce critère, bien que loin d'épuiser toutes les manières de reconnaître une réalité physique, nous fournit au moins une telle manière de le faire, à chaque fois que les conditions énoncées adviennent. Regardé non comme une condition nécessaire, mais seulement comme une condition suffisante de la réalité, ce critère est en accord avec l'idée classique ainsi qu'avec l'idée de la mécanique quantique de la réalité.

Pour illustrer les idées impliquées, considérons la description par la mécanique quantique du comportement d'une particule qui a un seul degré de liberté. Le concept fondamental de la théorie est le concept d'*état*, qui est supposé être complètement caractérisé par la fonction d'onde ψ, qui est une fonction des variables choisies pour représenter le comportement de la particule. Correspondant à chaque quantité observable A, il y a un opérateur, qui peut être désigné par la même lettre.

Si ψ est une fonction propre de l'opérateur A, c'est-à-dire si

(1) $$\psi' \equiv A\psi = a\psi,$$

où a est un nombre, alors la quantité physique A a de façon certaine la valeur a à chaque fois que la particule est dans l'état donné par ψ. En accord avec notre critère de réalité, pour une particule dans l'état donné par ψ pour lequel l'équation (1) est vérifiée, il y a un élément de réalité physique correspondant à la quantité physique A. Soit, par exemple,

(2) $$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x},$$

où h est la constante de Planck, p_0 est un nombre qui est une certaine constante, et x est la variable indépendante. Puisque l'opérateur correspondant au moment de la particule est

(3) $$p = (h/2\pi i)\partial/\partial x,$$

on obtient

(4) $$\psi' = p\psi = (h/2\pi i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi.$$

Ainsi, dans l'état donné par l'équation (2), le moment a certainement la valeur p_0. Cela a donc du sens de dire que le moment de la particule dans l'état donné par l'équation (2) est réel.

D'un autre côté, si l'équation (1) n'est pas vérifiée, on ne peut plus dire que la quantité physique A a une valeur particulière. C'est le cas, par exemple, avec la coordonnée de la particule. L'opérateur correspondant à ça, disons q, est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante. Ainsi,

(5) $$q\psi = x\psi \neq a\psi.$$

En accord avec la mécanique quantique, on peut seulement dire que la probabilité relative qu'une mesure de la coordonnée donne un certain résultat compris entre a et b est

(6) $$P(a,b) = \int_a^b \overline{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a.$$

Puisque cette probabilité est indépendante de a, mais dépend seulement de la différence $b - a$, on voit que toutes les valeurs de la coordonnée sont équiprobables.

Une valeur définie de la coordonnée, pour une particule dans l'état donné par l'équation (2), est ainsi imprédictible, mais peut être obtenue seulement par une mesure directe. Une telle mesure cependant perturbe la particule et ainsi altère son état. Après que la coordonnée ait été déterminée, la particule ne sera plus dans l'état donné par l'équation (2). La conclusion habituelle à ce propos en mécanique quantique est que *quand on connaît le moment d'une particule, sa coordonnée n'a pas de réalité physique.*

Plus généralement, on montre en mécanique quantique que, si les opérateurs correspondant à deux quantités physiques, disons A et B, ne commutent pas, c'est-à-dire, si $AB \neq BA$, alors la connaissance précise de l'un d'eux empêche une telle connaissance de l'autre. De plus, toute tentative de déterminer le second expérimentalement altèrera l'état du système d'une telle manière que cela détruira la connaissance du premier.

De ceci, il découle soit que (1) *la description par la mécanique quantique de la réalité donnée par la fonction d'onde n'est pas complète* soit que (2) *quand les opérateurs correspondant à deux quantités physiques ne commutent pas, les deux quantités ne peuvent avoir de réalité simultanée.* Car si tous les deux avaient une réalité simultanée - et ainsi des valeurs définies - ces valeurs entreraient dans la description complète, selon la condition de complétude. Si alors la fonction d'onde fournissait une description complète de la réalité, elle contiendrait ces valeurs ; elles seraient donc prédictibles. Cela n'est pas le cas, on reste avec les alternatives énoncées.

