

Traduction d'un article de David Slepian et Estelle Sonnenblick (Denise Vella-Chemla, juin 2023)

Dans le quatrième article de Slepian¹ dédié aux fonctions d'ondes sphéroïdales prolates, on trouve cette phrase de David Slepian, en fin d'article avant l'annexe, de remerciement à l'informaticienne Estelle Sonnenblick qui a procédé aux calculs. Voici la traduction en français de leur article.

I am indebted to Mrs. E. Sonnenblick for programming and carrying out the computations reported here.

Valeurs propres associées aux fonctions d'onde sphéroïdales prolates d'ordre zéro
David Slepian, Estelle Sonnenblick
(Manuscrit reçu le 10 juin 1965)

Résumé. *Sont présentées ici les tables des valeurs de χ_n et λ_n , des quantités définies par les problèmes de valeurs propres*

$$(1 - x^2)\psi_n'' - 2x\psi_n' + (\chi_n - c^2x^2)\psi_n = 0$$

et

$$\lambda_n\psi_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)}\psi_n(y)dy.$$

De plus, quelques approximations de ces quantités sont données et évaluées.

Les fonctions sphéroïdales prolates d'ordre zéro, $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, sont les solutions continues bornées des deux équations l'une différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2\psi_n}{dx^2} - 2x\frac{d\psi_n}{dx} + (\chi_n - c^2x^2)\psi_n = 0$$

et l'autre intégrale

$$\lambda_n\psi_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)}\psi_n(y)dy.$$

L'importance de ces fonctions et des valeurs propres correspondantes χ_n et λ_n pour une grande variété de problèmes, traitant de sujets si divers que les lasers, la théorie de la communication, l'optique, la théorie du bruit, etc., peuvent être trouvées dans les articles [1] et [2] en bibliographie. Notre but ici, en réponse à de nombreuses requêtes, est de présenter quelques valeurs numériques de ces valeurs propres.

¹Voir D. Slepian et H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I*, Bell Syst. Tech. J. 40, no. 1, pp. 43-63 (1961) lien, H.J. Landau et H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II*, Bell Syst. Tech. J. 40, no. 1, pp. 65-84 (1961) lien, H.J. Landau, H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, The Dimension of the Space of Essentially Time-and Band-Limited*, Bell Syst. Tech. J. 41, no. 4, pp. 1295-1336 (1962) lien, D. Slepian, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty IV : Extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal functions*, Bell Syst. Tech. J. 43, no. 6, pp. 3009-3057 (1964) lien et *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty - V : the discrete case*, Bell Syst. Tech. J. vol. 57, no. 5, pp. 1371-1430 (1978) lien.

Les Tables I et II listent les valeurs de χ_n et λ_n pour $n = 0(1)20(5)40$ et $c = 0(1)20(5)40$. Les valeurs données sont, selon nous, précises pour les huit figures listées². Les résultats des calculs sont montrés graphiquement sur les figures Fig. 1-4.

Les valeurs de χ_n ont été obtenues en utilisant la méthode de Bouwkamp comme cela est expliqué par exemple dans le livre de Flammer [1]. Le calcul fournit également les coefficients d'expansion $d_r^{0n}(c)$ dans la notation de Flammer, dont la quantité $R_{0n}^{(1)}(c, 1)$ peut être calculée. Les λ ont été trouvés par la formule

$$\lambda_n = \frac{2c}{\pi} [R_{0n}^{(1)}(c, 1)]^2.$$

Les tables présentées ont nécessité 0.027 heures de calcul sur un IBM 7090.

Les formules suivantes pour λ_n et χ_n sont données dans la référence [2]. Pour de petites valeurs de n et c :

$$(1) \quad \lambda_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2^{2n}(n!)^3}{(2n)!(2n+1)!} \right]^2 c^{2n+1} \cdot \left[1 - \frac{(2n+1)c^2}{(2n-1)^2(2n+3)^2} + O(c^4) \right].$$

Pour n fixé et c grand

$$(2) \quad 1 - \lambda_n = \frac{2^{3n+2} \sqrt{\pi} c^{n+\frac{1}{2}} e^{-2c}}{n!} \left[1 - \frac{6n^2 - 2n + 3}{32c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \right].$$

Certaines valeurs calculées à partir des termes explicitement fournis en (1) et (2) sont représentées par les lignes en pointillés sur les figures Fig. 3 et Fig. 4.

Pour n et c grands tous les deux, on a le résultat suivant. Soit b fixé et posons

$$(3) \quad n = \left[\frac{2}{\pi} (c + b \ln 2\sqrt{c}) \right]$$

où les crochets dénotent la “partie entière de”. Alors

$$(4) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \lambda_n = (1 + e^{\pi b})^{-1}.$$

²La notation $E \pm XY$ après une entrée dans les tables indique que l'entrée doit être multipliée par 10 où XY est un entier en notation décimale, par exemple $E + 03$ dénote un facteur de 10^3 .

