Traduction du troisième chapitre du livre de Robert M. Gray, *Toeplitz and circulant matrices : a review*[1], Denise Vella-Chemla, juin 2023.

3. Matrices circulantes

Les propriétés des matrices circulantes sont bien connues et facilement démontrées ([15], p. 267,[6]). Puisque ces matrices sont utilisées à la fois pour approximer et pour expliquer le comportement des matrices de Toeplitz, il est instructif de présenter une version des démonstrations pertinentes ici.

3.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Une matrice circulante C est une matrice de la forme

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & c_{n-1} & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \cdots & \cdots & c_{n-1} & c_0 & \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

où chaque ligne est un décalage cyclique de la ligne au-dessus d'elle. La structure peut aussi être caractérisée en remarquant que l'entrée (k, j) de $C, C_{k,j}$, est donnée par

$$C_{k,j} = C_{(j-k) \bmod n},$$

qui permet de voir C comme un type particulier de matrices de Toeplitz.

Les valeurs propres ψ_k et les vecteurs propres $y^{(k)}$ de C sont les solutions de

$$Cy = \psi y \tag{3.2}$$

ou, de façon équivalente, des n équations aux différences

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_{n-m+k} y_k + \sum_{k=m}^{n-1} c_{k-m} y_k = \psi y_m \ ; \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.3}$$

En changeant la sommation au niveau des variables muettes, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1-m} c_k y_{k+m} + \sum_{k=n-m}^{n-1} c_k y_{k-(n-m)} = \psi y_m \ ; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.4}$$

On peut résoudre les équations aux différences comme on résout les équations différentielles - en devinant (avec espoir) une solution intuitive et en prouvant ensuite que c'en est bien une. Puisque l'équation est linéaire avec coefficients constants, une supposition raisonnable est $y_k = \rho^k$ (analogue aux équations différentielles $y(t) = e^{s\tau}$ invariantes en temps linéaire). La substitution dans (3.4) et l'élimination de ρ^m amène

[1]Référence : https://ee.stanford.edu/ gray/toeplitz.pdf

$$\sum_{k=0}^{n-1-m} c_k\rho^k + \rho^{-n}\sum_{k=n-m}^{n-1} c_k\rho^k = \psi.$$

Ainsi, si on choisit $\rho^{-n} = 1$, i.e., ρ est une des n racines complexes $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, alors on a une valeur propre

$$\psi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\rho^k \tag{3.5}$$

avec le vecteur propre correspondant

$$y = n^{-1/2}(1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1})', \tag{3.6}$$

où le symbole prime (') dénote la transposition où la normalisation est choisie pour donner l'énergie unité au vecteur propre. En choisissant ρ_m comme $n^{\text{ième}}$ racine de l'unité, $\rho_m = e^{-2\pi im/n}$, on a la valeur propre

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-2\pi imk/n} \tag{3.7}$$

et le vecteur propre

$$y^{(m)} = n^{-1/2}\left(1, e^{-2\pi im/n}, \ldots, e^{-2\pi i(n-1)/n}\right).$$

À partir de (3.7), on peut écrire

$$C = U\Psi U^*, \tag{3.8}$$

où

$$\begin{aligned} U &= \{y^{(0)}|y^{(1)}|\ldots|y^{(n-1)}\} \\ &= n^{-1/2}\{e^{-2\pi imk/n}\ ; m, k = 0, 1, \ldots, n-1\} \\ \Psi &= \{\psi_k\delta_{k-j}\} \end{aligned}$$

et où δ est le delta de Kronecker,

$$\delta_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour vérifier (3.8), appelons $a_{k,j}$ le $(k, j)^{\text{ième}}$ élément de $U\Psi U^*$ et observons que $a_{k,j}$ sera le produit de la $k^{\text{ième}}$ ligne de $U\Psi$, qui est $\{n^{-1/2}e^{-2\pi imk/n}\Psi_k\ ; m = 0, 2, ..., n-1\}$, fois la $j^{\text{ième}}$ ligne de U, $\{n^{-1/2}, e^{2\pi imj/n}\ ; m = 0, 2, ..., n-1\}$ de telle façon que

