Sur les sommes de séries d'inverses

Leonhard Euler

§ 1. Tant de travail a été fait sur les séries d'inverses de puissances d'entiers naturels qu'il semble difficilement vraisemblable de pouvoir découvrir quoi que ce soit de nouveau les concernant. Car presque tous ceux qui ont réfléchi au sujet des sommes de séries générales se sont également interrogés sur les sommes de ces sortes de séries en particulier, et ils n'ont pu trouver aucun moyen de les exprimer sous une forme pratique.

Je n'ai moi aussi rien pu faire de plus, malgré mes efforts répétés, si ce n'est d'approximer les valeurs de ces sommes et de les réduire à la quadrature de courbes hautement transcendantes ; le dernier résultat de ces tentatives est décrit dans l'article ci-dessous, et les autres résultats que j'ai mis au jour sont décrits dans les articles précédents.

Je parle ici des séries de fractions dont les numérateurs sont des 1, et dont par exemple les dénominateurs sont des carrés, ou des cubes, ou des puissances d'autres rangs, des entiers naturels ; on a comme exemple de ce type $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., également $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. et de la même manière pour des exposants plus élevés des puissances, dont les termes généraux sont contenus dans la forme $\frac{1}{x^n}$.

§ 2. J'ai trouvé récemment, d'une façon assez inattendue, une expression élégante pour la somme de cette série $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc., qui dépend de la quadrature du cercle, de telle façon que si la somme effective de cette série est obtenue, à partir d'elle découle directement la quadrature du cercle. Notamment, j'ai trouvé que le produit de la somme de cette série par 6 est égale au carré du périmètre d'un cercle dont le diamètre est 1 ; ou, en appelant s la somme de cette série, alors $\sqrt{6s}$ vaudra l'inverse du ratio du diamètre au périmètre [1] .

En effet, j'ai montré récemment que la somme de cette série est approximativement égale à $1,644934066842264364$; multiplions ce nombre par 6 et prenons la racine carrée du produit obtenu, on trouve $3,141592653589793238$ qui est le périmètre d'un cercle de diamètre 1.

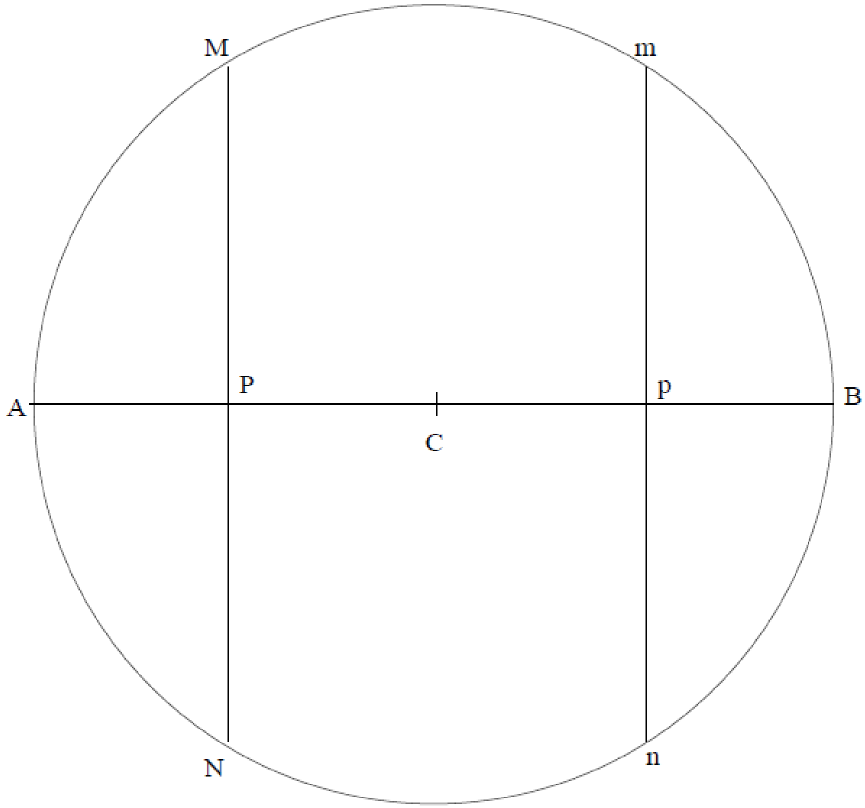
En suivant à nouveau les mêmes étapes par lesquelles je suis arrivé à cette somme, j'ai découvert que la somme de la série $1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+$ etc. dépend également de la quadrature du cercle.