TABLE II— λ_n

n	1.	2.	3.	4.	5.	6.
0	5.7258178E - 01	8.8055992E - 01	9.7582863E - 01	9.9588549E - 01	9.9935241E - 01	9.9990188E - 01
1	6.2791274E - 02	3.5564063E - 01	7.0996324E - 01	9.1210742E - 01	9.7986456E - 01	9.9606164E - 01
2	1.2374793E - 03	3.5867688E - 02	2.0513868E - 01	5.1905484E - 01	7.9992193E - 01	9.4017339E - 01
3	9.2009770E - 06	1.1522328E - 03	1.8203800E - 02	1.1021099E - 01	3.4356219E - 01	6.4679195E - 01
4	3.7179286E - 08	1.8881549E - 05	7.0814710E - 04	8.8278764E - 03	5.6015851E - 02	2.0734922E - 01
5	9.4914367E - 11	1.9358522E - 07	1.6551244E - 05	3.8129172E - 04	4.1820948E - 03	2.7387166E - 02
6	1.6715716E - 13	1.3660608E - 09	2.6410165E - 07	1.0950871E - 05	1.9330846E - 04	1.9550007E - 03
7	2.1544491E - 16	7.0488855E - 12	3.0737365E - 09	2.2786389E - 07	6.3591502E - 06	9.4848766E - 05
8	2.1207239E - 19	2.7767898E - 14	2.7281307E - 11	3.6065493E - 09	1.5822998E - 07	3.4367833E - 06
9	1.6466214E - 22	8.6266788E - 17	1.9085689E - 13	4.4938297E - 11	3.0917257E - 09	9.7321160E - 08
10	1.0343492E - 25	2.1690119E - 19	1.0797906E - 15	4.5252285E - 13	4.8757393E - 11	2.2189805E - 09
11	5.3650197E - 29	4.4986573E - 22	5.0431156E - 18	3.7603029E - 15	6.3402794E - 13	4.1662263E - 11
12	2.3367231E - 32	7.8382450E - 25	1.9775436E - 20	2.6228187E - 17	6.9173022E - 15	6.5574786E - 13
13	8.6674831E - 36	1.1630367E - 27	6.6033063E - 23	1.5575942E - 19	6.4235507E - 17	8.7803771E - 15
14	2.7709612E - 39	1.4873466E - 30	1.9002929E - 25	7.9711081E - 22	5.1393068E - 19	1.0125783E - 16
15	0.	1.6563614E - 33	4.7620029E - 28	3.5519080E - 24	3.5797463E - 21	1.0163383E - 18
16	0.	1.6207613E - 36	1.0485031E - 30	1.3905716E - 26	2.1905130E - 23	8.9610464E - 21
17	0.	0.	2.0444867E - 33	4.8210691E - 29	1.1869344E - 25	6.9950907E - 23
18	0.	0.	3.5551880E - 36	1.4905449E - 31	5.7350388E - 28	4.8687451E - 25
19	0.	0.	5.5475853E - 39	4.1352414E - 34	2.4864675E - 30	3.0405184E - 27
20	0.	0.	0.	1.0352225E - 36	9.7273155E - 33	1.7132439E - 29
25	0.	0.	0.	0.	0.	0.
30	0.	0.	0.	0.	0.	0.
35	0.	0.	0.	0.	0.	0.
40	0.	0.	0.	0.	0.	0.

TABLE II—

n	7.	8.	9.	10.	11.	12.
0	9.9998546E - 01	9.9999787E - 01	9.9999969E - 01	9.9999996E - 01	9.9999999E - 01	1.0000000E + 00
1	9.9929217E - 01	9.9987898E - 01	9.9997999E - 01	9.9999677E - 01	9.9999949E - 01	9.9999992E - 01
2	9.8570806E - 01	9.9700462E - 01	9.9941873E - 01	9.9989273E - 01	9.9998091E - 01	9.9999670E - 01
3	8.6456615E - 01	9.6054568E - 01	9.9039622E - 01	9.9790124E - 01	9.9957158E - 01	9.9991663E - 01
4	4.7705272E - 01	7.4790284E - 01	9.1013316E - 01	9.7445778E - 01	9.9371700E - 01	9.9858732E - 01
5	1.1572338E - 01	3.2027663E - 01	5.9909617E - 01	8.2514635E - 01	9.4136927E - 01	9.8366430E - 01
6	1.3055972E - 02	6.0784427E - 02	1.9693935E - 01	4.4015011E - 01	7.0394130E - 01	8.8175663E - 01
7	9.0657300E - 04	6.1262894E - 03	3.0568075E - 02	1.1232482E - 01	2.9607849E - 01	5.5736081E - 01
8	4.5623948E - 05	4.1825206E - 04	2.8466070E - 03	1.4920175E - 02	6.0370339E - 02	1.8342927E - 01
9	1.7774751E - 06	2.1663088E - 05	1.9230822E - 04	1.3145890E - 03	7.1417030E - 03	3.1054179E - 02
10	5.5526131E - 08	8.9304272E - 07	1.0194316E - 05	8.8213430E - 05	6.0469421E - 04	3.3745471E - 03
11	1.4251398E - 09	3.0137350E - 08	4.3973999E - 07	4.7664454E - 06	4.0395675E - 05	2.7741888E - 04
12	3.0622379E - 11	8.4965846E - 10	1.5795600E - 08	2.1339628E - 07	2.2179166E - 06	1.8475085E - 05
13	5.5928434E - 13	2.0334083E - 11	4.8068821E - 10	8.0707164E - 09	1.0243298E - 07	1.0282524E - 06
14	8.7926605E - 15	4.1852675E - 13	1.2564804E - 11	2.6170188E - 10	4.0455355E - 09	4.8758791E - 08
15	1.2026890E - 16	7.4905020E - 15	2.8533973E - 13	7.3634903E - 12	1.3840557E - 10	1.9981456E - 09
16	1.4445726E - 18	1.1767148E - 16	5.6843266E - 15	1.8159383E - 13	4.1453619E - 12	7.1571886E - 11
17	1.5359357E - 20	1.6358709E - 18	1.0016699E - 16	3.9589753E - 15	1.0966649E - 13	2.2619074E - 12
18	1.4559023E - 22	2.0270123E - 20	1.5727550E - 18	7.6870812E - 17	2.5823710E - 15	6.3575320E - 14
19	1.2380854E - 24	2.2529462E - 22	2.2145250E - 20	1.3380681E - 18	5.4488496E - 17	1.6002320E - 15
20	9.4989023E - 27	2.2588880E - 24	2.8123556E - 22	2.1001719E - 20	1.0363386E - 18	3.6290304E - 17
25	6.3410693E - 38	5.7412040E - 35	2.3265268E - 32	4.9987005E - 30	6.4253487E - 28	5.4015219E - 26
30	0.	0.	0.	0.	5.4863023E - 38	1.1037482E - 35
35	0.	0.	0.	0.	0.	0.
40	0.	0.	0.	0.	0.	0.

