Proximité sur les espaces équilatéraux
A. Yu Lemin

Nous disons qu'un espace métrique (M, d) est *équilatéral* si pour 3 points quelconques, au lieu de l'inégalité triangulaire, l'inégalité plus forte suivante est vérifiée : $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$. Des exemples particuliers de tels espaces sont connus depuis longtemps en théorie des nombres, en théorie des fonctions méromorphes, en théorie des champs, en analyse p-adique, etc. Dans [1] et [2], une définition axiomatique de ces espaces a été donnée et leur topologie a été étudiée : la classe des espaces équilatéraux est, à homéomorphisme près, la même que celle de tous les espaces mesurables de dimension 0. Pourtant, une étude des espaces métriques à homéomorphisme près est trop grossière (les homéomorphismes ne préservent pas la complétude d'un espace). De ce fait, dans [3], une description des espaces équilatéraux est donnée à isométrie près. Dans cet article, nous considérons une classe d'applications qui est plus étendue mais très naturelle en relation avec les espaces métriques : les homéomorphismes mutuellement uniformes (les équimorphismes dans la terminologie de Efremovich [4]), et nous caractérisons les espaces équilatéraux du point de vue de la géométrie de proximité, en nous appuyant sur le travail de Smirnov [5]-[7].

Un espace métrique est dit *connecté (relié) au sens de Cantor* si n'importe quels deux points $a, b \in M$ peuvent être joints par une ε-chaîne pour tout $\varepsilon > 0$. Efremovich a montré que M est connecté au sens de Cantor si et seulement s'il ne peut être partitionné en deux parties distantes non vides. Cette propriété est similaire à la connectivité habituelle (Hausdorff). Par analogie avec une chaîne de classes d'espaces topologiques définis par les propriétés suivantes :

(0) X est totalement déconnecté ;

(1) n'importe quels deux points dans X sont séparés par l'ensemble vide ;

(2) $\text{ind}\, X = 0$.

(3) $\text{Ind}\, X = 0$, nous introduisons une chaîne similaire de proximité des espaces ;

(0') X est totalement déconnecté au sens de Cantor, c'est-à-dire, dans X il n'y a pas de sous-ensembles connectés au sens de Cantor ;

(1') $\forall x, y \in X\ \exists X_1 \ni x$ tels que $X_2 = X \backslash X_1 \ni y$ et $X_1 \overline{\delta} X_2$;

(2') $in\, \delta\, X = 0$, c'est-à-dire, $\forall x \in X, \forall A \subset X$ tels que $x \overline{\delta} A, \exists X_1 \ni x, X_2 = X \backslash X_1 \supset A$ et $X_1 \overline{\delta} X_2$;

(3') $in\, \delta\, X = 0$, c'est-à-dire, pour tous $A, B \subset X$ tels que $A \overline{\delta} B, \exists X_1 \supset A, X_2 = X \backslash X_1 \supset B$: $X_1 \overline{\delta} X_2$.

(2') est dit *petit*, et (3') *grandement proche de la dimension* 0. Les propositions suivantes sont aisées à démontrer :

I. (0')-(3') *sont toutes héréditaires.*

II. (3') *est équivalent à la dimension 0* δ, $\dim X = 0$ *au sens de Smirnov [6] et signifie que la compactification [5] correspondant à la proximité donnée est de dimension 0.*

III. *Les implications suivantes sont vraies : (3') $\implies$ (2') $\implies$ (1') $\implies$ (0'), (1') $\implies$ (1), (2') $\implies$ (2), mais (3') n'implique pas, en général (3) (le plan de Tikhonov). Pour résumer (3) $\iff$ (3') ; également (0)-(3) et (0')-(3') sont toutes équivalentes.*

Des exemples simples montrent que même parmi les sous-espaces du plan ordinaire chacune des classes (0')-(3') contient strictement la suivante.

IV. *Pour des espaces métriques* (1')-(3') *sont équivalentes aux propriétés suivantes :*

(1") $\forall x \in M, \forall y \in M, \exists \varepsilon > 0$ tel que x et y ne peuvent être reliés par une ε-chaîne (x et y ne sont pas ε-reliables). Nous appelons de tels espaces *totalement non reliés.*

(2") $\forall A \subset M, \forall x \in M$ tels que $A\overline{\delta}x, \exists \varepsilon > 0\ :$ x et A ne sont pas ε-reliables.

(3") $\forall A \subset M, \forall B \subset M$ tels que $A\overline{\delta}B, \exists \varepsilon > 0\ :$ A et B ne sont pas ε-reliables.

La connection de ces classes d'espaces avec les espaces équilatéraux est établie par le théorème suivant :

Théorème
1. *Les espaces totalement non reliés et seulement eux sont les images inverses des espaces équilatéraux selon les bijections uniformément continues.*
2. Les espaces métriques de dimension 0 à petite proximité et seulement eux sont les images inverses des espaces équilatéraux selon les homéomorphismes uniformes (dans une seule direction).
3. Les espaces métriques de dimension 0 à proximité et seulement eux sont les images inverses et les images d'espaces équilatéraux selon les équimorphismes.