Notamment, la somme de ceci multipliée par 90 donne le bicarré du périmètre d'un cercle dont le diamètre est 1.

Présenté à l'Académie de St. Pétersbourg le 5 décembre 1735. Publié initialement sous le titre *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **7** (1740), 123–134. E41 dans l'index Eneström. Référence en latin http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E041.pdf. Traduit du latin à l'anglais par Jordan Bell, École de mathématiques et statistiques, Université de Carleton, Ottawa, Canada. Email: jbell3@connect.carleton.ca

traduction en français : Denise Vella-Chemla, avril 2024.

[1] Se traduirait aujourd'hui par $s=\frac{\pi^2}{6}$ et $\sqrt{6s}=\pi=\frac{2\pi R}{2R}$.



Et par un raisonnement similaire, j'ai pu déterminer les sommes des séries suivantes dans lesquelles les exposants sont des nombres pairs.

§ 3. Je vais donc détailler minutieusement comment j'ai réalisé cela ; je vais d'abord définir tous les éléments dans l'ordre dans lequel je les ai utilisés.

Dans le cercle $AMBNA$ décrit avec pour centre C, pour rayon AC ou $BC = 1$, j'ai considéré un arc AM, dont le sinus est MP et dont le cosinus est CP. Maintenant, en appelant l'arc $AM = s$, le sinus $PM = y$, et le cosinus $CP = x$, alors par une méthode bien connue, le sinus y, et également le cosinus x, peut être défini par une série à partir de l'arc donné s, comme on peut voir qu'en général $y = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} +$ etc. et aussi $x = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} +$ etc.

C'est en considérant ces équations que j'ai été amené aux sommes ci-dessus des séries d'inverses en question ; et en fait, n'importe laquelle de ces équations peut être indifféremment utilisée pour aboutir au même résultat, il suffit donc de n'étudier que l'une d'entre elles, ce que je vais faire maintenant.

§ 4. La première équation $y = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} +$ etc. exprime ainsi une relation entre l'arc et le sinus. Car à partir d'elle, et à partir d'un arc, son sinus peut être déterminé, et de même inversement pour un sinus donné, on peut déterminer l'arc. Mais maintenant, je vais considérer le sinus y comme donné, et je vais rechercher comment l'arc peut émerger. En effet, on devrait d'abord remarquer que puisque des arcs innombrables correspondent au même sinus y, l'équation donnée devrait être satisfaite par d'innombrables arcs. Certainement, si dans cette équation on voit s comme une inconnue, elle aura un nombre infini de degrés, et il ne serait pas surprenant que cette équation contienne des facteurs simples que l'on ne peut dénombrer qui, quand on les rend égaux à zéro, amène une valeur adéquate pour s.

§ 5. De plus, si tous les facteurs de cette équation étaient connus, alors toutes ses racines, ou valeurs de s, seraient connues, et d'un autre côté, si toutes les valeurs de s se voyaient assigner une valeur alors, également, tous les facteurs de cette équation seraient obtenus. Par conséquent, puisqu'il est plus simple pour moi de déterminer les facteurs que les racines, je transforme l'équation donnée en cette forme : $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y} - \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y} +$ etc. Si maintenant toutes les racines de cette équation, ou tous les arcs de même sinus y, étaient A, B, C, D, E, etc., alors de même les facteurs seraient toutes ces quantités, $1 - \frac{s}{A}, 1 - \frac{s}{B}, 1 - \frac{s}{C}, 1 - \frac{s}{D}$, etc. Et on aurait donc

$$1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y} - \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y} + \text{etc.} = \left(1 - \frac{s}{A}\right)\left(1 - \frac{s}{B}\right)\left(1 - \frac{s}{C}\right)\left(1 - \frac{s}{D}\right) \text{ etc.}$$

§ 6. Mais à partir de la vraie nature de la résolution des équations, il apparaît que le coefficient du terme dans lequel apparaît s, ou $\frac{1}{y}$, est égal à la somme de tous les coefficients de s dans les facteurs, c'est-à-dire, $\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} +$ etc.

