Deux ensembles récursivement énumérables de degrés d'insolvabilité incomparables (solution du problème de Post, 1944)

Richard M. Friedberg
Université Harvard

Communiqué le 11 décembre 1956

Post[1] a demandé s'il existe un ensemble récursivement énumérable d'entiers non négatifs qui ne soit ni récursif ni du plus haut degré possible d'insolvabilité pour les ensembles récursivement énumérables. On a maintenant la réponse à cette question par la construction de deux ensembles récursivement énumérables dont on prouve qu'aucun d'eux n'est exprimable récursivement en fonction de l'autre et par conséquent, qu'ils satisfont tous les deux le critère de la question de Post. Dans le théorème, on ne traitera pas directement les ensembles mais plutôt les fonctions caractéristiques qui les représentent (des fonctions qui prennent respectivement les valeurs 0 et 1, pour les éléments et les non-éléments de ces ensembles)[2].

Théorème I. *Il existe deux fonctions f_1 et f_2, qui représentent toutes les deux des ensembles récursivement énumérables et qui ne sont pas définies récursivement l'une en fonction de l'autre.*

On définira f_1 et f_2 par approximation successive par le biais d'une paire de séquences de fonctions $f_1^0, f_1^1, f_1^2, \ldots$ et $f_2^0, f_2^1, f_2^2, \ldots$. Pour chaque paire de nombres a, e, on définira un nombre $x_1^a(e)$ pour lequel on fixera l'ensemble $f_1^{a'}(x_1^a(e)) = 0$ si à une étape ultérieure $a'(\geq a)$ de la construction, on rencontre un y pour lequel

$$(1) \qquad T_1^{f_2^{a'-1}}(e, x_1^a(e), y) \; \& \; U(y) = 1,^3$$

Traduction, Denise Vella-Chemla, janvier 2023 de l'article de référence *Two Recursively Enumerable Sets of Incomparable Degrees of Unsolvability (Solution of Post's Problem, 1944)*, Richard M. Friedberg, Proceedings de l'Académie Nationale des Sciences des États-Unis d'Amérique, Vol. 43, No. 2 (15 Février 1957), pp. 236-238 (3 pages), publié par l'Académie Nationale des Sciences. (réf : https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.43.2.236)

[1]Emil L. Post, "Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and Their Decision Problems", *Bull. Am. Math. Soc.*, **50**, 284-316, 1944.

[2]S. C. Kleene et Emil L. Post ("The Upper Semi-lattice of Degrees of Recursive Unsolvability", *Ann. Math.*, **59**, 379-407, 1954) produisent deux fonctions qui ne sont pas définies récursivement l'une en fonction de l'autre. Le présent article adapte leur méthode avec la restriction que les deux fonctions représentent toutes les deux des ensembles récursivement énumérables. L'essentiel de cette adaptation a été présenté par son titre au meeting de l'American Mathematical Society le 25 février 1956 et a été résumé dans l'article de R. Friedberg, *Bull. Am. Math. Soc.*, **62**, 260, 1956, Abstr. 362.

[3]U est une fonction récursive, et T_1^f est un prédicat qui est récursif si f l'est, tel que $T_1^f(e, x, y)$ signifie que e est le nombre de Gödel d'une procédure formelle pour calculer une fonction, étant donnée une autre ; que y est le nombre de Gödel d'une application formelle de cette procédure avec f comme fonction donnée ; et que cette application renvoie la valeur $U(y)$ pour la fonction calculée sur l'argument x. (Voir S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics* [New York: D. Van Nostrand Co., 1952], pp. 276-278 et 288-291.) Par conséquent f_1 ne peut pas être définie récursivement en fonction de f_2 si pour chaque e, il existe un x tel que

$$f_1(x) \neq 1 \equiv (Ey)[T_1^{f_2}(e, x, y) \; \& \; U(y) = 1].$$

et sinon on laissera $f_1^{a'}(x_1^a(e))$ inchangé lorsque a' augmente. Une fois que la relation (1) est établie, on agira de façon à assurer aussi précisément que possible que cela restera vrai pour toutes les valeurs supérieures de a', et par conséquent également avec f_2 à la place de $f_2^{a'-1}$. De façon similaire, pour $x_2^a(e)$, avec f_1^a et f_2^a échangées.

Les fonctions $f_1^a(x), f_2^a(x), x_1^a(e)$, et $x_2^a(e)$ seront définies récursivement comme des fonctions à deux arguments. On les définit comme suit.

- *Cas 0 :* $a = 0$. Soit
$$\begin{array}{ll} f_1^0(x) = f_2^0(x) = 1, & \text{pour tout } x \ ; \\ x_1^0(e) = x_2^0(e) = 2^e, & \text{pour tout } e. \end{array}$$

- *Cas 1 :* $a = 2b+1$. Soit e_a le nombre de diviseurs premiers de b (de telle façon que pour tout e fixé, on a $e_a = e$ pour un nombre infini de a). Deux sous-cas sont possibles.

