Résultats d'indépendance accessible pour l'arithmétique de Peano

Laurie Kirby, Jeff Paris

Récemment, quelques énoncés intéressants du premier ordre indépendants de l'arithmétique de Peano (P) ont été découverts. Nous présentons ici peut-être le premier résultat qui, de manière informelle, appartient purement à la théorie des nombres (par opposition à la métamathématique ou à la combinatoire). Les méthodes utilisées pour le prouver sont cependant combinatoires. Nous donnons également un autre résultat d'indépendance (de nature résolument combinatoire) démontré par les mêmes méthodes.

Le premier résultat est une amélioration d'un théorème de Goodstein [2]. Soient m et n des entiers naturels, $n > 1$. On définit la *représentation en base* n *de* m comme suit :

Écrivons d'abord m comme somme des puissances de n. Par exemple, si $m = 266, n = 2$, écrivons $266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$. Écrivons ensuite chaque exposant comme la somme des puissances de n. (Par exemple, $266 = 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2^1$). Répétons l'opération avec les exposants des exposants, et ainsi de suite jusqu'à ce que la représentation se stabilise. Par exemple, 266 se stabilise sur la représentation $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$.

Définissons maintenant le nombre $G_n(m)$ comme suit. Si $m = 0$, posons $G_n(m) = 0$. Sinon, définissons $G_n(m)$ comme le nombre obtenu en remplaçant chaque n de la représentation en base n de m par $n+1$, puis En soustrayant 1. (Par exemple, $G_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$).

Définissons maintenant la suite de Goodstein pour m en commençant par 2.

$$m_0 = m, \quad m_1 = G_2(m_0), \quad m_2 = G_3(m_1), \quad m_3 = G_4(m_2), \ldots.$$

Donc, par exemple,

$$\begin{aligned} 266_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2 \\ 266_1 &= 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \sim 10^{38} \\ 266_2 &= 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \sim 10^{616} \\ 266_3 &= 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \sim 10^{10\,000} \end{aligned}$$

De même, nous pouvons définir la suite de Goodstein pour m commençant par n pour tout $n > 1$.

Théorème 1. (i) (Goodstein [2]) $\forall m\ \exists k,\ m_k = 0$. *Plus généralement, pour tout* $m, n > 1$, *la suite de Goodstein pour* m *commençant par* n *finit par atteindre zéro.*

(ii) $\forall m \exists k, m_k = 0$ *(formalisé en arithmétique du premier ordre) n'est pas prouvable dans P.*

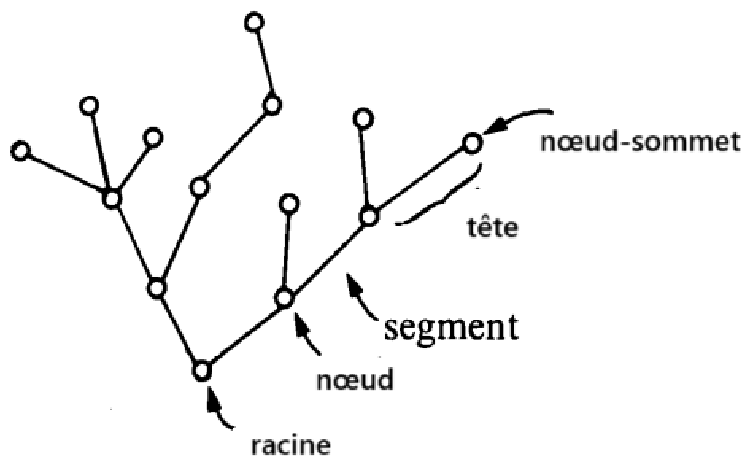
Ainsi, contrairement à sa forme primitive, la suite m_k finit par atteindre zéro. Cependant, bien que ce fait soit exprimable en arithmétique du premier ordre, nous ne pouvons en donner de preuve

Référence : Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 285-293.
Reçu le 1er février 1982.
Le premier auteur cité a bénéficié d'une bourse de recherche du SRC.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, assistée de Google Traduction, juillet 2025.

dans l'arithmétique de Peano P. Comme nous le verrons plus loin, cela s'explique par le temps considérable nécessaire pour que la suite m_k atteigne zéro. (Par exemple, la suite 4_k atteint zéro pour la première fois lorsque $k = 3 \times 2^{402\,653\,211} - 3$, soit un nombre de l'ordre de $10^{121\,210\,700}$).

