## Sur l'inégalité de Castelnuovo-Severi

À Emil Artin à l'occasion de ses 60 ans

par Arthur Mattuck et John Tate.

Cela nous procure un grand plaisir de dédier cet article à Artin. Dans sa thèse, qui a été publiée en 1924 dans le Mathematische Zeitschrift, Artin a étudié l'arithmétique des corps de fonctions hyperelliptiques sur les corps finis et a attiré l'attention sur le fait que l'analogue de l'hypothèse de Riemann semblait être vraie pour eux. Dans trois articles dans le journal de Crelle, en 1936, Hasse a développé (d'un point de vue purement arithmétique) la théorie des endomorphismes des courbes elliptiques sur des corps de base arbitraires et a pu prouver l'hypothèse de Riemann dans le cas elliptique. Peu de temps après, Weil a réalisé que le cas général devrait découler d'une inégalité de Castelnuovo et Severi concernant les correspondances entre des courbes algébriques. Sous la forme (1) ci-dessous, cette inégalité apparaît dans le livre de Severi, *Trattato di Geometrica Algebrica* (Zanichelli, Bologna, 1926) dans la page 265, où elle est déduite d'une formule de Castelnuovo concernant les séries algébriques de diviseurs sur les courbes. En établissant (1) pour des corps de base arbitraires, Weil a prouvé l'hypothèse de Riemann en général (C. R., Paris, 1940). Les idées impliquées sont complètement élaborées dans ses deux monographies sur les courbes algébriques et les variétés abéliennes (Hermann, Paris, 1948). Les méthodes de Weil, qui relient l'inégalité à la trace d'un endomorphisme du jacobien, contribuent de façon significative à une compréhension plus profonde de celle-ci. D'un autre côté, l'inégalité est vraiment une assertion à propos de la géométrie d'une sorte vraiment particulière de surface - le produit de deux courbes - et il est naturel de se demander si elle ne découle pas de la théorie générale des surfaces. Le fait que cela puisse être démontré sans quitter la surface a été mis en évidence par la preuve arithmétique de Roquette (Crelle, 1953) qui est entièrement réalisée dans le corps de fonctions du produit de deux courbes. Ce que nous souhaiterions montrer dans la présente note est que l'inégalité de Castelnuovo-Severi est une conséquence directe du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces[1].) Comme références pour le dernier théorème sur des corps de base arbitraires, on peut citer l'article de Zariski sur les systèmes linéaires complets (Annals of Mathematics, 1952) dans lequel il apparaît en dernière page, et la preuve de Serre qui est esquissée par Zariski dans la partie III du second rapport d'été de l'Institut (Bull. A.M.S., Mars, 1956).

Soient $C$ et $C'$ des courbes complètes non singulières définies sur un corps algébriquement clos $k$ qui sera le corps de définition de ce qui suit. Soit $D$ un diviseur sur la surface $V = C \times C'$, et soit $d = [D \cdot (P \times C')]$ et $d' = [D \cdot (C \times P')]$ les degrés de $D$

reçu le 17.1.1958.

Retranscription en Latex et traduction : Denise Vella-Chemla, août 2022.

[1]Dans un article *Sur un mémoire de Mattuck-Tate*, à paraître dans le Journal de Crelle, A. Grothendieck a analysé et généralisé nos méthodes, et en même temps, il a également donné une démonstration encore plus simple de l'inégalité à partir du théorème de Riemann-Roch.

sur $C$ et sur $C'$ respectivement. L'inégalité de Castelnuovo-Severi est

(1) $$\frac{1}{2}[D \cdot D] < dd'.$$

Pour prouver cela, on part du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces[2]

(2) $$\chi(D) = \dim D - \sup D + \dim(K - D) = \frac{1}{2}[D \cdot (D - K)] + 1 + p_a(V).$$

Puisque $V = C \times C'$, on a $1 + p_a(V) = (1 - p_a(C))(1 - p_a(C')) = (1 - g)(1 - g')$, où $g$ et $g'$ sont les genres de $C$ et $C'$. Aussi, si $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}'$ sont des diviseurs canoniques sur $C$ et sur $C'$, alors $K = \mathfrak{k} \times C' + C \times \mathfrak{k}'$ est un diviseur canonique sur $V$. Par conséquent $[D \cdot K] = (2g - 2)d + (2g' - 2)d'$ parce que les degrés de $\mathfrak{k}$ et de $\mathfrak{k}'$ sont $2g - 2$ et $2g' - 2$. En substituant ces valeurs du côté droit de (2), on trouve que sur $V$, on peut écrire le théorème de Riemann-Roch sous la forme