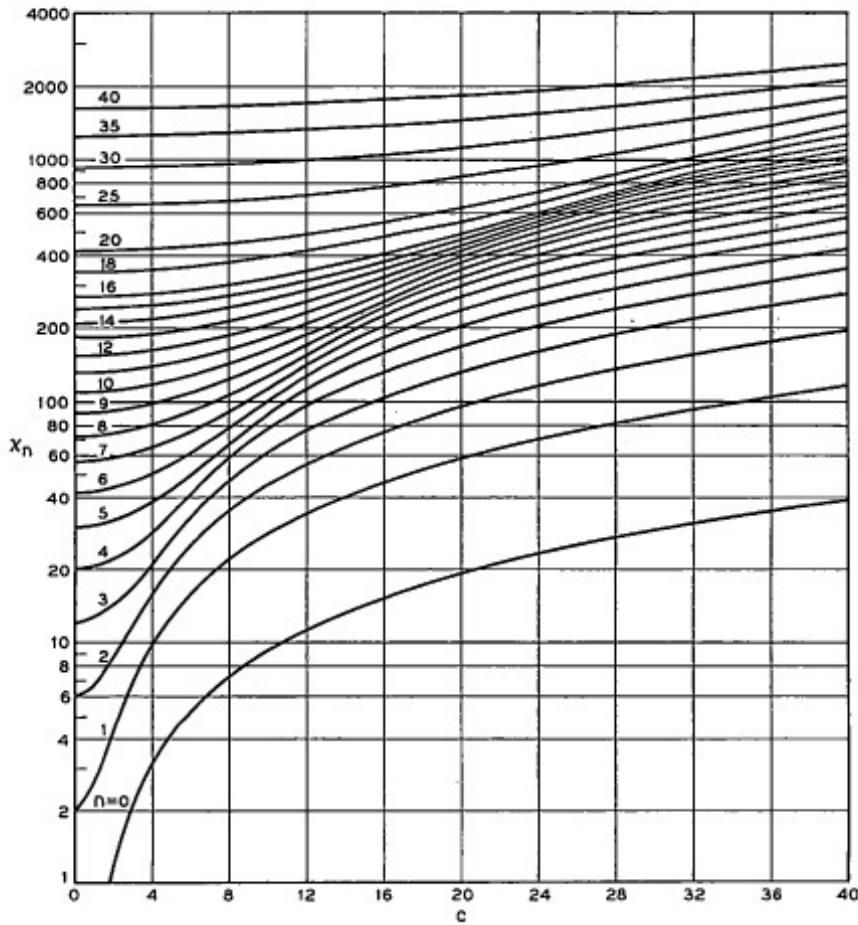


FIG. 1 : valeurs propres, χ_n , de $(1 - x^2)\psi'' - 2x\psi' + (\chi - c^2x^2)\psi = 0$.

Les déductions de (3) et (4) fournies dans [2] suggèrent la formule d'approximation suivante

$$(5) \quad \lambda_n \approx \hat{\lambda}_n = (1 + e^{\pi\hat{b}})^{-1}$$

$$(6) \quad \hat{b} = \frac{n\frac{\pi}{2} - c + \frac{\pi}{4}}{(\gamma/2) + 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln c}$$

pour les portions proches de la verticale des courbes de λ_n montrées sur la figure Fig. 2. Ici $\gamma = 0.5772156649$ est la constante d'Euler-Mascheroni. La précision remarquable de cette approximation est montrée sur la Fig. 5. Ici, pour des valeurs fixées de n et b , on a déterminé les valeurs de c à partir de (6) et pour ces valeurs de n et c , on a visualisé $|(\hat{\lambda}/\lambda) - 1|$ par rapport à n . On voit que pour $0.2 \leq \hat{\lambda}_n \leq 0.9$, (5) et (6) fournissent une excellente approximation même pour de petites valeurs de n .

Les formules correspondantes pour les χ_n sont les suivantes. Pour n fixé et c petit :

$$\chi_n = n(n+1) + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right] c^2 + O(c^4)$$

et pour n fixé et c grand :

$$\chi_n = (2n+1)c - \frac{2n^2 + 2n + 3}{4} - \frac{(2n+1)(n^2 + n + 3)}{16c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Si n et c deviennent grands selon (3) avec b fixé,

$$\chi_n = c^2 + 2bc + \frac{b^2 - 1}{2} - \frac{b^2 - b}{8c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