Avant de démontrer le théorème 1, nous énonçons notre deuxième résultat.

Une hydre est un arbre fini, qui peut être considéré comme une collection finie de segments de droite, chacun joignant deux nœuds, tels que chaque nœud soit relié par un chemin unique de segments à un nœud fixe appelé racine. Par exemple :

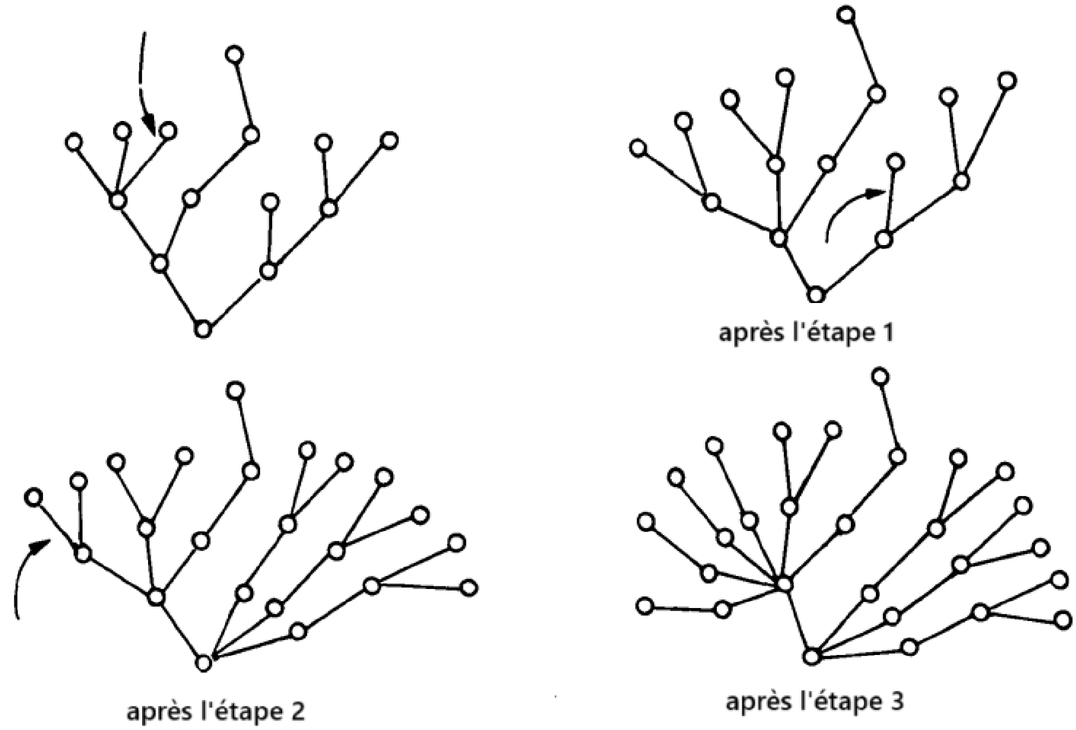


Un nœud sommet d'une hydre est un nœud d'un seul segment, et non la racine. Une tête de l'hydre est un nœud sommet avec son segment attaché.

Un combat entre Hercule et une hydre donnée se déroule comme suit : à l'étape n ($n \geq 1$), Hercule coupe une tête de l'hydre. L'hydre fait alors pousser n "nouvelles têtes" de la manière suivante :

À partir du nœud attaché à la tête qui vient d'être coupée, traversons un segment vers la racine jusqu'au nœud suivant. De ce nœud naissent n répliques de la partie de l'hydre (après étêtage) située "au-dessus" du segment qui vient d'être traversé, c'est-à-dire les nœuds et segments à partir desquels, pour atteindre la racine, ce segment devrait être traversé. Si la tête qui vient d'être coupée avait la racine comme nœud, aucune nouvelle tête ne repousse.