(3) $$\chi(D) = \frac{1}{2}[D \cdot D] - dd' + (d + 1 - g')(d' + 1 - g).$$

Donc l'inégalité (1) est équivalente à

(4) $$\chi(D) \leq (d + 1 - g')(d' + 1 - g).$$

On observe alors que l'expression $\frac{1}{2}[D \cdot D] - dd'$ reste inchangée si on ajoute à $D$ un diviseur de la forme $\mathfrak{a} \times C' + C \times \mathfrak{a}'$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont des diviseurs sur $C$ et $C'$. Donc pour prouver (4), on peut supposer que les degrés $d$ et $d'$ sont grands. Si l'un ou l'autre est grand alors $\dim(K - D) = 0$ parce que le degré correspondant de $K - D$ est négatif ; et puisque $\sup D \geq 0$ on a alors $\chi(D) \leq \dim D$. Donc (4) découle du

*Lemme : Si $d > 2g' - 2$ et $d' > 2g - 2$ alors*

(5) $$\dim D \leq (d + 1 - g')(d' + 1 - g).$$

Le côté gauche de (5) est par définition la dimension de l'espace vectoriel $M$ des fonctions rationnelles sur la surface qui sont multiples de $-D$ :

$$M = \{f \in k(V) \mid (f) \geq -D\}.$$

Le côté droit peut également être interprété comme une dimension de la façon suivante. Choisissons sur $C'$ un ensemble de $r = d + 1 - g'$ points rationnels $P'_1, ..., P'_r$ dans une "position générale" (nous verrons pendant la démonstration ce que l'on entend précisément ici par "générale"). Alors les $r$ sections de croisements horizontales $C_i = C \times P'_i$ sont des courbes isomorphes à $C$. Les cycles d'intersection $\mathfrak{a}_i = D \cdot C_i$ sont tous définis et sont des diviseurs sur les $C_i$ respectifs si, comme on peut le supposer, aucun des $C_i$ ne sont des composantes de $D$. Chaque $\mathfrak{a}_i$ a le même grand

[2] Ici $\dim D$ fait référence à la dimension arithmétique, et non pas à la dimension géométrique, de telle façon que $\dim D = \dim |D| + 1$.

degré $d' > 2g - 2$ et donc par le théorème de RIEMANN pour les courbes, ils ont tous la même dimension, notamment $d' + 1 - g$. Donc si on dénote par $M_i$ l'espace des fonctions rationnelles sur $C_i$ qui sont des multiples de $-\mathfrak{a}_i$ on a:

$$M_i = \{f \in k(C_i) \mid (f) \ngeq -\mathfrak{a}_i\},$$

alors $\dim_k M_i = d' + 1 - g$, et la somme directe des $r$ espaces $M_i$ a pour dimension $(d + 1 - g')(d' + 1 - g)$ qui est juste le côté droit de (5).

Maintenant pour prouver (5) nous exhiberons simplement une application $k$-linéaire de $M$ dans la somme directe $M_1, \oplus \ldots \oplus M_r$ et montrerons que le noyau est zéro. L'application que nous avons à l'esprit est

$$f \longrightarrow (f_1, \ldots, f_r), \qquad \text{où} \qquad f_i = \mathrm{Tr}_{C_i} f.$$

La trace, ou restriction, de $f$ à $C_i$ est définie parce que $(f) \geq -D$ et $C_i$ n'est pas une composante de $D$, de telle façon que $f$ ne peut pas avoir un pôle sur $C_i$. L'application est interne parce que, en omettant le cas trivial $f_i = 0$, on a $(f_i) = (\mathrm{Tr}_{C_i} f) = (f) \cdot C_i \geq -D \cdot C_i = -\mathfrak{a}_i$.

Finalement nous affirmons que les points $P_i'$ peuvent être choisis de telle façon que le noyau de notre application soit zéro. Soit $f$ une fonction dans le noyau. Puisque $f$ est définie sur $k$, son diviseur des zéros doit aussi être défini sur $k$, de telle façon que si nous pouvons montrer que $f$ est nulle quand elle est restreinte à une section croisée générique verticale, il s'ensuivra qu'elle est identiquement nulle sur la surface entière. Soit alors $C^*$ une telle section croisée ($C^* = P \times C'$ où $P$ est un point générique de $C$) et soit $f^* = \mathrm{Tr}_{C^*} f$. Puisque chaque $f_i = 0$, on a $(f) \geq -D + \sum C_i$. Il s'ensuit que

$$(f^*) \geq (-D + \sum C_i) \cdot C^* = -D^* + \sum P_i^*,$$

disons, où $D^* = D \cdot C^*$ et $P_i^* = C_i \cdot C^* = P \times P_i'$ sont des diviseurs sur $C^*$. C'est ici que l'on voit comment il faut choisir les $P_i'$ : $D$ étant le diviseur donné, il faut les choisir de telle façon que $\dim(D^* - \sum P_i^*) = 0$, en d'autres termes, les choisir de telle façon qu'à partir de la relation ci-dessus, nous soyons capable de conclure que $f^* = 0$. Cela est possible parce que $D^*$ a pour degré $d > 2g' - 2$, et par conséquent, par le théorème de RIEMANN dim $D^* = d + 1 - g' = r$, qui est justement le nombre de points $P_i'$ que l'on doit choisir ; et nous pouvons les choisir un par un de telle façon que $P_i^*$ ne soit pas une composante fixée du système linéaire $|D^* - (P_1^* + \ldots + P_{i-1}^*)|$.