En mécanique quantique, on suppose habituellement que la fonction d'onde *contient effectivement* une description complète de la réalité physique du système dans l'état auquel elle correspond. Au premier coup d'œil, cette supposition est pleinement raisonnable, car l'information que l'on peut obtenir de la fonction d'onde semble correspondre exactement à ce qui peut être mesuré sans altérer l'état du système. Nous allons montrer pourtant que cette supposition avec le critère de réalité donné ci-dessus, amène à une contradiction.

2.

Dans ce but, supposons que nous ayons deux systèmes, I et II, auxquels nous permettons d'interagir de l'instant $t = 0$ à $t = T$, durée au terme de laquelle nous supposons qu'il n'y a plus d'interaction entre les deux parties. On suppose de plus que les états des deux systèmes avant $t = 0$ étaient connus. On peut alors calculer à l'aide de l'équation de Schrödinger l'état du système combiné I+II à n'importe quel instant ultérieur ; en particulier, pour tout $t > T$. Désignons la fonction d'onde correspondante par Ψ. On ne peut pas, pourtant, calculer l'état dans lequel soit l'un soit l'autre des deux systèmes est laissé après l'interaction. Cela peut être fait, selon la mécanique quantique, seulement à l'aide de mesures supplémentaires, par un processus connu sous le nom de *réduction du paquet d'onde*. Considérons les principes généraux de ce processus.

Soient $a_1, a_2, a_3, ...$ les valeurs propres d'une certaine quantité physique A appartenant au système I et $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \ldots$ les fonctions propres correspondantes, où x_1 désigne les variables utilisées pour décrire le premier système. Alors Ψ, considérée comme une fonction de x_1, peut être exprimée par

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{7}$$

où x_2 désigne les variables utilisées pour décrire le second système. Ici les $\psi_n(x_2)$ doivent être regardés simplement comme les coefficients de l'expansion de Ψ en une série de fonctions orthogonales $u_n(x_1)$. Supposons maintenant que la quantité A soit mesurée et qu'on trouve qu'elle a la valeur a_k. On conclut alors qu'après la mesure, le premier système est laissé dans l'état donné par la fonction d'onde $u_k(x_1)$, et que le second système est laissé dans l'état donné par la fonction d'onde $\psi_k(x_2)$. Ceci, c'est le processus de réduction du paquet d'onde ; le paquet d'onde donné par la série infinie (7) est réduit à un seul terme $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$.

L'ensemble des fonctions $u_n(x_1)$ est déterminé par le choix de la quantité physique A. Si, à la place de cela, nous avions choisi une autre quantité, disons B, ayant les valeurs propres $b_1, b_2, b_3, \ldots$ et les fonctions propres $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \ldots$ nous aurions obtenu, à la place de l'équation (7), l'expansion

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1), \tag{8}$$

où les φ_s sont les nouveaux coefficients. Si maintenant la quantité B est mesurée, et qu'on trouve qu'elle a la valeur b_r, on conclut qu'après la mesure, le premier système est laissé dans l'état donné par $v_r(x_1)$ et le second système est laissé dans l'état donné par $\varphi_r(x_2)$.

Nous voyons donc que, comme conséquence des deux mesures différentes effectuées sur le premier système, le second système peut être laissé dans certains états avec deux différentes fonctions d'onde. D'un autre côté, puisqu'au moment de la mesure, les deux systèmes n'interagissent plus, aucun changement réel ne peut avoir lieu dans le second système en conséquence de quoi que ce soit qui pourrait être fait dans le premier système. Ceci est, bien sûr, simplement un énoncé de ce que l'on veut signifier par l'absence d'interaction entre les deux systèmes. Donc, *il est possible d'assigner deux fonctions d'onde différentes* (dans notre exemple ψ_k et φ_r) *à la même réalité* (le second système après l'interaction avec le premier).