$$\begin{aligned} a_{k,j} &= n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi im(j-k)/n}\psi_m \\ &= n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi im(j-k)/n}\sum_{r=0}^{n-1} c_r e^{-2\pi imr/n} \qquad (3.9) \\ &= n^{-1}\sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi im(j-k-r)/n}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi i m(j-k-r)/n} = \begin{cases} n & \text{si } k-j=-r \bmod n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de telle façon que $a_{k,j} = c_{-(k-j) \bmod n}$. Par conséquent, (3.8) et (3.1) sont équivalents. De plus, (3.9) montre que n'importe quelle matrice exprimable sous la forme (3.8) est une matrice circulante.

Il devrait aussi être familier à ceux qui ont une formation d'ingénierie standard que ψ_m dans (3.7) est simplement la transformée de Fourier discrète (DFT) de la séquence c_k et (3.8) peut être interprétée comme une combinaison de la formule d'inversion de Fourier et de la formule de décalage cyclique de Fourier.

Puisque C est unitairement similaire à une matrice diagonale, ceci est normal. Notons que toutes les matrices circulantes ont le même ensemble de vecteurs propres.

3.2 Propriétés

Le théorème suivant résume les propriétés dérivées dans la section précédente qui concernent les valeurs propres et les vecteurs propres de matrices circulantes et fournit quelques implications faciles.

Théorème 3.1. Soit $C = \{c_{k-j}\}$ et $B = \{b_{k-j}\}$ des matrices circulantes ayant pour valeurs propres

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-2\pi i m k/n}$$

$$\beta_m = \sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{-2\pi i m k/n} \ ,$$

respectivement.

(1) C et B commutent et

$$CB = BC = U^*\gamma U \ ,$$

où $\gamma = \{\psi_m \beta_m \delta_{k,m}\}$, et CB est aussi une matrice circulante.

(2) $C + B$ est une matrice circulante et

$$C + B = U^*\Omega U$$

où $\Omega = \{(\psi_m + \beta_m)\delta_{k,m}\}$

(3) Si $\psi_m \neq 0$; $m = 0, 1, ..., n-1$, alors C est non singulière et

$$C^{-1} = U^*\Psi^{-1}U$$

de telle façon que l'inverse de C peut être construite d'une manière évidente.

Preuve. On a $C = U^*\Psi U$ et $B = U^*\Phi U$ où Ψ et Φ sont des matrices diagonales avec pour éléments $\psi_m \delta_{k,m}$ et $\beta_m \phi_{k,m}$, respectivement.

(1)
$$\begin{aligned} CB &= U^*\Psi U U^*\Phi U \\ &= U^*\Psi\Phi U \\ &= U^*\Phi\Psi U = BC \end{aligned}$$

Puisque $\Psi\Phi$ est diagonale, (3.9) implique que CB est une matrice circulante.

(2) $C + B = U^*(\Psi + \Phi)U.$

(3)
$$\begin{aligned} C^{-1} &= (U^*\Psi U)^{-1} \\ &= U^*\Psi^{-1}U \end{aligned}$$

si Ψ est non singulière.

Les matrices circulantes sont une classe de matrices particulièrement gérables puisque les inverses, les produits, et les sommes sont aussi des matrices circulantes et par conséquent sont évidentes à construire et normales. De plus, les valeurs propres de telles matrices peuvent facilement être trouvées exactement.

Dans le prochain chapitre, on verra que certaines matrices circulantes approximent asymptotiquement les matrices de Toeplitz et par conséquent, des résultats similaires à ceux du théorème 3.1 seront asymptotiquement vérifiés par les matrices de Toeplitz.

Références

[6] P. J. Davis, *Circulant Matrices*, Wiley-Interscience, NY, 1979.

[15] P. Lancaster, *Theory of Matrices*, Academic Press, NY, 1969.