Preuve. D'abord, nous prouvons que les espaces équilatéraux satisfont (1")-(3"). Dans ces espaces une propriété plus forte même que (1") est vérifiée : on ne trouve aucune paire de points a et b qui soient ε-reliables pour tout $\varepsilon < d(a, b)$. Cela caractérise complètement les espaces équilatéraux (parmi les espaces métriques) à cause de la proposition suivante :

V. Un espace métrique M est équilatéral si et seulement si $a \in M$ et $b \in M$ quels qu'ils soient ne sont pas ε-reliables pour tout $\varepsilon < d(a, b)$.
De cela, il découle aisément que tous les espaces équilatéraux satisfont (2") et (3"). La suffisance des conditions du théorème est maintenant la conséquence de la proposition suivante

VI. *Les propriétés d'être totalement non reliés (de dimension 0 de petite-proximité ou de grande-proximité, respectivement) sont héritées par les images inverses selon les bijections uniformes (homéomorphismes ou équimorphismes, respectivement).*

Prouvons la nécessité. Pour cela, nous introduisons dans chaque espace métrique avec (1"), une nouvelle métrique (équilatérale) ρ de telle façon que l'application identité $(M, d) \to (M, \rho)$ soit uniforme (et dans les (2"), (3") également mutuellement continue (mutuellement uniforme)). Il est aisé de voir que ces ε pour lesquels deux points sont ε-reliables (non reliables) forment une section dans $\mathbb{R}$. Nous définissons pour tous $a \in M$ et $b \in M$, $\rho(a, b) = \inf\{\varepsilon|\ a \text{ et } b \text{ sont } \varepsilon - \text{reliables}\}$. Par (1"), $\rho(a, b) \geq 0$ et $\rho(a, b) = 0 \iff a = b$. Ensuite, $\rho(a, b)$ est symétrique et équilatéral, parce que si a et c sont ε_1-reliables, et b et c sont ε_2-reliables, alors a et b sont $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$-reliables. Puisqu'il y a pour toute paire de points une $d(a, b)$-chaîne entre eux, $\rho(a, b) \leq d(a, b)$, par conséquent, l'application $(M, d) \to (M, \rho)$ est uniformément continue. On peut montrer que dans le cas (2”),(3”) l'application inverse est également continue (uniforme). Le théorème décrivant tous les espaces uniformément condensés sur les espaces équilatéraux est maintenant démontré.

Corollaire 1. *Pour les espaces métriques, ainsi que pour les espaces compacts, (3') implique (3) (et même (2') implique (3)). Mais de (1”) ne découlent ni (3) ni (2), comme cela est montré par l'exemple d'un sous-espace de dimension 1 totalement non-relié* H_0 *de l'espace de Hilbert :* $H_0 = \{x = (x_1, \ldots) \mid x_n = k/n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Par conséquent, tout espace métrique approchant la dimension 0 est de dimension 0. D'un autre côté, puisque tout espace métrique de dimension 0 est homéomorphe (mais n'est pas, en général, équimorphe) à un espace équilatéral (de Baire généralisé), les métriques équilatérales sont dans un certain sens les métriques les plus naturelles sur les espaces de dimension 0 : ce sont ces métriques d'un espace de dimension 0 selon lesquelles une compactification de l'espace est de dimension 0. Nous disons qu'un espace de proximité est de proximité mesurable s'il existe une métrique qui détermine la proximité donnée. À partir du théorème ci-dessus et de la proposition II nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Du point de vue de la géométrie de proximité, les espaces équilatéraux sont précisément les sous-ensembles de proximité mesurable des compacts de dimension 0.*

On peut souligner le théorème fondamental suivant de de Groot [2] :

VII. *Sur tout espace métrique de dimension 0* (M, d) *on peut introduire une métrique équilatérale* ρ *de telle façon que l'application* $(M, d) \to (M, \rho)$ *est continue et son application inverse est uniforme. Par conséquent, un espace de dimension 0 peut être changé en espace équilatéral en en modifiant la mesure sans en affecter la complétude.*

Corollaire 3. *Un espace est mesurable par une métrique complète équilatérale si et seulement si il est mesurable, de dimension 0, et Cech-complet.*

En conclusion les auteurs profitent de l'opportunité pour remercier Yu.M. Smirnov pour les discussions intéressantes et pour leur avoir rendu accessible sa thèse de doctorat non publiée [7].

Références

[1] A.F. Monna, Remarques sur les métriques non-archimédiennes. I, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 53 (1950), 470-481. MR 12-41.

[2] J. de Groot, Non-Archimedean metrics in topology, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 948-953. MR 18-325.

[3] A.Yu. Lemin, On equilateral metric spaces, Vestnik Moskov, Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1984.

[4] V.A. Efremovich, Proximity geometry. I, Mat. Sb. 31 (1952), 189-200. MR 14-110.

[5] Yu.M. Smirnov, On proximity spaces, Mat. Sb. 31 (1952), 543-574. MR 14-1107.

[6] ____________, On the dimension of proximity spaces, Mat. Sb. 38 (1956), 283-302. MR 18-497.

[7] ______________, A study on general and uniform topology by the covering method. D.Sc. dissertation Moscow State University, Moscow 1957.

Institut d'ingénierie de la construction de Moscou, reçu par le Conseil des Gouverneurs le 22 février 1983.