Maintenant, il peut se produire que les deux fonctions d'onde, ψ_k et φ_r, soient les fonctions propres de deux opérateurs ne commutant pas, correspondant à certaines quantités physiques P et Q, respectivement. Que cela puisse être le cas sera mieux montré par un exemple. Supposons que les deux systèmes sont deux particules, et que

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2xi/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \tag{9}$$

où x_0 est une certaine constante. Soit A le moment de la première particule ; alors, comme on l'a vu dans l'équation (4), ses fonctions propres seront

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1} \tag{10}$$

correspondant à la valeur propre p. Puisqu'on a ici le cas d'un spectre continu, l'équation (7) s'écrira maintenant

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \tag{11}$$

où

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p.} \tag{12}$$

Cette fonction ψ_p pourtant est la fonction propre de l'opérateur

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2, \tag{13}$$

correspondant à la valeur propre $-p$ du moment de la seconde particule. D'un autre côté, si B est la coordonnée de la première particule, elle a pour fonctions propres

(14) $$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x),$$

correspondant à la valeur propre x, où $\delta(x_1 - x)$ est la fonction bien connue delta de Dirac. L'équation (8) devient dans ce cas

(15) $$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx,$$

où

(16) $$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp = h\delta(x - x_2 + x_0).$$

Ceci, pourtant, est la fonction propre de l'opérateur

(17) $$Q = x_2$$

correspondant à la valeur propre $x + x_0$ de la coordonnée de la seconde particule. Puisque

(18) $$PQ - QP = h/2\pi i,$$

on a montré qu'il est en général possible pour ψ_k et φ_r d'être les fonctions propres de deux opérateurs qui ne commutent pas, correspondant aux quantités physiques.

En revenant maintenant au cas général vu dans les équations (7) et (8), on suppose que ψ_k et φ_r sont en effet les fonctions propres de deux opérateurs qui ne commutent pas P et Q, correspondant aux valeurs propres p_k et q_r, respectivement. Donc, en mesurant soit A soit B, nous sommes en mesure de prédire avec certitude, et sans perturber le second système d'aucune manière, soit la valeur de la quantité P (qui est p_k) soit la valeur de la quantité Q (qui est q_r). En accord avec notre critère de réalité, dans le premier cas, nous devons considérer la quantité P comme étant un élément de réalité, dans le second cas, la quantité Q est un élément de réalité. Mais, comme nous l'avons vu, les deux fonctions d'onde ψ_k et φ_r appartiennent à la même réalité.

Précédemment, nous avons démontré que soit (1) la description par la mécanique quantique de la réalité donnée par la fonction d'onde n'est pas complète soit (2) quand les opérateurs correspondant à deux quantités physiques ne commutent pas, les deux quantités ne peuvent pas avoir une réalité simultanée. En commençant alors par la supposition que la fonction d'onde donne une description complète de la réalité physique, nous sommes parvenus à la conclusion que deux quantités physiques, avec des opérateurs non commutatifs, peuvent avoir une réalité simultanée. Donc la négation de (1) amène à la négation de la seule autre alternative (2). Nous sommes donc forcés de conclure que la description par la mécanique quantique de la réalité physique par les fonctions d'onde n'est pas complète.

On pourrait objecter à cette conclusion que notre critère de la réalité n'est pas suffisamment restrictif. En effet, nous n'arriverions pas à notre conclusion si nous insistions sur le fait que deux ou plus quantités physiques peuvent être des éléments simultanés de réalité *seulement lorsqu'on peut simultanément les mesurer ou les prédire.* De ce point de vue, puisque soit l'une soit l'autre, mais non les deux simultanément, des deux quantités P et Q peut être prédite, elles ne sont pas simultanément réelles. Cela fait dépendre la réalité de P et Q du processus de mesure mené sur le premier système, qui ne perturbe le second système d'aucune manière. On devrait s'attendre à ce qu'aucune définition raisonnable de la réalité ne permette cela.

Puisque nous avons ainsi montré que la fonction d'onde ne fournit pas une description complète de la réalité physique, nous laissons ouverte la question de savoir si une telle description existe. Nous croyons, cependant, qu'une telle théorie est possible.