Ainsi, la bataille pourrait par exemple commencer ainsi, en supposant qu'à chaque étape, Hercule décide de couper la tête marquée d'une flèche :



Hercule gagne si, après un nombre fini d'étapes, il ne reste de l'hydre que sa racine. Une stratégie est une fonction qui détermine pour Hercule quelle tête couper à chaque étape d'un combat. Il n'est pas difficile de trouver une stratégie gagnante relativement rapide (c'est-à-dire une stratégie garantissant la victoire d'Hercule contre n'importe quelle hydre). Plus surprenant encore, Hercule ne peut s'empêcher de gagner :

Théorème 2. (i) *Toute stratégie est une stratégie gagnante.*

Nous pouvons coder les hydres comme des nombres et ainsi parler de batailles dans le langage de l'arithmétique du premier ordre. Nous ne pouvons pas formaliser le théorème 2 (i) comme un énoncé de ce langage, car les stratégies sont des objets infinis. Cependant, nous le pouvons si nous nous limitons aux stratégies récursives. Dans ce cas :

Théorème 2. (ii) *L'énoncé "toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" n'est pas prouvable à partir de P.*

Pour démontrer les théorèmes, nous nous appuyons sur les travaux de Ketonen et Solovay [3] sur les ordinaux inférieurs à ε_0, qui développent à leur tour les travaux antérieurs des auteurs actuels, Harrington, Wainer et d'autres. Gentzen [1] a montré qu'en utilisant l'induction transfinie sur les ordinaux inférieurs à ε_0, on peut prouver la cohérence de P, et la machinerie de Ketonen-Solovay que nous utilisons ici peut être considérée comme éclairant plus en détail la relation entre ε_0 et P.

(*Note* : Goodstein a démontré ce qui suit : si $h : N \to N$ est une fonction non décroissante, on définit une suite h-Goodstein $b_0, b_1, \ldots$, en posant b_{i+1} comme le résultat du remplacement de chaque $h(i)$ de la représentation en base $h(i)$ de b_i par $h(i+1)$ et en soustrayant 1. L'affirmation "pour tout h non décroissant, toute suite h-Goodstein finit par atteindre 0" équivaut alors à une induction transfinie inférieure à ε_0.)

Pour démontrer le théorème 1, on définit d'abord la représentation en base n de manière plus formelle, puis on définit l'ordinal $o_n(m)$, sous forme normale de Cantor, qui résulte du remplacement de chaque n de la représentation en base n de m par ω.

Supposons que $m, n \in N$ (l'ensemble des entiers naturels), $n > 1$ et

$$m = n^k a_k + n^{k-1} a_{k-1} + \ldots + n a_1 + a_0.$$

Pour $x \in N$ ou $x = \omega$, définir

$$f^{m,n}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^{f^{i,m}(x)}$$

(Cette définition se fait par récurrence sur m, en commençant par $f^{0,n}(x) = 0$.) Alors, pour $m > 0, G_n(m) = f^{m,n}(n+1) - 1$ et $o_n(m) = f^{m,n}(\omega)$. Posons $G_n(0) = o_n(0) = 0$. Enfin, pour $n \in N$, on définit une opération $\langle \alpha \rangle (n)$ sur les ordinaux $\alpha < \varepsilon_0$ par récurrence sur α :

$$\langle 0 \rangle (n) = 0, \qquad \langle \underline{t}a + 1 \rangle (n) = \underline{t}a$$

et pour $\delta > 0$,

$$\langle \omega^\delta (\beta + 1) \rangle (n) = \omega^\delta \beta + \omega^{\langle \delta \rangle (n)} n + \langle \omega^{\langle \delta \rangle (n)} \rangle (n).$$

Lemme 3. (i) *Pour $m \geq 0, n > 1$, si $\alpha = o_{n+1}(m)$ alors $o_{n+1}(m-1) = \langle \alpha \rangle (n)$.*