1756 THE BELL SYSTEM TECHNICAL JOURNAL, OCTOBER 1965

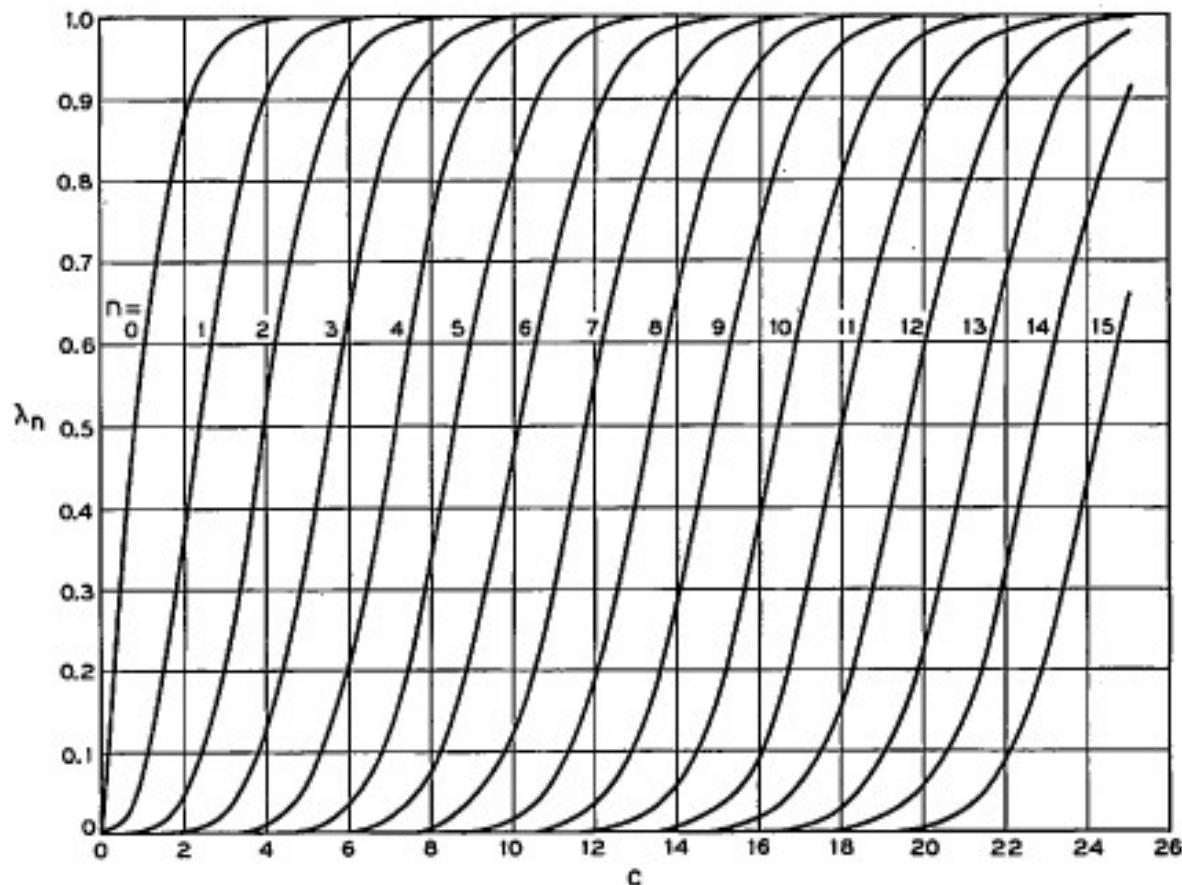


FIG. 2 : valeurs propres, λ_n , de l'équation intégrale. Échelle linéaire.