Ensuite, le coefficient de s^2, qui est $= 0$ parce que ce terme n'apparaît pas dans l'équation, est égal à la somme des facteurs obtenus à partir de deux termes de la série, $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$, etc. En retour, $-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y}$ sera égal à la somme des facteurs obtenus à partir de trois termes de la série $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$, etc. et de la même façon, on aura que $0 =$ la somme des facteurs obtenus à partir de quatre termes de la série, et $+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y} =$ la somme des facteurs obtenus à partir de cinq termes de la série, et etc.

§ 7. Mais en appelant $AM = A$ le dernier arc dont le sinus est $PM = y$, et le semi-périmètre du cercle $= p$, alors $A, p - A, 2p + A, 3p - A, 4p + A, 5p - A, 6p + A$, etc. et de façon similaire $-p - A, -2p + A, -3p - A, -4p + A, -5p - A$, etc. seront tous les arcs avec le même sinus y. Puisqu'on a supposé précédemment que la série $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$, etc. est transformée en ceci $\frac{1}{A}, \frac{1}{p - A}, \frac{1}{-p - A}$,

$\frac{1}{2p+A}$, $\frac{1}{-2p+A}$, $\frac{1}{3p-A}$, $\frac{1}{-3p-A}$, $\frac{1}{4p+A}$, $\frac{1}{-4p+A}$, etc., la somme de tous ces termes est donc $= \frac{1}{y}$; de plus, la somme des facteurs obtenus à partir de deux termes de la série est égale à 0 ; la somme des facteurs obtenus à partir de trois termes de la série est $= \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y}$; la somme de facteurs obtenus à partir de 4 termes de la série est $= 0$; la somme de facteurs obtenus à partir de 5 termes de la série est $= \frac{+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y}$; la somme de facteurs obtenus à partir de 6 termes de la série est $= 0$. Et etc.

§ 8. D'un autre côté, si une série arbitraire $a+b+c+d+e+f+$ etc. est considérée, dont la somme est α, la somme des facteurs obtenus à partir de deux termes de la série est $= \beta$, la somme des facteurs obtenus à partir de trois termes de la série est $= \gamma$, la somme des facteurs obtenus à partir de quatre termes de la série est $= \delta$, etc., alors la somme des carrés de tous les termes sera $a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc. $= \alpha^2 - 2\beta$; la somme des cubes $a^3+b^3+c^3+d^3+$ etc. $= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$; la somme des bicarrés sera $= \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\delta$. Pour rendre claire la façon dont ces formules fonctionnent, on rend la somme de ces termes a, b, c, d, etc. $= P$, la somme des carrés des termes $= Q$, la somme des cubes des termes $= R$, la somme des bicarrés des termes $= S$, la somme des puissances cinquièmes des termes $= T$, la somme des puissances sixièmes des termes $= V$, etc. Ceci fait, on aura $P = \alpha$; $Q = P\alpha - 2\beta$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\epsilon$; etc.