(ii) *Pour $n > 1, \langle o_n(m) \rangle (n) = o_{n+1}(G_n(m))$.*

Preuve. (i) Considérons la représentation de base $n+1$ de m : soit

$$m = a_p (n+1)^{f^{p,n+1}(n+1)} + a_{p-1}(n+1)^{f^{p-1,n+1}(n+1)} + \ldots + a_0 (n+1)^{f^{0,n+1}(n+1)},$$

avec $0 \leq a_i \leq n$ et (puisque l'on peut supposer $m \neq 0$) soit j minimal tel que $a_j \neq 0$. Le résultat est clair si $j = 0$, on peut donc supposer que $j > 0$ et que le résultat est vrai pour tout $0 < m' < m$. Alors

$$\begin{aligned} o_{n+1}(m-1) = & \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n+1}(\omega)} a_i \right) + \omega^{f^{j,n}+1(\omega)} (a_j - 1) \\ & + o_{n+1}(n.(n+1)^{f^{j,n+1}(n+1)-1}) + o_{n+1}((n+1)^{f^{j,n+1}(n+1)-1} - 1), \end{aligned}$$

alors que

$$\langle \alpha \rangle (n) = \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n+1}(\omega)} a_i \right) + \omega^{f^{j,n+1}(\omega)} (a_j - 1) + \omega^{\langle f^{j,n+1}(\omega) \rangle (n)} n + \langle \omega^{\langle f^{j,n+1}(\omega) \rangle (n)} \rangle (n).$$

En utilisant l'hypothèse inductive, il est facile de voir que ces deux termes sont égaux.

(ii) Soit $m = \sum_{i=j}^{p} b_i n^{f^{i,n}(n)}$ où $0 \le b_i < n$ et $b_j \neq 0$. Si $j = 0$ alors il est clair que $\langle o_n(m)\rangle(n) = o_{n+1}(G_n(m))$ donc supposons que $j > 0$. Alors

$$\langle o_n(m)\rangle(n) = \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n}(\omega)} b_i\right) + \omega^{f^{j,n}(\omega)}(b_j - 1) + \omega^{\langle f^{j,n}(\omega)\rangle(n)} n + \langle \omega^{\langle f^{j,n}(\omega)\rangle(n)}\rangle(n)$$

et

$$\begin{aligned}
\langle o_{n+1}(G_n(m)) &= \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n}(\omega)} b_i\right) + o_{n+1}((n+1)^{f^{j,n}(n+1)} b_j - 1) \\
&= \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n}(\omega)} b_i\right) + \omega^{f^{j,n}(\omega)}(b_j - 1) + o_{n+1}((n+1)^{f^{j,n}(n+1)-1} n) \\
&\qquad + o_{n+1}((n+1)^{f^{j.n}(n+1)-1} - 1).
\end{aligned}$$

Par (i)

$$o_{n+1}((n+1)^{f^{j,n}(n+1)-1} n) = \omega^{\langle f^{j,n}(\omega)\rangle(n)} n$$

et

$$o_{n+1} = ((n+1)^{f^{j,n}(n+1)-1} - 1) = \langle \omega^{\langle f^{j,n}(\omega)\rangle(n)} n,$$

qui donne le résultat recherché.

Ainsi, pour chaque suite de Goodstein $b_0, b_1, b_2, \ldots$, il existe une suite correspondante

$$o_n(b_0), o_{n+1}(b_1), o_{n+2}(b_2), \ldots$$

d'ordinaux. Par exemple, dans l'exemple précédent, nous aurions

$$\omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega, \quad \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 2, \quad \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 1, \quad \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1}, \ldots$$

Si nous écrivons $\langle\alpha\rangle(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ pour $\langle \ldots \langle\langle\alpha\rangle(n_1)\rangle(n_2) \ldots\rangle(n_k)$, nous pouvons écrire cette suite ainsi

$$o_n(b_0) = \alpha, \quad \langle\alpha\rangle(n), \quad \langle\alpha\rangle(n, n+1), \quad \langle\alpha\rangle(n, n+1, n+2), \ldots.$$

Il n'est pas difficile de voir que pour tout $\alpha < \varepsilon_0$ et $n \in N$,

$$\langle\alpha\rangle(n) < \alpha \quad \text{si } \alpha > 0.$$

Nous avons déjà le théorème 1 (i) (d'après Goodstein). Supposons que m, n soient tels que la suite de Goodstein pour m commençant à n soit toujours positive. La suite d'ordinaux correspondante serait alors une suite infinie strictement décroissante, ce qui est impossible (par induction transfinie en dessous de ε_0).