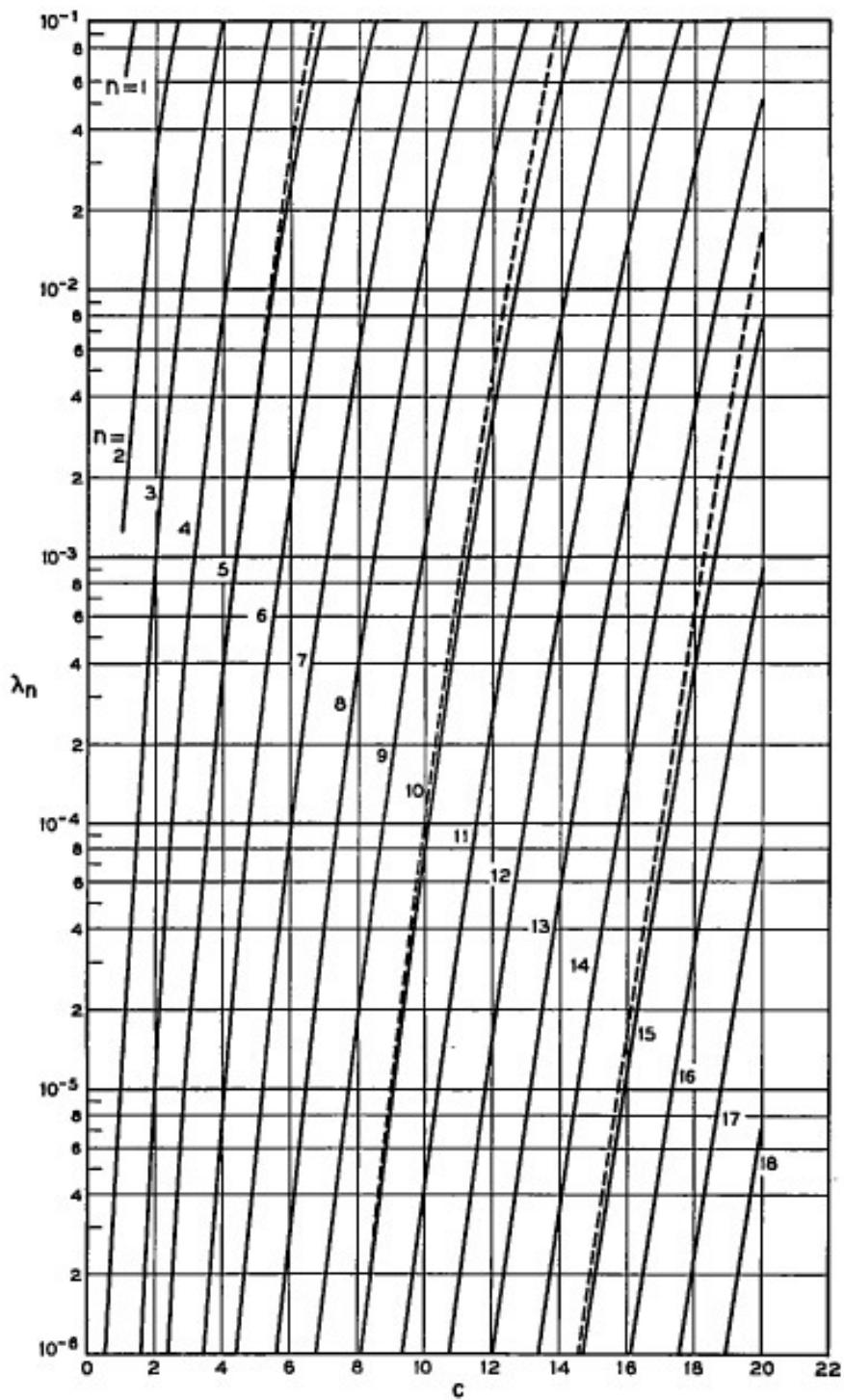


FIG. 3 : valeurs propres, λ_n , de l'équation intégrale pour $c < n\pi/2$.
Les lignes pointillées sont l'approximation (1).

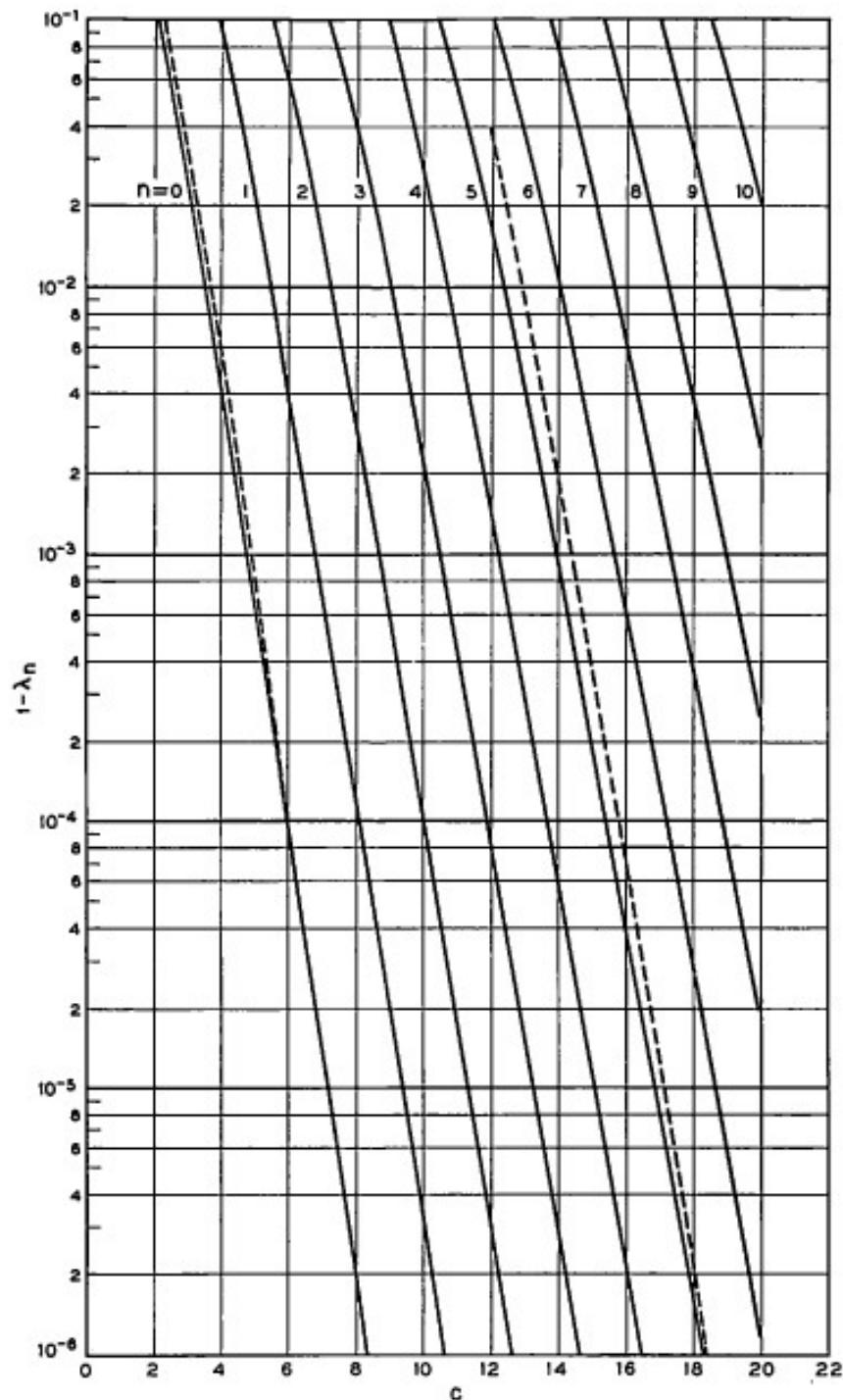


FIG. 4 : valeurs propres, λ_n , de l'équation intégrale pour $c > n\pi/2$.
Les lignes pointillées sont l'approximation (2).