Cela conclut notre démonstration, mais les remarques suivantes peuvent être intéressantes. Nous n'avons pas réellement besoin du théorème de RIEMANN-ROCH sous sa forme complète (2), mais seulement sous la forme

$$\mathrm{Dim}\ D_n = \frac{1}{2}[D_n \cdot (D_n - K)] + 1 + p_a(V) \quad \text{pour } n \text{ grand},$$

où $D_n = D + nH$ et $H$ est une section hyperplane de $V$. Pour prouver (1) pour un $D$ donné, prenons simplement $H = \mathfrak{h} \times C' + C \times \mathfrak{h}'$, où $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont des sections hyperplanes de $C$ et $C'$, et appliquons notre lemme à $D_n$ pour $n$ grand.

D'un autre côté, en faisant un usage plein et entier de la forme complète du théorème de Riemann-Roch on peut obtenir notre preuve et en même temps interpréter $dd' - \frac{1}{2}[D \cdot D]$ comme une superabondance. Dans cette version on ignore le lemme et les espaces vectoriels $M$ et $M_i$, mais on considère directement le diviseur $E = D - \sum C_i$, construit dans le dernier paragraphe de la preuve ci-dessus, avec son intersection $E^* = E \cdot C^*$ avec la section croisée générique verticale. Le degré, $e$, de $E$ sur $C$ est $d - r = g' - 1$. C'est également le degré de $E^*$, et puisque dim $E^* = 0$ par construction, il découle du théorème de Riemann-Roch pour la courbe $C^*$ que $\dim(K^* - E^*) = 0$ (l'intersection $K^* = K \cdot C^*$ est bien sûr un diviseur canonique sur $C^*$.) Maintenant, $C^*$ étant générique, on conclut qu'à la fois dim $E$ et $\dim(K - E)$ sont égaux à zéro de telle façon que $\chi(E) = -\sup E$. Et puisque $e + 1 - g' = 0$ nous trouvons en appliquant (3) au diviseur $E$ que $dd' - \frac{1}{2}[D \cdot D]$ est égal à la superabondance de $E$.

Finalement, on remarque que les évaluations auxiliaires de la fonction quadratique $Q(D) = dd' - \frac{1}{2}[D \cdot D]$ pour un $D$ particulier qui sont nécessaires pour que l'hypothèse de Riemann découle de (1) viennent également directement du domaine des idées entourant le théorème de Riemann-Roch. Si $D$ est une courbe irrégulière non singulière sur $V$, alors la trace sur $D$ du système adjoint $|D + K|$ est constituée des cycles canoniques sur $D$ et par conséquent $D \cdot (D + K) = 2g_D - 2$, où $g_D$ est le genre de $D$. (Cf. Zariski, *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi*, Annals of Math., 1952, p. 587-589). Ainsi dans ce cas, on a

$$(6) \qquad \begin{aligned} Q(D) &= dd' + \frac{1}{2} D \cdot K - (g_D - 1) \\ &= dd' + d(g-1) + d'(g'-1) - (g_D - 1). \end{aligned}$$

En particulier, si $D$ est le graphe d'une fonction rationnelle $\varphi : C' \to C$, alors $d' = 1, g_D = g', d = \deg \varphi$, et (6) devient simplement $Q(D) = g \deg \varphi$.

Si $\psi : C' \to C$ est une autre application rationnelle, de graphe $E$, on utilise ce dernier résultat pour évaluer le discriminant de la forme quadratique $Q(mD + nE)$. On obtient

$$(\deg \varphi + \deg \psi - D \cdot E)^2 - 4g^2 \deg \varphi \deg \psi.$$

Ce dicriminant est $\leq 0$ parce que par (1) la forme est $\geq 0$ pour tous les entiers $m$ et $n$. Par conséquent

$$|\deg \varphi + \deg \psi - N| \leq 2g\sqrt{\deg \varphi \deg \psi}, \tag{7}$$

où $N = D \cdot E$ est le nombre total de solutions $P$ de $\varphi(P) = \psi(P)$, en comptant les multiplicités. Si $C' = C$ et $\psi$ est la fonction identité, alors (7) devient

$$|\deg \varphi + 1 - N| \leq 2g\sqrt{\deg \varphi}, \tag{8}$$

où $N$ dénote maintenant le nombre de points fixes de $\varphi$. Si finalement $C$ est définie sur un corps fini $k_0$ avec $q$ éléments et $\varphi$ est l'application qui consiste à élever les coordonnées d'un point à la puissance $q$, alors $\deg \varphi = q$ et on a

$$|q + 1 - N| \leq 2g\sqrt{q}. \tag{9}$$

Les multiplicités des points fixes de $\varphi$ valent un parce que $\varphi$ est totalement inséparable. Ainsi $N$ est égal au nombre de points sur $C$ rationnels sur $k_0$, et (9) est juste l'équivalent bien connu de l'hypothèse de Riemann.