  Sous-cas 1.1 : $f_1^{a-1}(x_1^{a-1}(e_a)) = 1$ et $(Ey < a)[T_1^{f_2^{a-1}}(e_a, x_1^{a-1}(e_a), y)$ & $U(y) = 1]$.
  Alors posons
  $$f_1^a(x_1^{a-1}(e_a)) = 0 \ ;$$
  $$x_2^a(e) = 2^e \cdot (2a+1), \text{pour tout } e \geqslant e_a \ ;$$

  et sinon posons
  $$f_1^a = f_1^{a-1}, f_2^a = f_2^{a-1}, x_1^a = x_1^{a-1}, x_2^a = x_2^{a-1}.$$

  Sous-cas 1.2 : Sinon. Alors posons
  $$f_1^a = f_1^{a-1}, f_2^a = f_2^{a-1}, x_1^a = x_1^{a-1}, x_2^a = x_2^{a-1}.$$

- *Cas 2 :* $a = 2b+2$. Traitons ce cas comme le cas 1 en échangeant les indices 1 et 2 et avec "$e \geqslant e_a$" dans la ligne 4 du sous-cas 1.1 remplacé par "$e > e_a$" dans le sous-cas 1.2.

Cela complète la définition des fonctions auxiliaires. Maintenant soit $f_1(x) = 0$ ou 1 selon que $(Ea)(f_1^a(x) = 0)$ ou pas, et similairement pour f_2. Clairement, f_1 et f_2 représentent des ensembles récursivement énumérables.

Notons que la seule information à propos d'une fonction f qui soit pertinente pour l'assertion $T_1^f(e, x, y)$ est l'information à propos de ses valeurs sur les arguments $u < y$ (parce que tous les arguments pertinents interviennent dans une expression formelle avec le nombre de Gödel y). Par conséquent, les changements effectués dans x_2^a dans le sous-cas 1.1 empêche que $T_1^{f_2^{a'}}(e_a, x_1^a(e_a), y)$ ne soit faux, pour tout $a' \geq a$ excepté à travers une occurrence du sous-cas 2.1 avec $e_{a'} < e_a$.

Le succès de la construction dépend de deux lemmes.

Lemme I. *Pour tout e donné, $x_1^a(e)$ change seulement un nombre fini de fois lorsque a grandit parmi les nombres naturels.*

Parce qu'il n'y a qu'un nombre fini de $e < \overline{e}$, le lemme peut échouer pour $e = \overline{e}$ seulement si, pour un certain $\overline{e}' < \overline{e}$ fixé, le sous-cas a lieu un nombre infini de fois avec $e_a = \overline{e}'$. Puisque chaque telle occurrence change $f_2^a(x_2^a(\overline{e}'))$ de 1 à 0, cela en retour nécessite un nombre infini de changements de $x_2^a(\overline{e}')$. Mais cela, par un raisonnement similaire, nécessite un nombre infini de changements de $x_1^a(e)$ pour un certain $e \leqslant \overline{e}' < \overline{e}$ fixé. Par conséquent, $\overline{e}$ n'est pas le plus petit nombre pour lequel le lemme échoue. Donc le lemme est démontré par induction.

Lemme II. *Soit $z_1(e)$ la dernière valeur (inchangée) prise par $x_1^a(e)$ lorsque a grandit.*
Alors $(Ey)[T_1^{f_2}(e, z_1(e), y)$ & $U(y) = 1] \equiv f_1(z_1(e)) = 0$.

Car si $T_1^{f_2}(e, z_1(e), y)$ & $U(y) = 1$ pour un certain y, alors (puisque, pour des valeurs suffisamment élevées de a, $f_2^a(u) = f_2(u)$, pour tous les $u < y$) $f_1^a(z_1(e))$ deviendra finalement nul à travers une occurrence du sous-cas 1.1.

Inversement, si $f_1(z_1(e)) = 0$, le sous-cas 1.1 doit avoir eu lieu pour un certain a pour lequel $x_1^a(e) = z_1(e)$ et $(Ey)[T_1^{f_2^{a-1}}(e, z_1(e), y)$ & $U(y) = 1]$. Aucune occurrence du sous-cas 2.1 avec $e_a < e$ ne peut par conséquent rendre fausse cette dernière assertion, car une telle occurrence induirait un changement dans $x_1^a(e)$, contrairement à la définition de $z_1(e)$. Par conséquent, l'assertion reste vraie avec f_2 à la place de f_2^{a-1}.

Les lemmes I et II sont vérifiés pour tout e et également lorsqu'on échange f_1 et f_2. Par conséquent, ni f_1 ni f_2 ne sont définies récursivement l'une en fonction de l'autre.[4]

Théorème II. *Étant donné un ensemble A, il existe deux ensembles non définis récursivement l'un en fonction de l'autre, à la fois énumérables par une procédure récursive dans A, et aussi tous les deux de degré supérieur à celui de A.*

Preuve : Changez le cas 0 dans le théorème I pour obtenir $f_1^0(2^e) = f_2^0(2^e) = 0$ plutôt que 1 à chaque fois que e appartient à A, et pour faire que $x_1^0(e) = x_2^0(e) = 3.2^e$ pour tout e. Alors f_1 et f_2 représentent les ensembles désirés.

[4] La non-constructivité du lemme I, qui démontre que z_1 est défini pour tous les arguments sans nous dire comment le calculer est une caractéristique nécessaire de la construction. Car si z_1 était récursive, f_1 représenterait un ensemble créatif et serait par conséquent, par un théorème de J. R. Myhill ("Creative Sets", *Z. math. Logik u. Grundlagen Math.*, 1, 97-108, 1955), du degré le plus élevé possible pour les ensembles récursivement énumérables.

Un exposé complet de ce théorème apparaîtra dans deux textes à venir prochainement : H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability* (mimeo), MIT Math. Dept., Cambridge, 1957 ; et J. C. E. Dekker et J. R. Myhill, *Recursion Theory.*