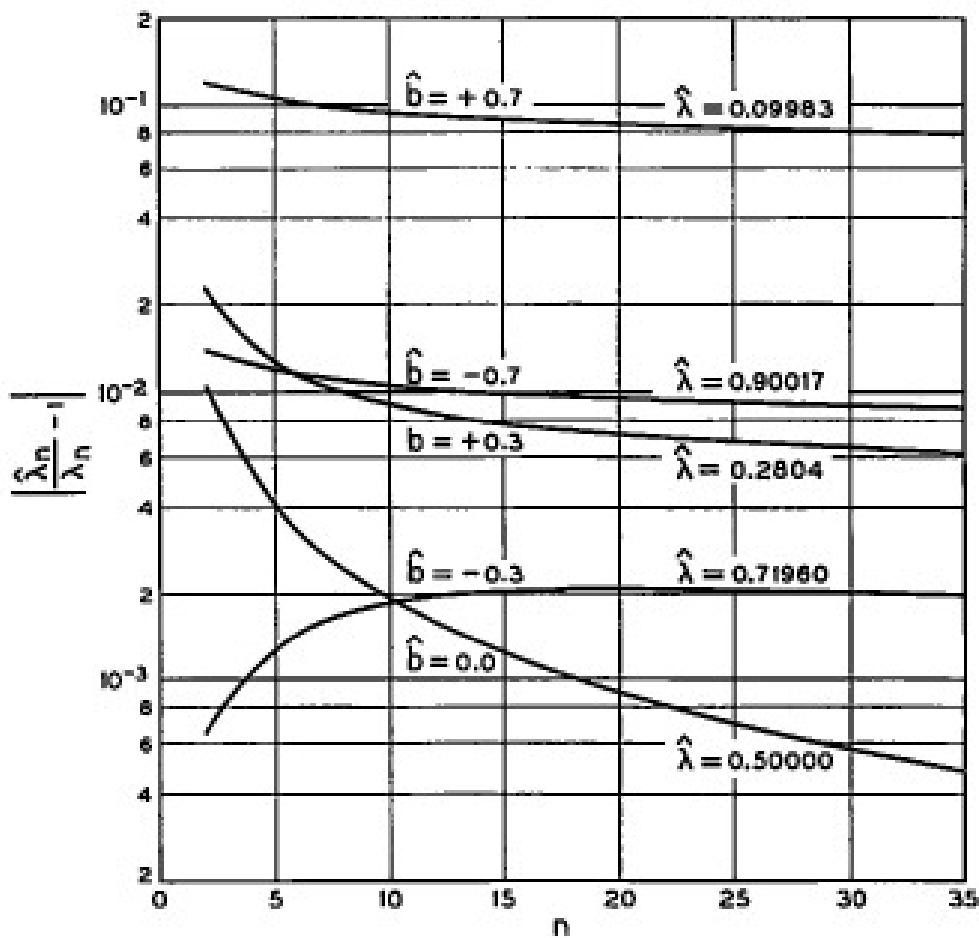


FIG. 5 : précision de l'approximation (5) - (6) pour les valeurs propres λ_n .

Références

- [1] Flammer, C., *Spheroidal Wave Functions*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1957.
- [2] Slepian, D., *Some Asymptotic Expansions for Prolate Spheroidal Wave Functions*, J. Math. and Phys., 44, n° 2, June, 1965, pp. 99-140.

Les λ_n

1.	2.	3.	4.	5.	6.
5.7258178 e - 01	8.8055992 e - 01	9.7582863 e - 01	9.9588549 e - 01	9.9935241 e - 01	9.9990188 e - 01
6.2791274 e - 02	3.5564063 e - 01	7.0996324 e - 01	9.1210742 e - 01	9.7986456 e - 01	9.9606164 e - 01
1.2374793 e - 03	3.5867688 e - 02	2.0513868 e - 01	5.1905484 e - 01	7.9992193 e - 01	9.4017339 e - 01
9.2009770 e - 06	1.1522328 e - 03	1.8203800 e - 02	1.1021099 e - 01	3.4356219 e - 01	6.4679195 e - 01
3.7179286 e - 08	1.8881549 e - 05	7.0814710 e - 04	8.8278764 e - 03	5.6015851 e - 02	2.0734922 e - 01
9.4914367 e - 11	1.9358522 e - 07	1.6551244 e - 05	3.8129172 e - 04	4.1820948 e - 03	2.7387166 e - 02
1.6715716 e - 13	1.3660608 e - 09	2.6410165 e - 07	1.0950871 e - 05	1.9330846 e - 04	1.9550007 e - 03
2.1544491 e - 16	7.0488855 e - 12	3.0737365 e - 09	2.2786389 e - 07	6.3591502 e - 06	9.4848766 e - 05
2.1207239 e - 19	2.7767898 e - 14	2.7281307 e - 11	3.6065493 e - 09	1.5822998 e - 07	3.4367833 e - 06
1.6466214 e - 22	8.6266788 e - 17	1.9085689 e - 13	4.4938297 e - 11	3.0917257 e - 09	9.7321160 e - 08
1.0343492 e - 25	2.1680119 e - 19	1.0797906 e - 15	4.5252285 e - 13	4.8757393 e - 11	2.2189805 e - 09
5.3650197 e - 29	4.4986573 e - 22	5.0431156 e - 18	3.7603029 e - 15	6.3402794 e - 13	4.1662263 e - 11
2.3367231 e - 32	7.8382450 e - 25	1.9775436 e - 20	2.6228187 e - 17	6.9173022 e - 15	6.5574786 e - 13
8.6674831 e - 36	1.1630367 e - 27	6.6033063 e - 23	1.5575942 e - 19	6.4235507 e - 17	8.7803771 e - 15
2.7709612 e - 39	1.4873466 e - 30	1.9002929 e - 25	7.9711081 e - 22	5.1393068 e - 19	1.0125783 e - 16
0.	1.6563614 e - 33	4.7620029 e - 28	3.5519080 e - 24	3.5797463 e - 21	1.0163838 e - 18
0.	1.6207613 e - 36	1.0485031 e - 30	1.3905716 e - 26	2.1905130 e - 23	8.9610464 e - 21
0.	0.	2.0444867 e - 33	4.8210691 e - 29	1.1869344 e - 25	6.9950907 e - 23
0.	0.	3.5551880 e - 36	1.4905449 e - 31	5.7350388 e - 28	4.8687451 e - 25
0.	0.	5.5475853 e - 39	4.1352414 e - 34	2.4864675 e - 30	3.0405184 e - 27
0.	0.	0.	1.0352225 e - 36	9.7273155 e - 33	1.7132439 e - 29
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.