Afin de prouver (ii), nous introduisons la machinerie de Ketonen-Solovay (voir [3], [4] pour plus de détails). Nous définissons d'abord une autre opération $\{\alpha\}(n)$ pour $\alpha < \varepsilon_0$ et $n \in N$ par récurrence sur α :

$$\{0\}(n) = 0, \quad \{\beta+1\}(n) = \beta, \quad \{\omega^{\gamma+1}(\beta+1)\}(n) = \omega^{\gamma+1}\beta + \omega^{\gamma} n,$$

et pour la limite δ

$$\{\omega^\delta(\beta+1)\}(n) = \omega^\delta\beta + \omega^{\{\delta\}(n)}.$$

Notons que $\{\alpha\}(n) < \alpha$ pour $\alpha > 0$. Définissons maintenant la notion d'ensembles finis α-grands pour $0 < \alpha < \varepsilon_0$ par récurrence sur α : si $X \subset N$ est fini, énumérons les éléments de X par ordre croissant comme $X_0, X_1, \ldots, X_{|X|-1}$.

X est 1-grand si et seulement si $|X| \geq 2$.

X est α-grand si et seulement si $X - \{X_0\}$ est $\{\alpha\}(X_1)$-grand.

Écrivons maintenant $\{\alpha\}(n_1, \ldots, n_k)$ pour $\{\ldots\{\{\alpha\}(n_1)\}(n_2)\ldots\}(n_k)$. Ensuite, par récurrence sur α, nous pouvons montrer que X est α-grand si et seulement si $\{\alpha\}(X_1, X_2, X_{|X|-1}) = 0$. Pour plus de détails, voir le lemme 11 de [4].

Définir $\omega_0 = \omega, \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$.

Les concepts ci-dessus peuvent être exprimés en arithmétique du premier ordre (les ordinaux $< \varepsilon_0$ étant remplacés par des notations appropriées) et ont donc un sens dans un modèle non standard de P (voir [4]).

Théorème 4 (Ketonen-Solovay ; voir [3], [4]). (i) *La fonction $Y(a,b) =$ le plus grand c tel que $[a,b]$ soit ω_c-grand est un indicateur des modèles de P.*

(ii) *L'énoncé* $\forall a \forall c \exists b$ *([a,b] soit ω_c-grand) est indépendante de P et est équivalente dans P à* $\mathrm{Con}(P + T_1)$ *où T_1 est l'ensemble des assertions Π_1 vraies.*

(iii) *Les fonctions $g_n(x) =$ le plus petit $y \geq x$ tel que $[x,y]$ est ω_n-grand sont des fonctions récursives prouvablement totales (dans P), et pour toute fonction récursive prouvablement totale f, il existe $n \in N$ tel que $f(x) < g_n(x)$ pour tout $x \in N$ suffisamment grand.*

Écrire $\beta \underset{n}{\rightarrow} \alpha$ si et seulement si pour certains $j_1, \ldots, j_k \leq n$,

$$\alpha = \{\beta\}(j_1, \ldots, j_k) ;$$

$\beta \underset{n}{\Rightarrow} \alpha$ si et seulement si la même chose est vraie avec $j_1 = \ldots = j_k = n$.

Le lemme suivant est une application standard de ces concepts.

Lemme 5. (i) *Si $\beta \underset{n}{\Rightarrow} \alpha$ et $n > 0$ alors $\omega^\beta \underset{n}{\Rightarrow} \omega^\alpha$.*

(ii) *Si $0 < i < j \leq n$ alors $\{\beta\}(j) \underset{n}{\Rightarrow} \{\beta\}(i)$.*

(iii) *$\beta \underset{n}{\Rightarrow} \alpha$ si et seulement si $\beta \underset{n}{\rightarrow} \alpha$.*

(iv) *Supposons que* $\beta = \omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_n}$, $\gamma = \omega^{\gamma_1} + \ldots + \omega^{\gamma_m}$, *et*

$$\beta_1 \ldots \geq \beta_n \geq \gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_m.$$

Puis si $\gamma \underset{n}{\rightarrow} \delta$ *alors* $\beta + \gamma \underset{n}{\rightarrow} \beta + \delta$. *En particulier* $\beta + \gamma \underset{n}{\rightarrow} \beta$.