§ 9. Comme dans notre cas de la série $\frac{1}{A}, \frac{1}{p-A}, \frac{1}{-p-A}, \frac{1}{2p+A}, \frac{1}{-2p+A}, \frac{1}{3p-A}, \frac{1}{-3p-A}$, etc., la somme de tous les termes, ou α, sera $= \frac{1}{y}$; la somme de tous les facteurs à partir de deux ou $\beta = 0$, et ainsi de suite pour des nombres de termes plus grands, $\gamma = \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y}$; $\delta = 0$; $\epsilon = \frac{+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y}$; $\zeta = 0$; etc., par conséquent, la somme de tous les termes dans cette série sera $P = \frac{1}{y}$; la somme de tous les carrés de ces termes $Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2}$; la somme de tous les cubes de ces termes $R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot y}$; la somme de tous les bicarrés $S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y}$. Et alors, en retour $T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot y}$; $V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y} + \frac{P}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y}$; $W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y} + \frac{Q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot y}$. De cette règle, les sommes des puissances plus élevées restantes sont aisément déterminées.

§ 10. On va maintenant rendre le sinus $PM = y$ égal au rayon, de telle façon que $y = 1$. Le plus petit arc A dont le sinus est 1 sera égal à un quart du périmètre, $= \frac{1}{2}p$, ou, en appelant q un quart du périmètre, on aura $A = q$ et $p = 2q$. La série ci-dessus se transforme par conséquent en celle-ci, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q}$, $-\frac{1}{3q}$, $-\frac{1}{3q}$, $+\frac{1}{5q}$, $+\frac{1}{5q}$, $-\frac{1}{7q}$, $-\frac{1}{7q}$, $+\frac{1}{9q}$, $+\frac{1}{9q}$, etc., où les termes surgissent par paires égales. Donc la somme de ces termes, qui est $\frac{2}{q}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}\right)$, est égal à $P=1$ lui-même. Il découle donc de ceci que $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}=\frac{q}{2}=\frac{p}{4}$. Ainsi, 4 fois cette série est égal au semi-périmètre d'un cercle de rayon 1, ou le périmètre total d'un cercle dont le diamètre est 1. Et effectivement, ceci est exactement la série découverte il y a quelques temps par LEIBNIZ, par laquelle il a défini la quadrature du cercle. À partir de cela, si notre méthode ne semblait pas assez fiable à quiconque, une grande confirmation vient à la lumière ici ; il ne devrait donc pas y avoir de doute à propos du reste des éléments qui découleront de cette méthode.

§ 11. On va maintenant prendre les carrés des termes qui émergent dans le cas où $y=1$, et la série $+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{9q^2}+\frac{1}{9q^2}+\frac{1}{25q^2}+\frac{1}{25q^2}+$ etc. apparaîtra, dont la somme est $\frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc.}\right)$, qui sera alors égale à $Q=P=1$. De cela, il découle que la somme de la série $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ etc. est $=\frac{q^2}{2}=\frac{p^2}{8}$, où p dénote le périmètre total d'un cercle dont le diamètre est $=1$. Mais la somme de cette série $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+$ etc. détermine la somme de la série $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., parce que la dernière série moins un quart d'elle-même donne la première, et par conséquent, la somme de la première série plus un tiers d'elle-même est égale à la somme de la dernière série.

Donc, on aura $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc.}=\frac{p^2}{6}$, et en effet, la somme de cette série multipliée par 6 est égale au carré du périmètre d'un cercle dont le diamètre est 1 ; ceci est exactement la proposition que j'ai mentionnée au début.

§ 12. Puisqu'alors dans le cas où $y=1$, on a $P=1$ et $Q=1$, les valeurs des autres lettres seront comme suit : $R=\frac{1}{2}$; $S=\frac{1}{3}$; $T=\frac{5}{24}$; $V=\frac{2}{15}$; $W=\frac{61}{720}$; $X=\frac{17}{335}$; etc. Alors, de plus, puisque la somme des cubes est égale à $R=\frac{1}{2}$, on aura $\frac{2}{q^3}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{etc.}\right)=\frac{1}{2}$. Donc on aura $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{etc.}=\frac{q^3}{4}=\frac{p^3}{32}$. Par conséquent, la somme de cette série multipliée par 32 donne le cube du périmètre du cercle dont le diamètre est 1. De façon similaire, la somme des bicarrés, qui est $\frac{2}{q^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{etc.}\right)$ devrait être égal à $\frac{1}{3}$, et ainsi, on aura $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{etc.}=\frac{q^4}{6}=\frac{p^4}{96}$. Mais en fait, cette série multipliée par $\frac{16}{15}$ est égale à la série $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+$ etc., et donc cette série est égale à $\frac{p^4}{90}$; c'est-à-dire que la somme de la série $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+$ etc. multipliée par 90 donne le bicarré du périmètre d'un cercle dont le diamètre est 1.