7.	8.	9.	10.	11.	12.
9.9998546 e - 01	9.9999787 e - 01	9.9999969 e - 01	9.9999996 e - 01	9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00
9.9929217 e - 01	9.9987898 e - 01	9.9997999 e - 01	9.9999677 e - 01	9.9999949 e - 01	9.9999992 e - 01
9.8570806 e - 01	9.9700462 e - 01	9.9941873 e - 01	9.9989273 e - 01	9.9998091 e - 01	9.9999670 e - 01
8.6456615 e - 01	9.6054568 e - 01	9.9039622 e - 01	9.9790124 e - 01	9.9957158 e - 01	9.9991663 e - 01
4.7705272 e - 01	7.4790284 e - 01	9.1013316 e - 01	9.7445778 e - 01	9.9371700 e - 01	9.9858732 e - 01
1.1572386 e - 01	3.2027663 e - 01	5.9909617 e - 01	8.2514635 e - 01	9.4136927 e - 01	9.8366430 e - 01
1.3055972 e - 02	6.0784427 e - 02	1.9693935 e - 01	4.4015011 e - 01	7.0394130 e - 01	8.8175663 e - 01
9.0657300 e - 04	6.1262894 e - 03	3.0565075 e - 02	1.1232482 e - 01	2.9607849 e - 01	5.5736081 e - 01
4.5623948 e - 05	4.1825206 e - 04	2.8466070 e - 03	1.4920175 e - 02	6.0370339 e - 02	1.8342927 e - 01
1.7774751 e - 06	2.1663088 e - 05	1.9230822 e - 04	1.3145890 e - 03	7.1417030 e - 03	3.1054179 e - 02
5.5526131 e - 08	8.9304272 e - 07	1.0194316 e - 05	8.8213430 e - 05	6.0469421 e - 04	3.3745471 e - 03
1.4251398 e - 09	3.0137350 e - 08	4.3973999 e - 07	4.7664454 e - 06	4.0395675 e - 05	2.7741888 e - 04
3.0622379 e - 11	8.4965846 e - 10	1.5795600 e - 08	2.1339628 e - 07	2.2179166 e - 06	1.8475085 e - 05
5.5928434 e - 13	2.0334083 e - 11	4.8068821 e - 10	8.0707164 e - 09	1.0243298 e - 07	1.0282524 e - 06
8.7926605 e - 15	4.1852675 e - 13	1.2564804 e - 11	2.6170188 e - 10	4.0455355 e - 09	4.8758791 e - 08
1.2026890 e - 16	7.4905020 e - 15	2.8533973 e - 13	7.3634903 e - 12	1.3840557 e - 10	1.9981456 e - 09
1.4445726 e - 18	1.1767148 e - 16	5.6843266 e - 15	1.8159383 e - 13	4.1453619 e - 12	7.1571886 e - 11
1.5359357 e - 20	1.6358709 e - 18	1.0016699 e - 16	3.9589753 e - 15	1.0966649 e - 13	2.2619074 e - 12
1.4559023 e - 22	2.0270123 e - 20	1.5727550 e - 18	7.6870812 e - 17	2.5823710 e - 15	6.3575326 e - 14
1.2380854 e - 24	2.2529462 e - 22	2.2145250 e - 20	1.3380681 e - 18	5.4488496 e - 17	1.6002320 e - 15
9.4989023 e - 27	2.2588880 e - 24	2.8123556 e - 22	2.1001719 e - 20	1.0363386 e - 18	3.6290304 e - 17
6.3410693 e - 38	5.7412040 e - 35	2.3265268 e - 32	4.9987005 e - 30	6.4253487 e - 28	5.4015219 e - 26
0.	0.	0.	0.	5.4863023 e - 38	1.1037482 e - 35
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.