Après avoir introduit cette machinerie, nous allons l'appliquer pour relier les opérations $\{\alpha\}(n)$ et $\langle\alpha\rangle(n)$ et ainsi obtenir notre résultat.

Lemme 6. *Supposons que* $\beta \underset{n}{\rightarrow} \alpha$ *et que* $0 < n \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. *Alors*

$$\{\beta\}(n_1, \ldots, n_k) \geq \{\alpha\}(n_1, \ldots, n_k).$$

Preuve. La preuve est par induction sur β. Supposons que le résultat soit vrai en dessous de β. D'après le lemme 5 (iii),

$$\beta \underset{n_1}{\rightarrow} \alpha \underset{n_1}{\rightarrow} \{\alpha\}(n_1)$$

donc $\{\beta\}(n_1) \underset{n_1}{\rightarrow} \{\alpha\}(n_1)$. Donc par hypothèse inductive

$$\{\beta\}(n_1, n_2, \ldots, n_k) \geq \{\alpha\}(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

Proposition 7. *Pour tout* $\alpha < \varepsilon_0$ *et* $j \in N$, $\langle\alpha\rangle(j) \underset{j}{\rightarrow} \{\alpha\}(j)$

Preuve : par induction sur α. Si α vaut 0 ou un successeur, le résultat est trivial. Si $\alpha = \omega^{\gamma+1}(\beta+1)$ alors à partir des définitions $\{\alpha\}(j) = \omega^{\gamma+1}\beta + \omega^{\gamma} j$ et $\langle\alpha\rangle(j) = \{\alpha\}(j) + \langle\omega^{\gamma}\rangle(j)$. En appliquant le lemme 5 (iv), $\langle\alpha\rangle(j) \underset{j}{\rightarrow} \{\alpha\}(j)$.

Si $\alpha = \omega^{\delta}(\beta+1)$, δ limite, alors par hypothèse inductive

$$\langle\delta\rangle(j) \underset{j}{\rightarrow} \{\delta\}(j).$$

Par le lemme 5 (i), $\omega^{\langle\delta\rangle(j)} \underset{j}{\rightarrow} \omega^{\{\delta\}(j)}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle(j) = \omega^{\delta}\beta + \omega^{\langle\delta\rangle(j)} j + \langle\omega^{\langle\delta\rangle(j)}\rangle(j) & \underset{j}{\rightarrow} \omega^{\delta}\beta + \omega^{\langle\delta\rangle(j)} \qquad \text{par le lemme 5 (iv)} \\ & \underset{j}{\rightarrow} \omega^{\delta}\beta + \omega^{\{\delta\}(j)} = \{\alpha\}(j). \end{aligned}$$

Proposition 8. *Soit* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *la suite de Goodstein pour* m *commençant en* n *et soit* k *minimal tel que* $b_k = 0$. *Alors* $[n-1, n+k]$ *est* $o_n(m)$*-grand.*

Preuve. Considérons la suite d'ordinaux correspondante.

$$\begin{aligned} o_n(m) &= o_n(b_0) = \alpha \\ o_{n+1}(b_1) &= \langle\alpha\rangle(n) \\ o_{n+2}(b_2) &= \langle\alpha\rangle(n, n+1) \\ \ldots \\ o_{n+k}(b_k) &= o_{n+k}(0) = 0 = \langle\alpha\rangle(n, n+1, \ldots, n+k). \end{aligned}$$

Par le lemme 6 et la proposition 7,

$$\begin{aligned}\{\alpha\}(n, n+1, \ldots, n+k) &\leq \{\langle\alpha\rangle(n)\}(n+1, \ldots, n+k) \\ &\leq \{\langle\alpha\rangle(n, n+1)\}(n+2, \ldots, n+k) \\ &\leq \ldots \leq \langle\alpha\rangle(n, \ldots, n+k) = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, $[n-1, n+k]$ est α-grand.