§ 13. Les sommes des puissances supérieures peuvent être trouvées d'une façon similaire ; il s'avèrera en fait que $1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{etc.} = \frac{5q^5}{48} = \frac{5p^5}{1536}$; et également $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} = \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960}$. Et en effet, en ayant trouvé la somme de cette série, on peut immédiatement trouver la somme de la série $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.}$, qui sera $= \frac{p^6}{945}$. Ensuite pour les puissances septièmes, on aura $1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{etc.} = \frac{61q^7}{1440} = \frac{61p^7}{184320}$, et pour les huitièmes, $1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = \frac{17q^8}{630} = \frac{17p^8}{161280}$; par conséquent, on déduit que $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{etc.} = \frac{p^8}{9450}$. On devrait observer, pourtant, que dans ces séries de puissances, les signes des termes des exposants impairs alternent, alors que pour les exposants pairs, ils sont en fait égaux ; à cause de cela, la somme de la série générale $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$ peut être trouvée seulement dans les cas où n est un nombre pair.

Malgré cela, on devrait noter que quand le terme général de la série $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{2}{15}, \frac{61}{720}, \frac{17}{315}$, etc. peut être déterminé, dont les valeurs qu'on a trouvées et désignées par les lettres P, Q, R, S, etc., alors avec cela, la quadrature du cercle peut être donnée.

§ 14. Ici, nous avons jusque-là rendu le sinus PM égal au rayon. On peut aussi voir quelle sorte de série est produite si d'autres valeurs sont prises pour y. Ainsi, si $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, le plus petit arc correspondant au sinus est $\frac{1}{4}p$. Par conséquent, en posant $A = \frac{1}{4}p$, la série des termes simples, ou premières puissances, sera $\frac{4}{p} + \frac{4}{3p} - \frac{4}{5p} - \frac{4}{7p} + \frac{4}{9p} + \frac{4}{11p} - \text{etc.}$ La somme P de cette série est égale à $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$. On obtiendra par conséquent que $\frac{p}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$; la règle des signes de cette série diffère de celle de LEIBNIZ, et en fait, elle a été publiée précédemment par NEWTON. En effet, la somme des carrés de ces termes, notamment $\frac{16}{p^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}\right)$, est égale à $Q = 2$. On aura donc $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} = \frac{p^2}{8}$, comme ce qui avait été trouvé plus tôt.

§ 15. Si on prenait $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors le plus petit arc correspondant à ce sinus serait 60°, et alors $A = \frac{1}{3}p$. Dans ce cas, la série suivante de termes apparaîtra, $\frac{3}{p} + \frac{3}{2p} - \frac{3}{4p} - \frac{3}{5p} + \frac{3}{7p} + \frac{3}{8p} -$ etc., et la somme de ces termes est égale à $\frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ lui-même. Par conséquent, on aura $\frac{2p}{3\sqrt{3}} =$

$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+$ etc. En effet, la somme des carrés de ces termes est $=\frac{1}{y^2}=\frac{4}{3}$; d'où il découle que $\frac{4p^2}{27}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ etc., où dans cette série, les troisièmes termes manquent toujours.

Et en fait, cette série dépend de la série $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc., dont la somme avait été trouvée précédemment comme étant égale à $=\frac{p^2}{16}$; pour cette raison, la série moins un neuvième est égale à la série ci-dessus, dont la somme devrait par conséquent être $=\frac{p^2}{6}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4p^2}{27}$. De façon similaire, si d'autres sinus étaient supposés, alors une autre série émergerait, car les termes simples, les carrés des termes et également les puissances plus grandes, qui de même font intervenir la quadrature du cercle.