13.	14.	15.	16.	17.	18.
1.0000000 e + 00					
9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00				
9.9999944 e - 01	9.9999991 e - 01	9.9999998 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9998436 e - 01	9.9999715 e - 01	9.9999949 e - 01	9.9999991 e - 01	9.9999998 e - 01	1.0000000 e + 00
9.9970100 e - 01	9.9993948 e - 01	9.9998818 e - 01	9.9999776 e - 01	9.9999958 e - 01	9.9999992 e - 01
9.9595266 e - 01	9.9907074 e - 01	9.9979787 e - 01	9.9995783 e - 01	9.9999149 e - 01	9.9999833 e - 01
9.6225505 e - 01	9.8963945 e - 01	9.9741834 e - 01	9.9939756 e - 01	9.9986611 e - 01	9.9997138 e - 01
7.8874478 e - 01	9.2170099 e - 01	9.7594492 e - 01	9.9346756 e - 01	9.9836416 e - 01	9.9961326 e - 01
4.0633176 e - 01	6.6365081 e - 01	8.5371077 e - 01	9.4900699 e - 01	9.8478345 e - 01	9.9589845 e - 01
1.0588399 e - 01	2.7254759 e - 01	5.1899118 e - 01	7.5367260 e - 01	9.0120813 e - 01	9.6721066 e - 01
1.5487268 e - 02	5.7772021 e - 02	1.6922485 e - 01	3.7484512 e - 01	6.2548476 e - 01	8.2543081 e - 01
1.5807741 e - 03	7.5604029 e - 03	3.0214721 e - 02	9.8343344 e - 02	2.5013211 e - 01	4.8298471 e - 01
1.2703997 e - 04	7.3609236 e - 04	3.6365712 e - 03	1.5325905 e - 02	5.4203716 e - 02	1.5521339 e - 01
8.4414630 e - 06	5.8099164 e - 05	3.4130591 e - 04	1.7310585 e - 03	7.6061834 e - 03	2.8698205 e - 02
4.7534082 e - 07	3.8540665 e - 06	2.6544166 e - 05	1.5775571 e - 04	8.1779798 e - 04	3.7164510 e - 03
2.3057257 e - 08	2.1923715 e - 07	1.7585578 e - 06	1.2118149 e - 05	7.2740820 e - 05	3.8416435 e - 04
9.7549162 e - 10	1.0846150 e - 08	1.0092888 e - 07	8.0200884 e - 07	5.5289258 e - 06	3.3476998 e - 05
3.6359074 e - 11	4.7180556 e - 10	5.0802489 e - 09	4.6393027 e - 08	3.6561510 e - 07	2.5213492 e - 06
1.2039857 e - 12	1.8208273 e - 11	2.2646216 e - 10	2.3711707 e - 09	2.1297926 e - 08	1.6661751 e - 07
3.5675475 e - 14	6.2816688 e - 13	9.0124935 e - 12	1.0801803 e - 10	1.1034773 e - 09	9.7669046 e - 09
9.5186419 e - 16	1.9498859 e - 14	3.2240722 e - 13	4.4178809 e - 12	5.1252279 e - 11	5.1225654 e - 10
3.1773164 e - 24	1.3781710 e - 22	4.5947254 e - 21	1.2173462 e - 19	2.6337453 e - 18	4.7585812 e - 17
1.4501905 e - 33	1.3251429 e - 31	8.8515118 e - 30	4.4989186 e - 28	1.7978779 e - 26	5.8040997 e - 25
0.	0.	0.	3.1590168 e - 37	2.3233738 e - 35	1.3343537 e - 33
0.	0.	0.	0.	0.	0.

19.	20.	25.	30.	35.	40.
1.0000000 e + 00					
1.0000000 e + 00					
1.0000000 e + 00					
1.0000000 e + 00					
9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00				
9.9999968 e - 01	9.9999994 e - 01	1.0000000 e + 00			
9.9999408 e - 01	9.9999881 e - 01	1.0000000 e + 00			
9.9991254 e - 01	9.9998093 e - 01	9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9896831 e - 01	9.9975345 e - 01	9.9999988 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.9042654 e - 01	9.9743251 e - 01	9.9999821 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.3461880 e - 01	9.7911569 e - 01	9.9997682 e - 01	9.9999999 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
7.1923718 e - 01	8.7971361 e - 01	9.9974565 e - 01	9.9999983 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
3.4534703 e - 01	5.8879338 e - 01	9.9766185 e - 01	9.9999783 e - 01	1.0000000 e + 00	1.0000000 e + 00
9.0528307 e - 02	2.2898871 e - 01	9.8251216 e - 01	9.9997547 e - 01	9.9999998 e - 01	1.0000000 e + 00
1.4751648 e - 02	5.0245996 e - 02	9.0214476 e - 01	9.9975907 e - 01	9.9999980 e - 01	1.0000000 e + 00
1.7952937 e - 03	7.4212338 e - 03	6.5129574 e - 01	9.9796698 e - 01	9.9999766 e - 01	1.0000000 e + 00
1.7967267 e - 04	8.5983868 e - 04	2.9167771 e - 01	9.8564508 e - 01	9.9997604 e - 01	9.9999998 e - 01
1.5383334 e - 05	8.3739541 e - 05	7.5468799 e - 02	9.2101083 e - 01	9.9978298 e - 01	9.9999978 e - 01
1.1493460 e - 06	7.0600702 e - 06	1.3031043 e - 02	7.0692287 e - 01	9.9828070 e - 01	9.9999766 e - 01
7.5908731 e - 08	5.2374892 e - 07	1.7588754 e - 03	3.5647890 e - 01	9.8836235 e - 01	9.9997777 e - 01
4.4748828 e - 09	3.4574493 e - 08	2.0082884 e - 04	1.0627740 e - 01	9.3662832 e - 01	9.9981076 e - 01
7.3154280 e - 16	9.7203030 e - 15	6.7594641 e - 10	4.7379571 e - 06	5.3273087 e - 03	4.8731168 e - 01
1.5483211 e - 23	3.4788064 e - 22	2.4882077 e - 16	1.3177338 e - 11	1.0489720 e - 07	1.7876070 e - 04
6.1447670 e - 32	2.3202540 e - 30	1.6231560 e - 23	5.8407336 e - 18	2.5646331 e - 13	2.2391506 e - 09
0.	0.	2.4836333 e - 31	5.8205690 e - 25	1.3022033 e - 19	2.2391506 e - 09