Pour prouver le (ii) du théorème 1, supposons que nous ayons

$$\mathrm{P} \vdash \forall m \ \exists k \ m_k = 0 \tag{*}$$

Grâce au théorème 4 et aux méthodes de la théorie des indicateurs (voir [5]), nous pouvons trouver $M \models \mathrm{P}$ et $c \in M$ non standard tels que

$$M \models \neg\exists y([1, y] \text{ est } \omega_c\text{−large}).$$

(En bref, cela se fait en prenant un modèle dénombrable non standard J de P et des nombres non standards $c, a \in J$ tel que $Y(c, a)$ soit non standard mais inférieur à $c-1$ où Y est comme dans le théorème 4 (i). Or, le fait que l'indicateur Y ait une valeur non standard sur (c, a) signifie précisément qu'il existe un segment initial de J qui est un modèle de P et se situe "entre" c et a, c'est-à-dire qui contient c mais pas a. Soit M un tel segment initial.)

Dans M, prenons $d = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ avec c exponentiations itérées, donc $o_2(d) = \omega_c$. Par (*), prenons $e \in M$ tel que $d_e = 0$. Comme la preuve de la proposition 8 peut être réalisée dans P (voir la discussion précédant le lemme 4 dans [4]), nous avons dans M

$$[1, 2+e] \text{ est } \omega_c\text{−large},$$

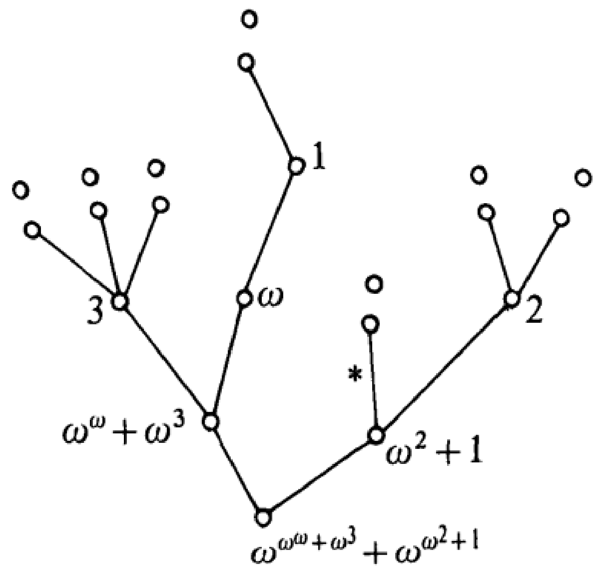
une contradiction.

Nous esquissons la preuve du théorème 2, similaire à celle du théorème 1. Commençons par attribuer à chaque nœud d'une hydre donnée un ordinal inférieur à ε_0, comme suit :

À chaque nœud supérieur, attribuer 0.

À chaque autre nœud, attribuer $\omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$, où $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ sont les ordinaux attribués aux nœuds immédiatement "au-dessus" ($\omega^0 = 1$).

Ainsi, notre exemple initial aurait les attributions suivantes :



L'ordinal d'une hydre est l'ordinal attribué à sa racine. Pour toute stratégie σ, on peut définir une opération $[\alpha]_\sigma(n)$ qui associe l'ordinal de l'hydre après l'étape $n-1$ à l'ordinal de l'hydre après l'étape n, où σ est la stratégie utilisée.

Pour démontrer le théorème 2 (i), il suffit au lecteur de vérifier que pour toute stratégie σ, tout $0 < \alpha < \varepsilon_0$ et $n \in N$,

$$[\alpha]_\sigma(n) < \alpha.$$

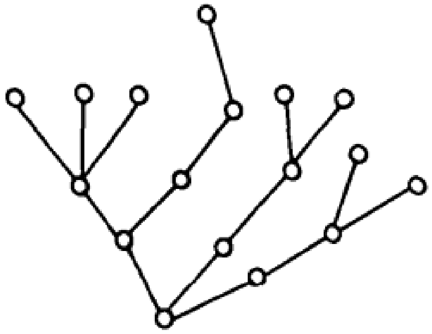
Pour (ii), nous produirons une stratégie récursive τ pour laquelle

$$[\alpha]_\tau(n) = \{\alpha\}(n+1).$$

Une démonstration similaire à celle du théorème 1 montrera alors que, dans P, nous ne pouvons pas prouver que τ est une stratégie gagnante.