§ 16. Mais si on posait $y=0$, aucune autre série ne pourrait être assignée de cette manière parce que y a été mis au dénominateur, c'est-à-dire que l'équation originale a été divisée par y.

D'autres séries peuvent effectivement être calculées d'une autre façon, ce sont des séries de la forme $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ etc. avec n un nombre pair : pour les sommes de ces séries qu'on cherche, je peux déjà les déduire séparément dans le cas où $y=0$. Si on pose $y=0$, l'équation fondamentale devient $0=s-\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y}+\frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+$ etc., et les racines de cette équation donnent tous les arcs dont le sinus est $=0$.

Il y a une racine minimale $s=0$, de telle façon que quand l'équation est divisée par s, elle exhibe tous les arcs restants dont le sinus est $=0$, ces arcs sont toutes les racines de l'équation $0=1-\frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{s^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+$ etc.

Bien sûr, ces arcs dont le sinus est $=0$ sont $p,-p,+2p,-2p,3p,-3p$, etc., dont le second de chaque paire est négatif, ce que nous apprend aussi l'équation elle-même, parce que les puissances de s sont des puissances d'exposants pairs.

Par conséquent, les diviseurs de cette équation seront $1-\frac{s}{p},1+\frac{s}{p},1-\frac{s}{2p},1+\frac{s}{2p}$, etc., et en combinant chacune de ces paires de diviseurs ensemble, on aura $1-\frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{s^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\text{etc.}=\left(1-\frac{s^2}{p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{16p^2}\right)$ etc.

§ 17. Maintenant, il est évident du fait de la nature des équations que le coefficient de s, ou $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, est égal à $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{9p^2}+\frac{1}{16p^2}+$ etc. Et en effet, la somme des facteurs de deux termes de cette série sera $= \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$; et la somme des facteurs de trois d'entre eux sera $= \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$, etc. À cause de cela, on aura, comme au § 8, $\alpha = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$; $\beta = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$; $\gamma = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$; etc. En appelant la somme des termes $\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{4p^2} + \dfrac{1}{9p^2} + \dfrac{1}{16p^2} + \text{etc.} = P$, et la somme des carrés de ces termes $= Q$; la somme des cubes $= R$; la somme des bicarrés $= S$; etc., on aura, par le §8, $P = \alpha = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{1}{6}$; $Q = P\alpha - 2\beta = \dfrac{1}{90}$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma = \dfrac{1}{945}$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta = \dfrac{1}{9450}$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\epsilon = \dfrac{1}{93555}$; $V = T\alpha - S\beta + R\gamma - Q\delta + P\epsilon - 6\zeta = \dfrac{691}{6825\cdot 93555}$, etc.

§ 18. De ces observations, on peut dériver les sommes suivantes

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{p^2}{6} = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{p^4}{90} = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{p^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{p^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{691p^{12}}{6825 \times 93555} = V;$$

ces séries sont dérivées de la règle donnée avec, cependant, une grosse quantité de travail pour les exposants plus élevés.

Également, en divisant chacune de ces séries par la précédente, on obtient les équations suivantes : $p^2 = 6P = \dfrac{15Q}{P} = \dfrac{21R}{2Q} = \dfrac{10S}{R} = \dfrac{99T}{10S} = \dfrac{6825V}{691T}$, etc., où chacune de ces expressions est égale au carré du périmère d'un cercle dont le diamètre est 1.

§ 19. Même si les sommes approximatives des séries présentes peuvent être calculées aisément, elles ne nous sont pas d'une grande aide pour exprimer le périmètre approximatif d'un cercle à cause de la nécessité de calculer des racines carrées ; des séries précédentes que l'on avait trouvées, on peut éliminer quelques expressions qui sont égales au périmètre p lui-même. Ce sont celles ci-dessous :

$$p = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}\right)$$

$$p = 2\left(\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 4\left(\frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 3\left(\frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \frac{16}{5}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \frac{25}{8}\left(\frac{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \frac{192}{61}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}\right)$$