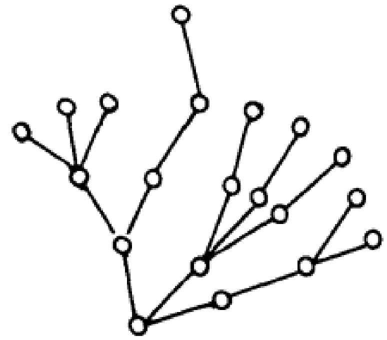
Un algorithme pour τ est le suivant : en partant de la racine, remontons dans l'arbre de telle sorte qu'après avoir atteint un nœud, on se dirige vers le nœud immédiatement supérieur qui possède l'ordinal minimal assigné parmi tous les nœuds immédiatement supérieurs. (Si plusieurs d'entre eux possèdent l'ordinal minimal, nous choisissons, par exemple, le nœud le plus à gauche). Nous atteignons finalement un nœud supérieur et la tête à laquelle il est attaché est celle à couper.

Ainsi, dans le diagramme précédent, la tête déterminée par τ est marquée d'une étoile, et la bataille déterminée par τ commence ainsi :



$\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{3}}+\omega^{\omega^{2}}\cdot 2$

après l'étape 1



$\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{3}}+\omega^{\omega^{2}}+\omega^{\omega\cdot 3}$

après l'étape 2

(*Note :* Une preuve que τ est une stratégie gagnante équivaut à une preuve de "ε_0-induction par rapport à la fonction prédécesseur $p(\alpha, n) = \{\alpha\}(n)$", ce qui revient à prouver que la fonction $\lambda nx.g_n(x)$ du théorème 4 (iii) est totalement récursive, ce qui est bien sûr impossible dans P.)

Remarque. Soient $I\sum_k$ les axiomes de Peano avec une induction restreinte aux formules de $\sum_k$. Ensuite, en utilisant les résultats de [4], nous pouvons affiner le théorème 1 pour obtenir, pour $k \in N, k \geq 1$.

Théorème 1'. (i) *Pour tout* $p \in$ *fixé*, $\sum_k \vdash m, n > 1$ *(si* $m < n^{n^{\cdots^{n^p}}}$ *(où* n *apparaît* k *fois), alors la suite de Goodstein pour* m *commençant à* n *finit par atteindre zéro).*

(ii) $\sum_k \nvdash\ \forall m, n > 1$ *(si* $m < n^{n^{\cdots^{n}}}$ *(où* n *apparaît* $k+1$ *fois) alors la suite de Goodstein pour* m *commençant à* n *finit par atteindre zéro.*

De même, si nous nous limitons, dans le théorème 2, aux hydres de hauteur $k+1$ (c'est-à-dire qu'aucun nœud n'est à plus de $k+1$ segments de la racine), alors nous ne pouvons pas prouver que "toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" en utilisant seulement $I\sum_k$. En particulier, la fonction donnant la longueur des batailles pour les hydres de hauteur 2 avec la stratégie τ n'est pas prouvablement totale dans $I\sum_1$ et n'est donc pas récursive primitive.

Références

1. G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Ann.*, 112, 1936, 493-565.
2. R. L. Goodstein, On the restricted ordinal theorem, *J. Symbolic Logic*, 9, 1944, 33-41.
3. J. Ketonen, R. Solovay, *Rapidly growing Ramsey functions*, Ann. of Math., 113, 1981, 267-314.
4. J. Paris, A hierarchy of cuts in models of arithmetic, *Model theory of algebra and arithmetic*, Proceedings, Karpacz, Pologne 1979. Lecture Notes in Mathematics 834, Springer, Berlin, p. 312-337.
5. J. Paris, Some independence results for Peano arithmetic, *J. Symbolic Logic*, 43, 1978, 725-731.

Département de Mathématiques,
Université de Manchester,
Manchester M13 9PL.